T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Dağıstan ŞİMŞEK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2007

T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

DAĞISTAN ŞİMŞEK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 30 / 01 / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

(Başkan)

Prof. Dr. Eşref HATIR	Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
(Üye)	(Üye)
Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR	Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
(Danışman)	(Üye)

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Dağıstan ŞİMŞEK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

2007, 80 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Eşref HATIR

Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, maksimumlu fark denklemleri ve fark denklemlerinin periyodikliği ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde, $x_{n+1} = \max\{1/x_{n-2}, x_{n-2}\}$ fark denklemini tanımladık, çözümlerini ve periyodikliğini inceledik. Bu fark denklemi için nümerik örnekler verdik.

Dördüncü bölümde ise, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(2k+1)}}{1 + x_{n-k}}$ fark denkleminin periyodikliğini inceledik. Son olarak da bu fark denklemi için nümerik örnekler verdik.

Anahtar Kelimeler: Maksimumlu Fark Denklemi, Periyodiklik

ABSTRACT

PhD Thesis

A STUDY ON SOLUATIONS AND PERIODICITY OF SOME DIFFERENCE EQUATIONS

Dağıstan ŞİMŞEK

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

2007, 80 Pages

Jury: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Eşref HATIR

Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Assist. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

This study consists of four sections. In the first section, we gave information about some difference equations with maximum and perodicity of some difference equations studied before.

In the second section, we gave general definitions and theorems about difference equations.

In the third section, we defined the difference equation $x_{n+1} = \max\{1/x_{n-2}, x_{n-2}\}$ and investigated its solutions and periodicity. We gave the numerical examples for this difference equation.

In the fourth section, we investigated periodicity of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(2k+1)}}{1+x_{n-k}}$. Finally, we gave the numerical examples for this difference equation.

Key Words : Difference Equation with Maximum, Periodicity

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Doktora tez konusunu bana teklif eden, çalışmalarım boyunca karşılaştığım zor durumlarda yardımlarını esirgemeyen ve katkılarıyla beni yönlendiren, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten, bilgilerinden faydalanma imkanı veren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR'a teşekkür eder ve saygılarımı sunarım. Doktora tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen Dr. İbrahim YALÇINKAYA, Arş. Gör. Ramazan KARATAŞ, eşim ve kızıma teşekkür ederim.

Dağıstan ŞİMŞEK

Konya, 2007

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Bu çalışmada, fark denklemlerinin iki ayrı konusu olan maksimumlu fark denklemleri ve fark denklemlerinin periyodikliği ele alınmıştır.

Maksimumlu fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan çalışmalardan büyük bir kısmı incelenmiştir. Bu kapsamlı araştırmanın ışığında, x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-2}}, x_{n-2}\right\}$ maksimumlu fark denklemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir. Çözümleri incelemek için sekiz orijinal teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Ayrıca fark denklemlerinin periyodikliği ile ilgili yapılmış çalışmaların büyük bir kısmı incelendikten sonra, $x_{n+1} = \frac{x_{n-(2k+1)}}{1+x_{n-k}}$ $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin $x_{-(2k+1)}, x_{-2k}, ..., x_0 \in (0,\infty)$ ve $k = 0,1,2,...$ başlangıç şartları altında çözümüne ulaşabilmek için bir teorem ifade ve ispat edilmiştir. Bu amaçla ifade ve ispat edilen Teorem de orijinaldir.

Öncelikle çalışmada kullanılan literatürün özeti iki ayrı kısımda ele alınmıştır.

1.1. Maksimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Amleh (1998), G. Ladas yönetiminde yaptığı doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A, B parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiş ve son bölümde ise, Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Janowski ve arkadaşları (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu rasyonel fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. Bu fark denkleminde A, k parametreleri ve başlangıç şartlarının pozitif sayı değerleri aldıklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınımlı olma şartlarını A, k parametreleri ile başlangıç şartlarına bağlı olarak elde etmişlerdir.

Valicenti (1999), yaptığı doktora tezinde; $x_{n+1} = \dfrac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1} = \dfrac{\max\{a_n x_n, b_n\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk olarak A herhangi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Daha sonra, $x_{n+1} = \dfrac{a}{x_n} + \dfrac{b}{y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{c}{x_n} + \dfrac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiş ve son olarakda $y_{n+1} = \dfrac{p + y_{n-1}}{q y_n + y_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif parametreler ve başlangıç şartları altında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Papaschinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayılarını pozitif sayı dizileri ve başlangıç şartlarını pozitif sayı olarak aldıkları $x_{n+1} = \dfrac{\max\left\{a_n \left(\prod_{i=n-k+1}^{n} x_i\right), b_n\right\}}{\prod_{i=n-k}^{n} x_i}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin süreklilik, sınırlılık ve periyodiklik özelliklerini incelemişlerdir.

Mishev ve arkadaşları (2002), $x_{n+1} = \max\left\{ \frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}} \right\}$ fark denkleminin periyodikliği üzerine yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile başlangıç şartlarını pozitif sayı değerleri olarak kabul ederek denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; G. Ladas tarafından verilen bir açık problemi çözmüştür. Bu çalışmada, A, B, C parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $A + B + C > 0$ için $x_n = \max\left\{ \frac{A}{x_{n-1}}, \frac{B}{x_{n-3}}, \frac{C}{x_{n-5}} \right\}$ fark denkleminin bütün çözümlerinin periyodik olduğunu göstermiştir. İkincisinde ise, A ile B parametreleri pozitif reel sayılar ve k ile m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{ \frac{A}{x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n-m}} \right\}$ maksimumlu fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir. A, B, k ve m parametrelerine bağlı olarak denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir.

Feuer (2003), $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n^k, A\}}{x_n^l x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denklemi üzerinde yaptığı çalışmada; A'nın pozitif bir reel sayı, k, l ve başlangıç şartlarının da keyfi reel sayı değerleri olduğunu kabul ederek denklemin çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümleri, çözümlerinin periyodikliği ve sabit aralığı üzerine çalışmışlardır.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada; A_n, B_n pozitif terimli ve 3 periyotlu diziler olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A_n}{x_n}, \frac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çinar ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $A, B > 0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç şartları için $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca, bu denklemi genelleştirerek elde ettikleri $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n x_{n-1} \dots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \dots x_{n-(2k+2)}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Simsek ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yan ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; $0 < \alpha < 1, A > 0, A \leq 1$, $A > 1$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ başlangıç şartları için $x_n = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}^{\alpha}}, \frac{A}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin 4 periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

1.2. Rasyonel Fark Denklemlerinin Periyodikliği İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Devault ve arkadaşları (1998), yaptıkları çalışmada, $x_{-2}, x_{-1}, x_0, A > 0$ başlangıç şartları için $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Camouzis ve Devault (2001), yaptıkları çalışmada; $x_0, x_{-1}, p > 0$ pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini göstermişlerdir.

Patula ve Voulov (2002), yaptıkları çalışmalarında; $x_{n+1} = 1 + \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Stevic (2002), yaptığı çalışmada $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{g(x_n)}$, $n = 0,1,2,...$ denkleminin pozitif başlangıç şartları altında, çözümlerden oluşan sınırlar elde edildiğini göstermiştir.

Abu-Saris ve Devault (2003), yaptıkları çalışmalarında; $y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denkleminin çözümlerini $y_{-k},...,y_0$, $A > 0$, $k \in \{2,3,4,...\}$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerekli olan şartları elde etmişlerdir.

Mestel (2003), yaptığı çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}$ denkleminin periyodikliğini incelemiştir.

Abu-Saris ve Al-Jubouri (2004), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Çinar (2004), yaptığı çalışmarında; $x_0, x_{-1}, a, b > 0$ başlangıç şartları altında, birincisinde $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}$ denkleminin, ikincisinde $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-1}}{1 + bx_{n-1}x_n}$ denkleminin ve üçüncüsünde $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + ax_{n-1}x_n}$ denkleminin çözümlerini tümevarım yöntemiyle yapmıştır.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004), yaptıkları çalışmalarında; $\alpha \in [1, \infty)$, $k = 0,1,2,...$ için ve pozitif reel sayılar olan başlangıç şartları altında, $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$, $n = 0,1,2,...$ için denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik karakterli olduğunu ve bu çözümlerin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Stevic (2004), yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}$ denkleminin genel çözümlerini, başlangıç şartlarını reel sayılar alarak incelemiştir.

Stevic (2004), yaptığı çalışmasında; $x_{n+1} = \dfrac{p + x_{n-(2s-1)}}{x_n + (2l + s) + 1}$ çözümlerinin, $p > 1$, $s, l \in N$ başlangıç şartlarına göre $2s$ periyotlu olduğunu göstermiştir.

Berenhaut ve Stevic (2005), yaptıkları çalışmada; $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n-3}x_{n-4}}$ fark denkleminin çözümlerinin 3 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Hamza (2005), yaptığı çalışmasında; $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin $\alpha, x_0, x_{-1} < 0$ başlangıç şartları altında, global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2005), yaptıkları çalışmada; k çift bir sayı olmak üzere, $x_{n+1} = p_n + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin $k+1$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Saleh ve Aloqeili (2005), yaptıkları çalışmada; $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denklemini $y_{-k},..., y_0, A > 0$ başlangıç şartları altında pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Stevic (2005), yaptığı çalışmasında; $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$ denkleminin çözümlerini $\alpha, p, x_0, x_{-1} > 0$ başlangıç şartları altında asimptotikliğini, periyodikliğini, salınımlılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Taixiang (2005), yaptığı çalışmasında; $x_{n+1} = p + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$ denkleminin çözümlerinin $p, x_0, x_{-1} > 0$ başlangıç şartları altında sınırlılığını incelemiştir.

Yan ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; α, x_{-1}, x_0 başlangıç şartlarını reel sayı alarak $x_{n+1} = \alpha - \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ denkleminin bütün pozitif ve negatif çözümlerinin asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini göstermişlerdir.

Abu Saris (2006), yaptığı çalışmasında; $w_{-2}, w_{-1}, w_0 > 0$ başlangıç şartları için $w_{n+1} = \frac{w_n + w_{n-2}}{w_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerinin 4 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermiştir.

Berenhaut ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; y_{-4}, y_{-3}, y_{-2}, $y_{-1}, y_0 > 0$ başlangıç şartları için $y_n = \frac{y_{n-3} + y_{n-4}}{y_{n-1}}$ denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

2. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ ÇALIŞMADA KULLANILAN TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan ve tezde kullanılan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumlarda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x 'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x 'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y)$, $E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir.

Dikkat edilirse, fark denklemlerinin n 'in sürekli olduğu durumda diferansiyel denklemler ile arasında büyük benzerlikler vardır.

Birinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y 'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f: I\,x\,I \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0,1,2,... \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

3. BÖLÜM

$x_{n+1} = \max\left\{\dfrac{1}{x_{n-2}}, x_{n-2}\right\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-2}}, x_{n-2}\right\}, \quad n = 0,1,2,... \tag{3.1}$$

maksimumlu fark denklemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir.

Bu amaçla (3.1) denkleminde karşılaşılabilecek farklı durumlar için sekiz ayrı teorem ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra (3.1) denklemi için nümerik örnekler verilmiştir.

Teorem 3.1. $0 < x_{-2}, x_{-1}, x_0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

(a) Eğer $0 < x_{-2}, x_{-1}, x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

(b) Eğer $0 < x_{-2}, x_{-1} < 1$ ve $\mathrm{x}_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

(c) Eğer $0 < x_{-2}, x_0 < 1$ ve $x_{-1} > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

(d) Eğer $0 < x_{-2} < 1$ ve $x_{-1}, x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...),$$

(e) Eğer $x_{-2} > 1$ ve $0 < x_{-1}, x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

(f) Eğer $x_{-2}, x_0 > 1$ ve $0 < x_{-1} < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

(g) Eğer $x_{-2}, x_{-1} > 1$ ve $0 < x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

(h) Eğer $x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $0 < x_{-2}, x_{-1}, x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(b) $0 < x_{-2}, x_{-1} < 1$ ve $x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(c) $0 < x_{-2}, x_0 < 1$ ve $x_{-1} > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(d) $0 < x_{-2} < 1$ ve $x_{-1}, x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, \ldots)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2} > 1$ ve $0 < x_{-1}, x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2}, x_0 > 1$ ve $0 < x_{-1} < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2},\ x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}},\ x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, \ldots, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, \ldots)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2}, x_{-1} > 1$ ve $0 < x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2},\ x_{3n+2} = x_{-1},\ x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2},\ x_{3n+2} = x_{-1},\ x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2. $0 < x_{-2}, x_{-1}$ ve $x_0 < 0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

a) Eğer $0 < x_{-2}, x_{-1} < 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = \left(x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...\right),$$

b) Eğer $0 < x_{-2}, x_{-1} < 1$ ve $x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = \left(x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...\right),$$

c) Eğer $0 < x_{-2} < 1, x_{-1} > 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = \left(x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...\right),$$

d) Eğer $0 < x_{-2} < 1, x_{-1} > 1$ ve $x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = \left(x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...\right),$$

e) Eğer $x_{-2}, x_{-1} > 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...),$$

f) Eğer $x_{-2}, x_{-1} > 1$ ve $x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

g) Eğer $x_{-2} > 1, 0 < x_{-1} < 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

h) Eğer $x_{-2} > 1, 0 < x_{-1} < 1$ ve $x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $0 < x_{-2}, x_{-1} < 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(b) $0 < x_{-2}, x_{-1} < 1$ ve $x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(c) $0 < x_{-2} < 1, x_{-1} > 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(d) $0 < x_{-2} < 1, x_{-1} > 1$ ve $x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2}, x_{-1} > 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2}, x_{-1} > 1$ ve $x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2} > 1, 0 < x_{-1} < 1$ ve $-1 < x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2} > 1, 0 < x_{-1} < 1$ ve $x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},...,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},...)$$

şeklindedir.

Teorem 3.3. $0<x_{-2},x_0$ ve $x_{-1}<0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

a) Eğer $0<x_{-2},x_0<1$ ve $-1<x_{-1}<0$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},...,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},...),$$

b) Eğer $0<x_{-2},x_0<1$ ve $x_{-1}<-1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},...,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},...),$$

c) Eğer $0<x_{-2}<1, x_0>1$ ve $-1<x_{-1}<0$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},x_0,...,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},x_0,...),$$

d) Eğer $0<x_{-2}<1, x_0>1$ ve $x_{-1}<-1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},x_0,...,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},x_0,...),$$

e) Eğer $x_{-2},x_0>1$ ve $-1<x_{-1}<0$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},x_{-1},x_0,...,x_{-2},x_{-1},x_0,...),$$

f) Eğer $x_{-2},x_0>1$ ve $x_{-1}<-1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},x_0,...,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},x_0,...),$$

g) Eğer $x_{-2}>1, 0<x_0<1$ ve $-1<x_{-1}<0$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},x_{-1},\frac{1}{x_0},...,x_{-2},x_{-1},\frac{1}{x_0},...),$$

h) Eğer $x_{-2}>1, 0<x_0<1$ ve $x_{-1}<-1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},...,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},...)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $0<x_{-2},x_0<1$ ve $-1<x_{-1}<0$ olsun. Bu durumda

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_{-2}},x_{-2}\right\}=\frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2=\max\left\{\frac{1}{x_{-1}},x_{-1}\right\}=x_{-1},$$

$$x_3=\max\left\{\frac{1}{x_0},x_0\right\}=\frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n\geq 0$ için

$$x_{3n+1}=\frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2}=x_{-1},\ x_{3n+3}=\frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},...,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},...)$$

şeklindedir.

(b) $0<x_{-2},x_0<1$ ve $x_{-1}<-1$ olsun. Bu durumda

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_{-2}},x_{-2}\right\}=\frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2=\max\left\{\frac{1}{x_{-1}},x_{-1}\right\}=\frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3=\max\left\{\frac{1}{x_0},x_0\right\}=\frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n\geq 0$ için

$$x_{3n+1}=\frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2}=\frac{1}{x_{-1}},\ x_{3n+3}=\frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(c) $0 < x_{-2} < 1, x_0 > 1$ ve $-1 < x_{-1} < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(d) $0 < x_{-2} < 1, x_0 > 1$ ve $x_{-1} < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2}, x_0 > 1$ ve $-1 < x_{-1} < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2}, x_0 > 1$ ve $x_{-1} < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2} > 1, 0 < x_0 < 1$ ve $-1 < x_{-1} < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2} > 1, 0 < x_0 < 1$ ve $x_{-1} < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

Teorem 3.4. $0 < x_{-2}$ ve $x_{-1}, x_0 < 0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

a) Eğer $0 < x_{-2} < 1$ ve $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...),$$

b) Eğer $0 < x_{-2} < 1$ ve $x_{-1}, x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

c) Eğer $0 < x_{-2} < 1, -1 < x_{-1} < 0$ ve $x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

d) Eğer $0 < x_{-2} < 1, x_{-1} < -1$ ve $-1 < x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

e) Eğer $x_{-2} > 1$ ve $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...),$$

f) Eğer $x_{-2} > 1$ ve $x_{-1}, x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

g) Eğer $x_{-2} > 1, -1 < x_{-1} < 0$ ve $x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

h) Eğer $x_{-2} > 1, x_{-1} < -1$ ve $-1 < x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $0 < x_{-2} < 1$ ve $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2} = x_{-1},\ x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, \ldots)$$

şeklindedir.

(b) $0 < x_{-2} < 1$ ve $x_{-1}, x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}},\ x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots)$$

şeklindedir.

(c) $0 < x_{-2} < 1, -1 < x_{-1} < 0$ ve $x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2} = x_{-1},\ x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots)$$

şeklindedir.

(d) $0 < x_{-2} < 1, x_{-1} < -1$ ve $-1 < x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}},\ x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, \ldots)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2} > 1$ ve $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2} > 1$ ve $x_{-1}, x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2} > 1, -1 < x_{-1} < 0$ ve $x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2} > 1, x_{-1} < -1$ ve $-1 < x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

Teorem 3.5. $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < 0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

a) Eğer $-1 < x_{-2}, x_{-1}, x_0 < 0$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...),$$

b) Eğer $-1 < x_{-2}, x_{-1} < 0$ ve $x_0 < -1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

c) Eğer $-1 < x_{-2}, x_0 < 0$ ve $x_{-1} < -1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},x_0,\ldots,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},x_0,\ldots),$$

d) Eğer $-1<x_{-2}<0$ ve $x_{-1},x_0<-1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots),$$

e) Eğer $x_{-2}<-1$ ve $-1<x_{-1},x_0<0$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},x_0,\ldots,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},x_0,\ldots),$$

f) Eğer $x_{-2},x_0<-1$ ve $-1<x_{-1}<0$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},\ldots,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},\ldots),$$

g) Eğer $x_{-2},x_{-1}<-1$ ve $-1<x_0<0$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},x_0,\ldots,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},x_0,\ldots),$$

h) Eğer $x_{-2},x_{-1},x_0<-1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $-1<x_{-2},x_{-1},x_0<0$ olsun. Bu durumda

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_{-2}},x_{-2}\right\}=x_{-2},$$

$$x_2=\max\left\{\frac{1}{x_{-1}},x_{-1}\right\}=x_{-1},$$

$$x_3=\max\left\{\frac{1}{x_0},x_0\right\}=x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2},\, x_{3n+2} = x_{-1},\, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(b) $-1 < x_{-2}, x_{-1} < 0$ ve $x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2},\, x_{3n+2} = x_{-1},\, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(c) $-1 < x_{-2}, x_0 < 0$ ve $x_{-1} < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2},\, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}},\, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(d) $-1 < x_{-2} < 0$ ve $x_{-1}, x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, \mathrm{x}_{3\mathrm{n}+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2} < -1$ ve $-1 < x_{-1}, x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2}, x_0 < -1$ ve $-1 < x_{-1} < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, \, x_{3n+2} = x_{-1}, \, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2}, x_{-1} < -1$ ve $-1 < x_0 < 0$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, \, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, \, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}} x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}} x_0, ...)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < -1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

Teorem 3.6. $x_{-2}, x_{-1} < 0$ ve $x_0 > 0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

a) Eğer $-1 < x_{-2}, x_{-1} < 0$ ve $0 < x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

b) Eğer $-1 < x_{-2}, x_{-1} < 0$ ve $x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...),$$

c) Eğer $-1 < x_{-2} < 0, x_{-1} < -1$ ve $0 < x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

d) Eğer $-1 < x_{-2} < 0, x_{-1} < -1$ ve $x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

e) Eğer $x_{-2}, x_{-1} < -1$ ve $0 < x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

f) Eğer $x_{-2}, x_{-1} < -1$ ve $x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

g) Eğer $x_{-2} < -1, -1 < x_{-1} < 0$ ve $0 < x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

h) Eğer $x_{-2} < -1, -1 < x_{-1} < 0$ ve $x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $-1 < x_{-2}, x_{-1} < 0$ ve $0 < x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(b) $-1 < x_{-2}, x_{-1} < 0$ ve $x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(c) $-1 < x_{-2} < 0, x_{-1} < -1$ ve $0 < x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(d) $-1 < x_{-2} < 0, x_{-1} < -1$ ve $x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2}, x_{-1} < -1$ ve $0 < x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2}, x_{-1} < -1$ ve $x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1}=\frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2}=\frac{1}{x_{-1}},\ x_{3n+3}=x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},x_0,...,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},x_0,...)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2}<-1, -1<x_{-1}<0$ ve $0<x_0<1$ olsun. Bu durumda

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_{-2}},x_{-2}\right\}=\frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2=\max\left\{\frac{1}{x_{-1}},x_{-1}\right\}=x_{-1},$$

$$x_3=\max\left\{\frac{1}{x_0},x_0\right\}=\frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n\geq 0$ için

$$x_{3n+1}=\frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2}=x_0,\ x_{3n+3}=\frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},...,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},...)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2}<-1, -1<x_{-1}<0$ ve $x_0>1$ olsun. Bu durumda

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_{-2}},x_{-2}\right\}=\frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2=\max\left\{\frac{1}{x_{-1}},x_{-1}\right\}=x_{-1},$$

$$x_3=\max\left\{\frac{1}{x_0},x_0\right\}=x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n\geq 0$ için

$$x_{3n+1}=\frac{1}{x_{-2}},\ x_{3n+2}=x_{-1},\ x_{3n+3}=x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},x_0,\ldots,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},x_0,\ldots)$$

şeklindedir.

Teorem 3.7. $x_{-2},x_0<0$ ve $x_{-1}>0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

a) Eğer $-1<x_{-2},x_0<0$ ve $0<x_{-1}<1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},x_0,\ldots,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},x_0,\ldots),$$

b) Eğer $-1<x_{-2},x_0<0$ ve $x_{-1}>1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},x_{-1},x_0,\ldots,x_{-2},x_{-1},x_0,\ldots),$$

c) Eğer $-1<x_{-2}<0, x_0<-1$ ve $0<x_{-1}<1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots,x_{-2},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots),$$

d) Eğer $-1<x_{-2}<0, x_0<-1$ ve $x_{-1}>1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,x_{-2},x_{-1},\frac{1}{x_0},\ldots,x_{-2},x_{-1},\frac{1}{x_0},\ldots),$$

e) Eğer $x_{-2},x_0<-1$ ve $0<x_{-1}<1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots,\frac{1}{x_{-2}},\frac{1}{x_{-1}},\frac{1}{x_0},\ldots),$$

f) Eğer $x_{-2},x_0<-1$ ve $x_{-1}>1$ ise

$$(x_n)=(x_{-2},x_{-1},x_0,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},\ldots,\frac{1}{x_{-2}},x_{-1},\frac{1}{x_0},\ldots),$$

g) Eğer $x_{-2}<-1,-1<x_0<0$ ve $0<x_{-1}<1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

h) Eğer $x_{-2} < -1, -1 < x_0 < 0$ ve $x_{-1} > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $-1 < x_{-2}, x_0 < 0$ ve $0 < x_{-1} < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(b) $-1 < x_{-2}, x_0 < 0$ ve $x_{-1} > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(c) $-1 < x_{-2} < 0, x_0 < -1$ ve $0 < x_{-1} < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(d) $-1 < x_{-2} < 0, x_0 < -1$ ve $x_{-1} > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2}, x_0 < -1$ ve $0 < x_{-1} < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2}, x_0 < -1$ ve $x_{-1} > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2} < -1, -1 < x_0 < 0$ ve $0 < x_{-1} < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, \ldots)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2} < -1, -1 < x_0 < 0$ ve $x_{-1} > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, \ldots, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, \ldots)$$

şeklindedir.

Teorem 3.8. $x_{-2} < 0$ ve $x_{-1}, x_0 > 0$ için (3.1) denkleminin çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler;

a) Eğer $-1 < x_{-2} < 0$ ve $0 < x_{-1}, x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, \ldots),$$

b) Eğer $-1 < x_{-2} < 0, 0 < x_{-1} < 1$ ve $x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

c) Eğer $-1 < x_{-2} < 0, x_{-1} > 1$ ve $0 < x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

d) Eğer $-1 < x_{-2} < 0$ ve $x_{-1}, x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, ...),$$

e) Eğer $x_{-2} < -1$ ve $0 < x_{-1}, x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

f) Eğer $x_{-2} < -1, 0 < x_{-1} < 1$ ve $x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...),$$

g) Eğer $x_{-2} < -1, x_{-1} > 1$ ve $0 < x_0 < 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...),$$

h) Eğer $x_{-2} < -1$ ve $x_{-1}, x_0 > 1$ ise

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

İspat. (a) $-1 < x_{-2} < 0$ ve $0 < x_{-1}, x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(b) $-1 < x_{-2} < 0, 0 < x_{-1} < 1$ ve $x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(c) $-1 < x_{-2} < 0, x_{-1} > 1$ ve $0 < x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, \ldots)$$

şeklindedir.

(d) $-1 < x_{-2} < 0$ ve $x_{-1}, x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = x_{-2}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \ldots)$$

şeklindedir.

(e) $x_{-2} < -1$ ve $0 < x_{-1}, x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(f) $x_{-2} < -1, 0 < x_{-1} < 1$ ve $x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = \frac{1}{x_{-1}}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-1}}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

(g) $x_{-2} < -1, x_{-1} > 1$ ve $0 < x_0 < 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(h) $x_{-2} < -1$ ve $x_{-1}, x_0 > 1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = \frac{1}{x_{-2}},$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1},$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0$$

olur. Buradan, iterasyonla her $n \geq 0$ için

$$x_{3n+1} = \frac{1}{x_{-2}}, x_{3n+2} = x_{-1}, x_{3n+3} = x_0$$

elde edilir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 3 periyotludur ve bu çözümler,

$$(x_n) = (x_{-2}, x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ..., \frac{1}{x_{-2}}, x_{-1}, x_0, ...)$$

şeklindedir.

Şimdi de, yukarıda ifade ve ispat edilen teoremler için nümerik örnekler verilecektir.

Örnek 3.1. Teorem 3.1. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 0{,}2$, $x_{-1} = 0{,}5$ ve $x_0 = 3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	5	6	5
1	2	7	2
2	3	8	3
3	5	9	5
4	2	10	2
5	3	11	3

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 3, x_{-1} = 0{,}4$ ve $x_0 = 2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	3	6	3
1	2,5	7	2,5
2	2	8	2
3	3	9	3
4	2,5	10	2,5
5	2	11	2

Örnek 3.2. Teorem 3.2. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 0{,}8,\ x_{-1} = 0{,}3$ ve $x_0 = -0{,}2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	1,25	6	1,25
1	3,333333	7	3,333333
2	-0,2	8	-0,2
3	1,25	9	1,25
4	3,333333	10	3,333333
5	-0,2	11	-0,2

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 3,\ x_{-1} = 0{,}4$ ve $x_0 = -6$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	3	6	3
1	2.5	7	2.5
2	-0,166666	8	-0,166666
3	3	9	3
4	2.5	10	2.5
5	-0,166666	11	-0,166666

Örnek 3.3. Teorem 3.3. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 0{,}1,\ x_{-1} = -0{,}3$ ve $x_0 = 0{,}7$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	10	6	10
1	-0,3	7	-0,3
2	-1,428571	8	-1,428571
3	10	9	10
4	-0,3	10	-0,3
5	-1,428571	11	-1,428571

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 4$, $x_{-1} = -0{,}8$ ve $x_0 = 0{,}9$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	4	6	4
1	-0,8	7	-0,8
2	1,111111	8	1,111111
3	4	9	4
4	-0,8	10	-0,8
5	1,111111	11	1,111111

Örnek 3.4. Teorem 3.4. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 0{,}3$, $x_{-1} = -0{,}4$ ve $x_0 = -3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	3,333333	6	3,333333
1	-0,4	7	-0,4
2	-0,333333	8	-0,333333
3	3,333333	9	3,333333
4	-0,4	10	-0,4
5	-0,333333	11	-0,333333

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = 4$, $x_{-1} = -2$ ve $x_0 = -0{,}6$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	4	6	4
1	-0,5	7	-0,5
2	-0,6	8	-0,6
3	4	9	4
4	-0,5	10	-0,5
5	-0,6	11	-0,6

Örnek 3.5. Teorem 3.5. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -0{,}2,\ x_{-1} = -3$ ve $x_0 = -4$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,2	6	-0,2
1	-0,333333	7	-0,333333
2	-0,25	8	-0,25
3	-0,2	9	-0,2
4	-0,333333	10	-0,333333
5	-0,25	11	-0,25

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -2,\ x_{-1} = -3$ ve $x_0 = -6$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,5	6	-0,5
1	-0,333333	7	-0,333333
2	-0,166666	8	-0,166666
3	-0,5	9	-0,5
4	-0,333333	10	-0,333333
5	-0,166666	11	-0,166666

Örnek 3.6. Teorem 3.6. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -0{,}1,\ x_{-1} = -0{,}7$ ve $x_0 = 0{,}8$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,1	6	-0,1
1	-0,7	7	-0,7
2	1,25	8	1,25
3	-0,1	9	-0,1
4	-0,7	10	-0,7
5	1,25	11	1,25

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -5,\ x_{-1} = -0{,}3$ ve $x_0 = 4$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,2	6	-0,2
1	-0,3	7	-0,3
2	-0,25	8	-0,25
3	-0,2	9	-0,2
4	-0,3	10	-0,3
5	-0,25	11	-0,25

Örnek 3.7. Teorem 3.7. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -0{,}5$, $x_{-1} = -7$ ve $x_0 = 0{,}6$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,5	6	-0,5
1	-0,142857	7	-0,142857
2	1,666666	8	1,666666
3	-0,5	9	-0,5
4	-0,142857	10	-0,142857
5	1,666666	11	1,666666

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = 0{,}3$ ve $x_0 = -0{,}2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,25	6	-0,25
1	3,333333	7	3,333333
2	-0,2	8	-0,2
3	-0,25	9	-0,25
4	3,333333	10	3,333333
5	-0,2	11	-0,2

Örnek 3.8. Teorem 3.8. için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

a) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -0{,}9$, $x_{-1} = 0{,}8$ ve $x_0 = 0{,}1$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,9	6	-0,9
1	1,25	7	1,25
2	10	8	10
3	-0,9	9	-0,9
4	1,25	10	1,25
5	10	11	10

b) (3.1) denkleminde; başlangıç şartları $x_{-2} = -4,\ x_{-1} = 3$ ve $x_0 = 0,7$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	-0,25	6	-0,25
1	3	7	3
2	1,428571	8	1,428571
3	-0,25	9	-0,25
4	3	10	3
5	1,428571	11	1,428571

4. BÖLÜM

$x_{n+1}=\dfrac{x_{n-(2k+1)}}{1+x_{n-k}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde; $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, ..., x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ ve $k=0,1,2,...$ olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-(2k+1)}}{1+x_{n-k}},\ n=0,1,2,... \tag{4.1}$$

fark denklemi için bir teorem ve ispatı verilmiştir. Ayrıca (4.1) denkleminin $k=2$ için çözümleri incelenmiş ve nümerik örnek verilmiştir.

Teorem 4.1. (4.1) fark denklemi için aşağıdakiler doğrudur.

a) $(x_{(2k+2)n-(2k+1)}),(x_{(2k+2)n-(2k)}),...,(x_{(2k+2)n})$ azalan diziler ve $a_1,a_2,...,a_{2k+2}\geq 0$ olmak üzere

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(2k+1)}=a_1, \lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(2k)}=a_2,\ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k+3)}=a_{k-1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k+2)}=a_k$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k+1)}=a_{k+1},\ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n}=a_{2k+2}$ dir.

b) $(a_1,a_2,...,a_{2k+2},a_1,a_2,...,a_{2k+2},\ldots)$, (4.1) denkleminin çözümüdür ve bu çözüm $2k+2$ periyotludur.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(2k+1)} \lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k)}=0,\ldots,\lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k+1)} \lim\limits_{n\to\infty} x_{(2k+2)n}=0$ veya $a_1.a_{k+2}=0,\ldots,\ a_{k+1}.a_{2k+2}=0$ dır.

d) Eğer $n\geq n_0\in N$ iken $x_{n-k}\geq x_{n+1}$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ dır.

e) Aşağıdaki ifadeler:

$$x_{(2k+2)n+1} = x_{-(2k+1)}(1 - \frac{x_{-k}}{1+x_{-k}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}})$$

.

.

.

$$x_{(2k+2)n+k+1} = x_{-(k+1)}(1 - \frac{x_0}{1+x_0} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}})$$

$$x_{(2k+2)n+k+2} = x_{-(k)}(1 - \frac{x_{-(2k+1)}}{1+x_{-k}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}})$$

.

.

.

$$x_{(2k+2)n+2k+2} = x_0(1 - \frac{x_{-(k+1)}}{1+x_0} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}})$$

elde edilir.

f) $n \to \infty$ halinde eğer $x_{(2k+2)n+1} \to a_1 \neq 0$ ise $x_{(2k+2)n+k+2} \to 0$ dır. Benzer şekilde $n \to \infty$ halinde eğer $x_{(2k+2)n+k+1} \to a_{k+1} \neq 0$ ise $x_{(2k+2)n+2k+2} \to 0$ dır.

İspat:

a) (4.1) denkleminden $x_{n+1}(1+x_{n-k}) = x_{n-(2k+1)}$ elde edilir. Buradan $x_{n-k} \in (0,\infty)$ olduğu için $(1+x_{n-k}) \in (1,\infty)$ olur. Böylece $x_{n+1} < x_{n-(2k+1)}$ bulunur. Şimdi bu ifadeyi n nin değerleri için irdeleyelim.

$n = 0$ için $\quad x_1 < x_{-(2k+1)} = x_{-2k-1}$

$n = 1$ için $\quad x_2 < x_{1-(2k+1)} = x_{-2k}$

$n = 2$ için $\quad x_3 < x_{2-(2k+1)} = x_{-2k+1}$

$\vdots \qquad \vdots$

$n = k-1$ için $\quad x_k < x_{k-1-(2k+1)} = x_{-k-2}$

$n = k$ için $\quad x_{k+1} < x_{k-(2k+1)} = x_{-k-1}$

$n = k+1$ için $\quad x_{k+2} < x_{k+1-(2k+1)} = x_{-k}$

$\vdots \qquad \vdots$

$n = 2k-1$ için $\quad x_{2k} < x_{2k-1-(2k+1)} = x_{-2}$

$n = 2k$ için $\quad x_{2k+1} < x_{2k-(2k+1)} = x_{-1}$

$$
\begin{aligned}
n &= 2k+1 \text{ için} \quad & x_{2k+2} &< x_{2k+1-(2k+1)} = x_0 \\
n &= 2k+2 \text{ için} \quad & x_{2k+3} &< x_{2k+2-(2k+1)} = x_1 < x_{-2k-1} \\
n &= 2k+3 \text{ için} \quad & x_{2k+4} &< x_{2k+3-(2k+1)} = x_2 < x_{-2k} \\
n &= 2k+4 \text{ için} \quad & x_{2k+5} &< x_{2k+4-(2k+1)} = x_3 < x_{-2k+1}
\end{aligned}
$$

işlemlere bu şekilde devam edilirse;

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(2k+1)} &= a_1 \\
\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(2k)} &= a_2 \\
&\vdots \\
\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k+3)} &= a_{k-1} \\
\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k+2)} &= a_k \\
\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n-(k+1)} &= a_{k+1} \\
&\vdots \\
\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n} &= a_{2k+2}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

b) $(a_1, a_2, ..., a_{2k+2}, a_1, a_2, ..., a_{2k+2}, \ldots)$, (4.1) denkleminin çözümü olduğu **a)** şıkkından açıktır ve çözüm $2k+2$ periyotludur.

c) (4.1) denkleminde $n = (2k+2)n$ alınırsa

$$x_{(2k+2)n+1} = \frac{x_{(2k+2)n-(2k+1)}}{1 + x_{(2k+2)n-k}}$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{(2k+2)n-(2k+1)}}{1 + x_{(2k+2)n-k}}$$

olup $a_1 = \dfrac{a_1}{1 + a_{k+2}}$ ise $a_1 + a_1 a_{k+2} = a_1$ den $a_1 a_{k+2} = 0$ olur.

(4.1) denkleminde $n = (2k+2)n + 1$ alınırsa

$$x_{(2k+2)n+2} = \frac{x_{(2k+2)n-(2k)}}{1 + x_{(2k+2)n-k+1}}$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{(2k+2)n-(2k)}}{1+x_{(2k+2)n-k+1}}$$

olup $a_2 = \dfrac{a_2}{1+a_{k+3}}$ ise $a_2 + a_2 a_{k+3} = a_2$ den $a_2 a_{k+3} = 0$ olur.

İşlemlere bu şekilde devam edilirse;

(4.1) denkleminde $n = (2k+2)n + 2k + 1$ alınırsa

$$x_{(2k+2)n+2k+2} = \frac{x_{(2k+2)n}}{1+x_{(2k+2)n+k+1}}$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n+2k+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{(2k+2)n}}{1+x_{(2k+2)n+k+1}}$$

olup $a_{2k+2} = \dfrac{a_{2k+2}}{1+a_{k+1}}$ ise $a_{2k+2} + a_{2k+2}a_{k+1} = a_{2k+2}$ den $a_{2k+2}a_{k+1} = 0$ olur. Buradan da yukarıda yapılan işlemler birleştirilirse $a_1 a_{k+2} = 0$, $a_2 a_{k+3} = 0, \ldots, a_{k+1}a_{2k+2} = 0$ bulunur.

d) Eğer $n_0 \in N$ iken her $n \geq n_0$ için

$$x_{n+1} \leq x_{n-k} \tag{4.2}$$

(4.2) ifadesinde $n = (2k+2)n + 1$ alınırsa $x_{(2k+2)n+2} \leq x_{(2k+2)n-k+1}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_2 \leq a_{k+3}$ sonucu bulunur.

(4.2) de $n = (2k+2)n + 2$ alınırsa $x_{(2k+2)n+3} \leq x_{(2k+2)n-k+2}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_3 \leq a_{k+4}$ sonucu bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse,

(4.2) de $n = (2k+2)n + 2k + 1$ alınırsa $x_{(2k+2)n+2k+2} \leq x_{(2k+2)n+k+1}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_{2k+2} \leq a_{k+1}$ sonucu elde edilir.

(4.2) de $n = (2k+2)n + 2k + 2$ alınırsa $x_{(2k+2)n+2k+3} \leq x_{(2k+2)n+k+2}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_1 \leq a_{k+2}$ sonucu elde edilir. Bulunan bu sonuçlardan;

$$a_2 \leq a_{k+3},\ a_3 \leq a_{k+4},\ \ldots,\ a_{2k+2} \leq a_{k+1},\ a_1 \leq a_{k+2} \tag{4.2a}$$

ifadesini yazarız.

$$x_{n+1} \le \frac{x_{n-(2k+1)}}{1+x_{n+1}} \tag{4.3}$$

(4.3) ifadesinde $n=(2k+2)n+1$ alınırsa $x_{(2k+2)n+2} \le \dfrac{x_{(2k+2)n-2k}}{1+x_{(2k+2)n+2}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_2^2 \le 0$ sonucu bulunur.

(4.3) de $n=(2k+2)n+2$ alınırsa $x_{(2k+2)n+3} \le \dfrac{x_{(2k+2)n-2k+1}}{1+x_{(2k+2)n+3}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_3^2 \le 0$ sonucu bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse,

(4.3) de $n=(2k+2)n+2k+1$ alınırsa $x_{(2k+2)n+2k+2} \le \dfrac{x_{(2k+2)n}}{1+x_{(2k+2)n+2k+2}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_{2k+2}^2 \le 0$ sonucu elde edilir.

(4.3) de $n=(2k+2)n+2k+2$ alınırsa $x_{(2k+2)n+2k+3} \le \dfrac{x_{(2k+2)n+1}}{1+x_{(2k+2)n+2k+3}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $a_1^2 \le 0$ sonucu elde edilir. Bulunan bu sonuçlardan;

$$a_2^2 \le 0\,,\ a_3^2 \le 0\,,\ \ldots,\ a_{2k+2}^2 \le 0\,,\ a_1^2 \le 0 \tag{4.3a}$$

ifadesini yazarız. (4.2) eşitsizliği, (4.3) eşitsizliğini gerektirdiğinden bu eşitsizliklerin sonucu olan (4.2a) ve (4.3a) ifadeleri aşağıdaki gibi,

$$\begin{array}{c}
a_2 \le a_{k+3} \rightarrow a_2^2 \le 0 \\
a_3 \le a_{k+4} \rightarrow a_3^2 \le 0 \\
. \qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad . \\
a_{2k+2} \le a_{k+1} \rightarrow a_{2k+2}^2 \le 0 \\
a_1 \le a_{k+2} \rightarrow a_1^2 \le 0
\end{array}$$

yazılabilir. Buradan da $a_1 \le a_{k+2} \le a_1$, $a_2 \le a_{k+3} \le a_2$,…, $a_{k+1} \le a_{2k+2} \le a_{k+1}$ bulunur ki, bu da aranılan sonuçtur.

e) (4.1) denkleminin her iki tarafından $x_{n-(2k+1)}$ çıkartılırsa;

$$x_{n+1} - x_{n-(2k+1)} = \frac{1}{1+x_{n-k}}(x_{n-k} - x_{n-(3k+2)})$$

elde edilir. n = 0,1,…,k,…,2k+2 değerleri için aşağıdaki denklemler;

$n = 0$ için $\quad x_1 - x_{-(2k+1)} = \dfrac{1}{1+x_{-k}}(x_{-k} - x_{-(3k+2)}) = (x_1 - x_{-(2k+1)})$

$n = 1$ için $\quad x_2 - x_{-(2k)} = \dfrac{1}{1+x_{-k+1}}(x_{-k+1} - x_{-(3k+1)}) = (x_2 - x_{-(2k)})$

$n = 2$ için $\quad x_3 - x_{-(2k-1)} = \dfrac{1}{1+x_{-k+2}}(x_{-k+2} - x_{-(3k)}) = (x_3 - x_{-(2k-1)})$

$\vdots$

$n = k-1$ için $\quad x_k - x_{-(k+2)} = \dfrac{1}{1+x_{-1}}(x_{-1} - x_{-(2k+3)})$

$n = k$ için $\quad x_{k+1} - x_{-(k+1)} = \dfrac{1}{1+x_0}(x_0 - x_{-(2k+2)})$

$n = k+1$ için $\quad x_{k+2} - x_{-(k)} = \dfrac{1}{1+x_1}(x_1 - x_{-(2k+1)})$

$\vdots$

$n = 2k$ için $\quad x_{2k+1} - x_{-1} = \dfrac{1}{1+x_k}(x_k - x_{-(k+2)})$

$n = 2k+1$ için $\quad x_{2k+2} - x_0 = \dfrac{1}{1+x_{k+1}}(x_{k+1} - x_{-(k+1)})$

$n = 2k+2$ için $\quad x_{2k+3} - x_1 = \dfrac{1}{1+x_{k+2}}(x_{k+2} - x_{-(k)})$

bulunur. Bulunan bu denklemler taraf tarafa toplanırsa, $n \geq k+1$ ve $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$\left.\begin{array}{l} x_{(k+1)n-[(k+1)^2-1]} - x_{(k+1)n-[(k+2)^2-2]} = (x_1 - x_{-(2k+1)}) \displaystyle\prod_{i=1}^{n-(k+1)} \frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}} \\ \quad\vdots \\ x_{(k+1)n-[(k+1)^2-(k+1)]} - x_{(k+1)n-[(k+2)^2-(k+2)]} = (x_{k+1} - x_{-(k+1)}) \displaystyle\prod_{i=1}^{n-(k+1)} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}} \end{array}\right\} \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) denklemi incelendiğinde aşağıdaki formüller;

$$x_{(2k+2)n+1} - x_{-(2k+1)} = (x_1 - x_{-(2k+1)})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}}$$

$$\vdots$$

$$x_{(2k+2)n+k+1} - x_{-(k+1)} = (x_{k+1} - x_{-(k+1)})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i}}$$

$$x_{(2k+2)n+k+2} - x_{-k} = (x_1 - x_{-(2k+1)})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}}$$

$$\vdots$$

$$x_{(2k+2)n+2k+2} - x_0 = (x_{k+1} - x_{-(k+1)})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i}}$$

elde edilir. Yukarıdaki formüller düzenlenirse,

$$x_{(2k+2)n+1} = x_{-(2k+1)}(1-\frac{x_{-k}}{1+x_{-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(2k+2)n+k+1} = x_{-(k+1)}(1-\frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i}})$$

$$x_{(2k+2)n+k+2} = x_{-(k)}(1-\frac{x_{-(2k+1)}}{1+x_{-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}})$$

$$\vdots$$

$$x_{(2k+2)n+2k+2} = x_0(1-\frac{x_{-(k+1)}}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i}}$$

elde edilir.

f) $a_1 = a_{k+2} = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n+1} = \lim_{n\to\infty} x_{-(2k+1)}(1-\frac{x_{-k}}{1+x_{-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}})$$

$$a_1 = x_{-(2k+1)}(1-\frac{x_{-k}}{1+x_{-k}}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}})$$

olur. $a_1 = 0$ ise

$$\frac{1+x_{-k}}{x_{-k}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}} \tag{4.5}$$

olur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse,

$$\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n+k+2} = \lim_{n\to\infty} x_{-k}\left(1-\frac{x_{-(2k+1)}}{1+x_{-k}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}}\right)$$

$$a_{k+2} = x_{-k}\left(1-\frac{x_{-(2k+1)}}{1+x_{-k}}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}}\right)$$

bulunur. $a_{k+2} = 0$ ise

$$\frac{1+x_{-k}}{x_{-(2k+1)}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}} \tag{4.6}$$

bulunur. (4.5) ve (4.6) denklemlerinden,

$$\frac{1+x_{-k}}{x_{-k}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}} > \frac{1+x_{-k}}{x_{-(2k+1)}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{(k+1)i-k}}$$

$$\frac{1+x_{-k}}{x_{-k}} > \frac{1+x_{-k}}{x_{-(2k+1)}}$$

$$\frac{1}{x_{-k}} > \frac{1}{x_{-(2k+1)}}$$

$$x_{-(2k+1)} > x_{-k}$$

elde edilir. Böylece $x_{-(2k+1)} > x_{-k}$ bulunur. Buda kabulümüzle çelişir.

$a_{k+1} = a_{2k+2} = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n+k+1} = \lim_{n\to\infty} x_{-(k+1)}\left(1-\frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i}}\right)$$

$$a_{k+1} = x_{-(k+1)}\left(1-\frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i}}\right)$$

olup, $a_{k+1} = 0$ ise

$$\frac{1+x_0}{x_0} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{(k+1)i}} \tag{4.7}$$

bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse,

$$\lim_{n\to\infty} x_{(2k+2)n+2k+2} = \lim_{n\to\infty} x_0 (1 - \frac{x_{-(k+1)}}{1+x_0} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}})$$

$$a_{2k+2} = x_0 (1 - \frac{x_{-(k+1)}}{1+x_0} \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}})$$

olup, $a_{2k+2} = 0$ ise

$$\frac{1+x_0}{x_{-(k+1)}} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}} \tag{4.8}$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) denklemlerinden,

$$\frac{1+x_0}{x_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}} > \frac{1+x_0}{x_{-(k+1)}} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{(k+1)i}}$$

$$\frac{1+x_0}{x_0} > \frac{1+x_0}{x_{-(k+1)}}$$

$$\frac{1}{x_0} > \frac{1}{x_{-(k+1)}}$$

$$x_{-(k+1)} > x_0$$

olur. Böylece $x_{-(k+1)} > x_0$ elde edilir. Buda kabulümüzle çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 4.1. Yukarıda ispatı yapılan fark denkleminde $k = 2$ için elde edilen $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1+x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümleri aşağıda verilmiştir.

Bu bölümde; $x_{-5}, x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1+x_{n-2}}, \; n = 0,1,2,... \tag{4.9}$$

fark denklemi için aşağıdakiler doğrudur.

a) $(x_{6n-5}),(x_{6n-4}),(x_{6n-3}),(x_{6n-2}),(x_{6n-1}),(x_{6n})$ azalan diziler ve $p,q,r,s,t,u \geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-5} = p \,, \lim_{n\to\infty} x_{6n-4} = q \,, \lim_{n\to\infty} x_{6n-3} = r \,, \lim_{n\to\infty} x_{6n-2} = s \,, \lim_{n\to\infty} x_{6n-1} = t \,, \lim_{n\to\infty} x_{6n} = u$$

dir.

b) $(p,q,r,s,t,u\,,p,q,r,s,t,u\,,\ldots)$, (4.9) denkleminin çözümüdür ve bu çözüm 4 periyotludur.

c) $\lim_{n\to\infty} x_{6n-5} \lim_{n\to\infty} x_{6n-2} = 0$, $\lim_{n\to\infty} x_{6n-4} \lim_{n\to\infty} x_{6n-1} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} x_{6n-3} \lim_{n\to\infty} x_{6n} = 0$ veya $p.s = 0$, $q.t = 0$ ve $r.u = 0$ dır.

d) Eğer $n \geq n_0 \in N$ iken $x_{n-2} \geq x_{n+1}$ ise $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır.

e) Aşağıda ki ifadeler:

$$x_{6n+1} = x_{-5}(1 - \frac{x_{-2}}{1+x_{-2}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{3i-2}})$$

$$x_{6n+2} = x_{-4}(1 - \frac{x_{-1}}{1+x_{-1}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{3i-1}})$$

$$x_{6n+3} = x_{-3}(1 - \frac{x_{0}}{1+x_{0}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{3i}})$$

$$x_{6n+4} = x_{-2}(1 - \frac{x_{-5}}{1+x_{-2}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{3i-2}})$$

$$x_{6n+5} = x_{-1}(1 - \frac{x_{-4}}{1+x_{-1}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{3i-1}})$$

$$x_{6n+6} = x_{0}(1 - \frac{x_{-3}}{1+x_{0}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{3i}})$$

elde edilir.

f) $n \to \infty$ halinde eğer $x_{6n+1} \to p \neq 0$ ise $x_{6n+3} \to 0$ dır. $n \to \infty$ halinde eğer $x_{6n+2} \to q \neq 0$ ise $x_{6n+4} \to 0$ dır. Benzer şekilde $n \to \infty$ halinde eğer $x_{6n+3} \to r \neq 0$ ise $x_{6n+6} \to 0$ dır.

İspat:

a) (4.9) denkleminden $x_{n+1}(1+x_{n-2}) = x_{n-5}$ elde edilir. Buradan $x_{n-2} \in (0,\infty)$ olduğu için $(1+x_{n-2}) \in (1,\infty)$ olur. Böylece $x_{n+1} < x_{n-5}$ bulunur. Şimdi bu ifadeyi n nin değerleri için irdeleyelim.

$n=0$ için	$x_1 < x_{-5}$
$n=1$ için	$x_2 < x_{-4}$
$n=2$ için	$x_3 < x_{-3}$
$n=3$ için	$x_4 < x_{-2}$
$n=4$ için	$x_5 < x_{-1}$
$n=5$ için	$x_6 < x_0$
$n=6$ için	$x_7 < x_1 < x_{-5}$
$n=7$ için	$x_8 < x_2 < x_{-4}$
$n=8$ için	$x_9 < x_3 < x_{-3}$
$n=9$ için	$x_{10} < x_4 < x_{-2}$
$n=10$ için	$x_{11} < x_5 < x_{-1}$
$n=11$ için	$x_{12} < x_6 < x_0$

işlemlere bu şekilde devam edilirse;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-5} = p$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-4} = q$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-3} = r$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-2} = s$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n-1} = t$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n} = u$$

elde edilir.

b) $(p,q,r,s,t,u\,,p,q,r,s,t,u\,,\ldots)$, (4.9) denkleminin çözümü olduğu **a)** şıkkından açıktır ve çözüm 4 periyotludur.

c) (4.9) denkleminde $n=6n$ alınırsa $x_{6n+1} = \dfrac{x_{6n-5}}{1+x_{6n-2}}$ elde edilir. Denklemin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{6n-5}}{1+x_{6n-2}}$$

$p = \dfrac{p}{1+s}$ olup $p + ps = p$ den $p.s = 0$ olur.

(4.9) denkleminde $n = 6n+1$ alınırsa $x_{6n+2} = \dfrac{x_{6n-4}}{1+x_{6n-1}}$ elde edilir. Denklemin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{6n-4}}{1+x_{6n-1}}$$

$q = \dfrac{q}{1+t}$ olup $q + qt = q$ dan $q.t = 0$ olur.

(4.9) denkleminde $n = 6n+2$ alınırsa $x_{6n+3} = \dfrac{x_{6n-3}}{1+x_{6n}}$ elde edilir. Denklemin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{6n-3}}{1+x_{6n}}$$

$r = \dfrac{r}{1+u}$ olup $r + ru = r$ den $r.u = 0$ olur.

d) Eğer $n_0 \in N$ iken bütün $n \geq n_0$ için

$$x_{n+1} \leq x_{n-2} \tag{4.10}$$

(4.10) ifadesinde $n = 6n+1$ alınırsa $x_{6n+2} \leq x_{6n-1}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $q \leq t$ sonucu bulunur.

(4.10) da $n = 6n+2$ alınırsa $x_{6n+3} \leq x_{6n}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $r \leq u$ sonucu bulunur.

(4.10) da $n = 6n+3$ alınırsa $x_{6n+4} \leq x_{6n+1}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $s \leq p$ sonucu bulunur.

(4.10) da $n = 6n+4$ alınırsa $x_{6n+5} \leq x_{6n+2}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $t \leq q$ sonucu bulunur.

(4.10) da $n=6n+5$ alınırsa $x_{6n+6} \le x_{6n+3}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $u \le r$ sonucu elde edilir. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse,

(4.10) da $n=6n+6$ alınırsa $x_{6n+7} \le x_{6n+4}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $p \le s$ sonucu elde edilir. Bulunan bu sonuçlardan;

$$q \le t\,,\ r \le u\,,\ s \le p\,,\ t \le q\,,\ u \le r\,,\ p \le s \qquad (4.10a)$$

ifadesini yazarız.

$$x_{n+1} \le \frac{x_{n-5}}{1+x_{n+1}} \qquad (4.11)$$

(4.11) ifadesinde $n=6n+1$ alınırsa $x_{6n+2} \le \dfrac{x_{6n-4}}{1+x_{6n+2}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $q^2 \le 0$ sonucu bulunur.

(4.11) de $n=6n+2$ alınırsa $x_{6n+3} \le \dfrac{x_{6n-3}}{1+x_{6n+3}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $r^2 \le 0$ sonucu bulunur.

(4.11) de $n=6n+3$ alınırsa $x_{6n+4} \le \dfrac{x_{6n-2}}{1+x_{6n+4}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $s^2 \le 0$ sonucu bulunur.

(4.11) de $n=6n+4$ alınırsa $x_{6n+5} \le \dfrac{x_{6n-1}}{1+x_{6n+5}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $t^2 \le 0$ sonucu bulunur.

(4.11) de $n=6n+5$ alınırsa $x_{6n+6} \le \dfrac{x_{6n}}{1+x_{6n+6}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $u^2 \le 0$ sonucu elde edilir. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse,

(4.11) de $n=6n+6$ alınırsa $x_{6n+7} \le \dfrac{x_{6n+1}}{1+x_{6n+7}}$ olur, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa $p^2 \le 0$ sonucu elde edilir. Bulunan bu sonuçlardan;

$$q^2 \le 0\,,\ r^2 \le 0\,,\ s^2 \le 0\,,\ t^2 \le 0\,,\ u^2 \le 0\,,\ p^2 \le 0 \qquad (4.11a)$$

ifadesini yazarız. (4.10) eşitsizliği, (4.11) eşitsizliğini gerektirdiğinden bu eşitsizliklerin sonucu olan (4.10a) ve (4.11a) ifadeleri aşağıdaki gibi,

$$q \le t \quad q^2 \le 0$$

$$r \le u \quad r^2 \le 0$$

$$s \le p \quad s^2 \le 0$$

$$t \le q \quad t^2 \le 0$$

$$u \le r \quad u^2 \le 0$$

$$p \le s \quad p^2 \le 0$$

yazılabilir. Buradan da $p \le s \le p$, $q \le t \le q$ ve $r \le u \le r$ bulunur bu da aranılan sonuçtur.

e) (4.9) denkleminin her iki tarafından x_{n-5} çıkartılırsa;

$$x_{n+1} - x_{n-5} = \frac{1}{1 + x_{n-2}}(x_{n-2} - x_{n-8})$$

elde edilir. n = 0,1,… değerleri için aşağıdaki denklemler;

$n = 0$ için $\quad x_1 - x_{-5} = \dfrac{1}{1 + x_{-2}}(x_{-2} - x_{-8}) = (x_1 - x_{-5})$

$n = 1$ için $\quad x_2 - x_{-4} = \dfrac{1}{1 + x_{-1}}(x_{-1} - x_{-7}) = (x_2 - x_{-4})$

$n = 2$ için $\quad x_3 - x_{-3} = \dfrac{1}{1 + x_0}(x_0 - x_{-6}) = (x_3 - x_{-3})$

$n = 3$ için $\quad x_4 - x_{-2} = \dfrac{1}{1 + x_1}(x_1 - x_{-5})$

$n = 4$ için $\quad x_5 - x_{-1} = \dfrac{1}{1 + x_2}(x_2 - x_{-4})$

$n = 5$ için $\quad x_6 - x_0 = \dfrac{1}{1 + x_3}(x_3 - x_{-3})$

$n = 6$ için $\quad x_7 - x_1 = \dfrac{1}{1 + x_1}(x_4 - x_{-2}) = \dfrac{1}{1 + x_1}\dfrac{1}{1 + x_4}(x_1 - x_{-5})$

$n=7$ için $\quad x_8 - x_2 = \dfrac{1}{1+x_5}(x_5 - x_{-1}) = \dfrac{1}{1+x_2}\dfrac{1}{1+x_5}(x_2 - x_{-4})$

$n=8$ için $\quad x_9 - x_3 = \dfrac{1}{1+x_6}(x_6 - x_0) = \dfrac{1}{1+x_3}\dfrac{1}{1+x_6}(x_3 - x_{-3})$

$$\vdots$$

bulunur. Bulunan bu denklemler taraf tarafa toplanırsa; $n \geq 3$ ve $n = 0,1,...$ için

$$\left.\begin{aligned} x_{3n-8} - x_{3n-14} &= (x_1 - x_{-5})\prod_{i=1}^{n-3}\frac{1}{1+x_{3i-2}} \\ x_{3n-7} - x_{3n-13} &= (x_2 - x_{-4})\prod_{i=1}^{n-3}\frac{1}{1+x_{3i-1}} \\ x_{3n-6} - x_{3n-12} &= (x_3 - x_{-3})\prod_{i=1}^{n-3}\frac{1}{1+x_{3i}} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) denklemi incelendiğinde aşağıdaki formüller;

$$x_{6n+1} - x_{-5} = (x_1 - x_{-5})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-2}}$$

$$x_{6n+2} - x_{-4} = (x_2 - x_{-4})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-1}}$$

$$x_{6n+3} - x_{-3} = (x_3 - x_{-3})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i}}$$

$$x_{6n+4} - x_{-2} = (x_1 - x_{-5})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-2}}$$

$$x_{6n+5} - x_{-1} = (x_2 - x_{-4})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-1}}$$

$$x_{6n+6} - x_0 = (x_3 - x_{-3})\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i}}$$

elde edilir. Yukarıdaki formüller düzenlenirse,

$$x_{6n+1} = x_{-5}\Big(1 - \frac{x_{-2}}{1+x_{-2}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-2}}\Big)$$

$$x_{6n+2} = x_{-4}\Big(1 - \frac{x_{-1}}{1+x_{-1}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-1}}\Big)$$

$$x_{6n+3} = x_{-3}(1 - \frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i}})$$

$$x_{6n+4} = x_{-2}(1 - \frac{x_{-5}}{1+x_{-2}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-2}})$$

$$x_{6n+5} = x_{-1}(1 - \frac{x_{-4}}{1+x_{-1}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-1}})$$

$$x_{6n+6} = x_0(1 - \frac{x_{-3}}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i}})$$

elde edilir.

f) $p = s = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+1} = \lim_{n\to\infty} x_{-5}(1 - \frac{x_{-2}}{1+x_{-2}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-2}})$$

$$p = x_{-5}(1 - \frac{x_{-2}}{1+x_{-2}}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-2}})$$

olur. $p = 0$ ise

$$\frac{1+x_{-2}}{x_{-2}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-2}} \tag{4.13}$$

bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+4} = \lim_{n\to\infty} x_{-2}(1 - \frac{x_{-5}}{1+x_{-2}}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-2}})$$

$$s = x_{-2}(1 - \frac{x_{-5}}{1+x_{-2}}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-2}})$$

olur. $s = 0$ ise

$$\frac{1+x_{-2}}{x_{-5}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-2}} \tag{4.14}$$

bulunur. (4.13) ve (4.14) denklemlerinden;

$$\frac{1+x_{-2}}{x_{-2}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i-2}} > \frac{1+x_{-2}}{x_{-5}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i-2}}$$

$$\frac{1+x_{-2}}{x_{-2}} > \frac{1+x_{-2}}{x_{-5}}$$

$$\frac{1}{x_{-2}} > \frac{1}{x_{-5}}$$

$$x_{-5} > x_{-2}$$

olur. Böylece $x_{-5} > x_{-2}$ elde edilir. Buda kabulümüzle çelişir.

$q = t = 0$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+2} = \lim_{n\to\infty} x_{-4}(1 - \frac{x_{-1}}{1+x_{-1}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{3i-1}})$$

$$q = x_{-4}(1 - \frac{x_{-1}}{1+x_{-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{3i-1}})$$

olur. $q = 0$ ise

$$\frac{1+x_{-1}}{x_{-1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{3i-1}} \tag{4.15}$$

bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+5} = \lim_{n\to\infty} x_{-1}(1 - \frac{x_{-4}}{1+x_{-1}} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{3i-1}})$$

$$t = x_{-1}(1 - \frac{x_{-4}}{1+x_{-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{3i-1}})$$

olur. $t = 0$ ise

$$\frac{1+x_{-1}}{x_{-4}} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{3i-1}} \tag{4.16}$$

bulunur. (4.15) ve (4.16) denklemlerinden;

$$\frac{1+x_{-1}}{x_{-1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_{3i-1}} > \frac{1+x_{-1}}{x_{-4}} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{2j+1} \frac{1}{1+x_{3i-1}}$$

$$\frac{1+x_{-1}}{x_{-1}} > \frac{1+x_{-1}}{x_{-4}}$$

$$\frac{1}{x_{-1}} > \frac{1}{x_{-4}}$$

$$x_{-4} > x_{-1}$$

olur. Böylece $x_{-4} > x_{-1}$ elde edilir. Buda kabulümüzle çelişir.

$r = u = 0$ olduğu kabul edilsin.

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+3} = \lim_{n\to\infty} x_{-3}(1 - \frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i}})$$

$$r = x_{-3}(1 - \frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i}})$$

olur. $r = 0$ ise

$$\frac{1+x_0}{x_0} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i}} \tag{4.17}$$

bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse;

$$\lim_{n\to\infty} x_{6n+6} = \lim_{n\to\infty} x_0(1 - \frac{x_{-3}}{1+x_0}\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i}})$$

$$u = x_0(1 - \frac{x_{-3}}{1+x_0}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i}})$$

olur. $u = 0$ ise

$$\frac{1+x_0}{x_{-3}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i}} \tag{4.18}$$

bulunur. (4.17) ve (4.18) denklemlerinden;

$$\frac{1+x_0}{x_0} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_{3i}} > \frac{1+x_0}{x_{-3}} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j+1}\frac{1}{1+x_{3i}}$$

$$\frac{1+x_0}{x_0} > \frac{1+x_0}{x_{-3}}$$

$$\frac{1}{x_0} > \frac{1}{x_{-3}}$$

$$x_{-3} > x_0$$

olur. Böylece $x_{-3} > x_0$ elde edilir. Buda kabulümüzle çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 4.2. Yukarıda çözümü Örnek 4.1. de incelenen (4.9) denkleminde; başlangıç şartları

$$x_{-5} = 0{,}3,\ x_{-4} = 0{,}004,\ x_{-3} = 0{,}05, x_{-2} = 0{,}006, x_{-1} = 0{,}0007, x_0 = 0{,}008$$

olmak üzere, denklemin nümerik sonuçları aşağıda verilmiştir.

$x_1 = 0.2982107356$	$x_{31} = 0.2938660574$
$x_2 = 0.003997201959$	$x_{32} = 0.003983406456$
$x_3 = 0.04960317460$	$x_{33} = 0.04791634323$
$x_4 = 0.004621745787$	$x_{34} = 0.001268194583$
$x_5 = 0.0006972130984$	$x_{35} = 0.0006834724031$
$x_6 = 0.007621928163$	$x_{36} = 0.006013261698$
$x_7 = 0.2968388220$	$x_{37} = 0.2934938500$
$x_8 = 0.003994417000$	$x_{38} = 0.003980685769$
$x_9 = 0.04922796261$	$x_{39} = 0.04762993197$
$x_{10} = 0.003563855206$	$x_{40} = 0.0009804411385$
$x_{11} = 0.0006944392186$	$x_{41} = 0.0006807625013$
$x_{12} = 0.007264320464$	$x_{42} = 0.005739871986$
$x_{13} = 0.2957846883$	$x_{43} = 0.2932063784$
$x_{14} = 0.003991645046$	$x_{44} = 0.003977977709$
$x_{15} = 0.04887293398$	$x_{45} = 0.04735810252$
$x_{16} = 0.002750345207$	$x_{46} = 0.0007581474660$
$x_{17} = 0.0006916782844$	$x_{47} = 0.0006780651730$
$x_{18} = 0.006925834606$	$x_{48} = 0.005480333775$
$x_{19} = 0.2949734097$	$x_{49} = 0.2929842533$
$x_{20} = 0.003988886021$	$x_{50} = 0.003975282209$
$x_{21} = 0.04853677628$	$x_{51} = 0.04709997890$
$x_{22} = 0.002123862302$	$x_{52} = 0.0005863547559$
$x_{23} = 0.0006889302203$	$x_{53} = 0.0006753803457$
$x_{24} = 0.006605237665$	$x_{54} = 0.005233820920$
$x_{25} = 0.2943482546$	$x_{55} = 0.2928125612$
$x_{26} = 0.003986139850$	$x_{56} = 0.003972599195$
$x_{27} = 0.04821828304$	$x_{57} = 0.04685474953$
$x_{28} = 0.001640873925$	$x_{58} = 0.0004535497052$
$x_{29} = 0.0006861949512$	$x_{59} = 0.0006727079468$
$x_{30} = 0.006301395208$	$x_{60} = 0.004999567438$

(4.9) denkleminden elde edilen nümerik çözümlere **c)** şıkkı uygulanırsa; yani $u_1 = x_1.x_4$, $u_2 = x_2.x_5$, $u_3 = x_3.x_6$, $u_4 = x_7.x_{10}$,... işlemlere bu şekilde devam edildiğinde aşağıdaki sonuçlar:

$$
\begin{array}{ll}
u_1 = 0.001378254211 & u_{11} = 0.2771954867\,10^{-5} \\
u_2 = 0.2786901563\,10^{-5} & u_{12} = 0.00035502866544 \\
u_3 = 0.0003780718335 & u_{13} = 0.0008135099998 \\
u_4 = 0.001371913575 & u_{14} = 0.2760934197\,10^{-5} \\
u_5 = 0.2784959853\,10^{-5} & u_{15} = 0.0003384858575 \\
u_6 = 0.0003752119946 & u_{16} = 0.0008112787036 \\
u_7 = 0.001057890581 & u_{17} = 0.2759025840\,10^{-5} \\
u_8 = 0.2773879820\,10^{-5} & u_{18} = 0.0003361576848 \\
u_9 = 0.0003576076962 & u_{19} = 0.0006264829050 \\
u_{10} = 0.001054133801 & u_{20} = 0.2748064125\,10^{-5}
\end{array}
$$

elde edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sıfırdan farklı reel sayılar olan x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için $x_{n+1} = \max\left\{\dfrac{1}{x_{n-2}}, x_{n-2}\right\}$ maksimumlu fark denklemi tanımlanmış, çözümleri incelenmiş, farklı durumlar için genel çözümler elde edilmiş ve periyodikliği incelenmiştir. Bu fark denkleminde, birinci kısım ve ikinci kısım farklı katsayılarla çarpılarak oluşturulacak yeni fark denklemlerinin çözümleri ve periyodikliği incelenebilir. Aynı zamanda maksimumlu fark denklemi genelleştirilerek çözümü ve periyodikliği incelenebilir.

Ayrıca yine bu çalışmada, $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, ..., x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ ve $k = 0,1,2,...$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-(2k+1)}}{1 + x_{n-k}}$ fark denklemi için bir teorem verilmiş, çözümü ve periyodikliği incelenmiştir. Denklemin katsayıları reel sayılar, dizi veya fonksiyon alınarak yeni denklemler tanımlanabilir ve çözümleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abu-Saris, R. M. and Devault, R., 2003, Global stability of $y_{n+1} = \mathrm{A} + \dfrac{y_n}{y_{n-k}}$, *Applied Mathematics Letters*, 16, 173-178.

Abu-Saris, R. M. and Al-Jubouri, N.K., 2004, Characterization of rational periodic sequences II, *Journal of Difference Equations and Applications,* 10, 4, 409-418.

Abu-Saris, R. M., 2006, A note on the attractivity of period-four solutions of third-order rational difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications,* 12, 2, 233-235.

Amleh, A. M., 1998, Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Amleh, A. M., Hoag, J. and Ladas, G., 1998, A difference equation with eventually periodic solutions, *Computers & Mathematics with Applications*, 36, 401-404.

Berenhaut, K. S. and Stevic, S., 2005, A note on the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n-3} x_{n-4}}$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 11, 14, 1225-1228.

Berenhaut, K. S., Dice, J. E., Foley, J. D. and Stevic, S., 2006, Periodic solutions of the rational difference equation $y_n = \dfrac{y_{n-3} + y_{n-4}}{y_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications,* 12, 2, 183-189.

Camouzis, E. and Devault, R., 2001, Asymptotic behavior of solutions of $x_{n+1} = \mathrm{p} + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$, *Journal of Difference Equation Aplications*, 7, 477-482.

Çinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 150, 21-24.

Çinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-1}}{1 + bx_{n-1}x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 156, 587-590.

Çinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + ax_{n-1}x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 158, 929-932.

Çinar, C., Stevic, S. and Yalçınkaya, İ., 2005, On positive solutions of reciprocal difference equation with minimum, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 17(1-2), 307-314.

Devault, R., Ladas, G. and Schultz, W., 1998, On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{x_n}} + \dfrac{1}{x_{n-2}}$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126, 11, 3257-3261.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S., 2004, On asymptotic behaviour of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 163-167.

Feuer, J., 2003, Periodic solutions of the Lyness max equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 147-160.

Hamza, A. E., 2005, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1} / x_n$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (in press).

Janowski, E. J., Kocic, V. L., Ladas, G. and Tzanetopoulos, G., 1998, Global behaviour of solutions of $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 297-310.

Mestel, B.D., 2003, On globally periodic solutions of the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{x_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9, 2, 201-209.

Mishev, D. P., Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, A reciprocal difference equation with maximum, *Computers & Mathematics with Applications*, 43, 1021-1026.

Papaschinopoulos, G. and Hatzifilippidis, V., 2001, On a max difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 258, 258-268.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., 2003, Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 5, 2, 237-247.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, J., 2005, On a (k+1)-th order difference equation with a coefficient of period k+1, *Journal of Difference Equation and Applications*, 11, 5, 215-225.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, On the oscillation and periodiccharacter of a third order rational difference equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 3, 905-909.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2004, On a max type recursive relation with periodic coefficients, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 3, 329-338.

Saleh, M. and Aloqeili, M., 2005, On the rational difference equation $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).

Simsek, D., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2006, On the solution of the difference equation $x_{n+1} = \max\left\{ \frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1} \right\}$, *Int. J. Math. Sci.*, 1, 10, 481-487.

Stevic, S., 2002, On the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{g(x_n)}$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6(3), 405-414.

Stevic, S., 2004, More on the difference equation $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}$, *Applied Mathematics E Notes*, 4, 80-84.

Stevic, S., 2004, A note on periodic chareter of a difference equation , *Journal of Difference Equations and Aplications*, 10,10, 929-932.

Stevic, S., 2005, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 18(1-2), 229-234.

Taixiang, S., 2005, On non-oscillatory solutions of the recursive sequence $x_{n+1} = p + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$ the periodic character of some difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 6, 483-485.

Teixeria, C. T., 2000, Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Valicenti, S., 1999, Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Voulov, H. D., 2002, On the periodic character of some difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8, 799-810.

Voulov, H. D., 2002, Periodic solutions to a difference equation with maximum, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 2155-2160.

Yan, X., Li, W. and Zhao, Z., 2005, On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha - \frac{x_n}{x_{n-1}}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17(1-2), 269-282.

Yan, X., Liao, X. and Li, C., 2006, On a difference equation with maximum, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).