T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR GRAFIN UZAKLIK ENERJİSİ VE UZAKLIK ESTRADA İNDEKSİ İÇİN SINIRLAR

ŞERİFE BURCU BOZKURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA, 2009

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR GRAFIN UZAKLIK ENERJİSİ VE UZAKLIK ESTRADA İNDEKSİ İÇİN SINIRLAR

ŞERİFE BURCU BOZKURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA, 2009

Bu tez 14/08/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT	Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK	Yrd. Doç. Dr. A. Dilek GÜNGÖR
(Jüri Başkanı)	(Jüri Üyesi)	(Danışman)

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR GRAFIN UZAKLIK ENERJİSİ VE UZAKLIK ESTRADA İNDEKSİ İÇİN SINIRLAR

Şerife Burcu BOZKURT

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. A. Dilek GÜNGÖR
2009, 38 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Dr. A. Dilek GÜNGÖR

Bu çalışma basit bağlantılı bir grafın uzaklık enerjisine ve uzaklık Estrada indeksine sınırlar bulmak için hazırlanmıştır. İlk olarak, bir grafın uzaklık enerjisi için sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra, bir grafın uzaklık Estrada indeksi tanımlanmış ve bu indeks için bazı sınırlar elde edilmiştir.

Burada elde edilen sonuçlar Tablo 2.1 ve Tablo 3.1 de sunulmuştur. Ayrıca bu tablolarda verilen sınırlar üzerine gerekli değerlendirmeler dördüncü bölümde yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Grafın Uzaklık Enerjisi, Grafın Uzaklık Estrada İndeksi.

ABSTRACT

Mc. S. Thesis

BOUNDS FOR THE DISTANCE ENERGY AND THE DISTANCE ESTRADA INDEX OF A GRAPH

Şerife Burcu BOZKURT

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. A. Dilek GÜNGÖR

2009, 38 Page

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK
Assist. Prof. Dr. A. Dilek GÜNGÖR

This study is prepared to find bounds for the distance energy and the distance Estrada index of a simple connected graph. It has been first obtained bounds for the distance energy of a graph. Later, the distance Estrada index of a graph has been defined and some bounds for this index have been obtained.

The results obtained in this thesis have been presented in Table 2.1 and Table 3.1. As a final section, there have been given some evaluations over these bounds that depicted in tables.

Key Words: Distance Energy of Graph, Distance Estrada Index of Graph.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Yrd. Doç. Dr. A. Dilek GÜNGÖR yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ilk olarak konuların öneminden bahsedilmiş ve çalışmamızda yararlanacağımız temel tanım ve teoremlerle birlikte literatür hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, basit bağlantılı bir grafın uzaklık enerjisi için sınırlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, basit bağlantılı bir grafın uzaklık Estrada indeksi tanımlanmış ve bu indeks için bazı sınırlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Çalışma süresince bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. A. Dilek GÜNGÖR'e, desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Şerife Burcu BOZKURT

KONYA, 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$M_{m,n}$	$m\times n$ tipindeki matrislerin kümesi
M_n	$n\times n$ tipindeki matrislerin kümesi
E_π	π-elektronların toplam enerjisi
G	Herhangi bir graf
$V(G)= v_1,v_2,\ldots,v_n$	G grafının nokta kümesi
$G[V_i]$	G grafının $i.$ bileşeni
$G_1 \vee G_2$	G_1 ve G_2 graflarının birleşimi
K_n	n noktalı tam graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
$K_{1,n}$	Star graf
T	Ağaç
d_i	Grafın v_i noktasının derecesi
$d_1,d_2,\ldots,d_n$	Grafın derece dizisi
$Z(G)$	G grafının ilk Zagreb indeksi
$D(G)$	G grafının nokta derecelerinin köşegen matrisi
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
λ_i	$A(G)$ nin $i.$ özdeğeri
$L(G)$	G grafının Laplacian matrisi
σ_i	$L(G)$ nin $i.$ özdeğeri
D	G grafının uzaklık matrisi
μ_i	D nin $i.$ özdeğeri
D_i	Grafın v_i noktasının uzaklık derecesi
$D_1,D_2,\ldots,D_n$	Grafın uzaklık derece dizisi
T_i	Grafın v_i noktasının ikinci uzaklık derecesi
$T_1,T_2,\ldots,T_n$	Grafın ikinci uzaklık derece dizisi

$çap(G)$	G grafının çapı
$\det D(T)$	T ağacının uzaklık matrisinin determinantı
$E(G)$	G grafının enerjisi
$EE(G)$	G grafının Estrada indeksi
$E_D(T)$	T ağacının uzaklık enerjisi
$LE(G)$	G grafının Laplacian enerjisi
$LEE(G)$	G grafının Laplacian Estrada indeksi
$E_D(G)$	G grafının uzaklık enerjisi
$DEE(G)$	G grafının uzaklık Estrada indeksi

1. GİRİŞ

Graf teori daha çok çizgi kuramı olarak bilinen, 1736 yılında ünlü matematikçi Leonhard Euler tarafından Königsberg köprüleri için bulduğu çözüm yöntemi sayesinde ortaya çıkan bir matematik dalıdır. 1736 yıllarında ortaya çıkan bir matematik dalı olmasına rağmen ancak 20. yüzyılda büyük bir gelişme gösterebilmiştir. Bu gelişmenin en önemli nedenleri graf teorinin fizik, kimya, iletişim bilimleri, genetik ve sosyoloji gibi bilim dallarına uygulanabilmesi ve teorik bilgisayar bilimlerindeki karmaşık problemlerin graf teorik problemlere dönüştürülebilmesidir. Bunların yanı sıra grup teori, matris teori, olasılık ve topoloji gibi matematiğin diğer bilim dalları ile ortak sahalarının olması da graf teorinin önemini artırmaktadır.

Graf teorinin en önemli alt dallarından biri spektral graf teoridir. Spektral graf teori, bilgisayar bilimleri, kimya ve kodlama teorisi gibi birçok alanda uygulanabilir olması açısından discrete matematiğin önemli bir parçasıdır. Bu alanda grafın bazı matrislerinin özdeğerleri ve özvektörleri üzerine çalışılır. Bu çalışmada en önemli amaç grafın matrislerinden elde edilen spektral bilgiler vasıtasıyla grafın belli başlı özellikleri hakkında bilgi edinmektir.

Bir grafın enerjisi ve Estrada indeksi parametreleri grafın özdeğerlerini ihtiva ettiğinden bu konular spektral graf teori alanına girmektedir. Bu parametreler kimyada çok önemli olup, şimdi bunların öneminden biraz bahsedelim.

İlk olarak bir grafta enerji kavramının çıkış noktasını ve önemini verelim.

G grafı, n noktalı bir graf ve G nin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ olsun. Bu takdirde G nin enerjisi [10]

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanım 1978 yılında Ivan Gutman tarafından ortaya atılmış bir tanım olup teorik kimyadaki sonuçlardan esinlenilerek graf teoriye kazandırılmıştır.

Bir bileşiğin moleküler grafı, noktaları bileşiğin atomları ve kenarları da bileşiğin atomları arasındaki bağları olan graf olmak üzere, Hückel moleküler yörünge teori olarak bilinen birleşik hidrokarbonlardaki $\pi-$elektronların toplam enerjisi

$$E_\pi = n\alpha + 2\beta\sum_{i=1}^{n/2}\lambda_i$$

biçimindedir. (α ve β sabitler ve özdeğerler bileşiğin moleküler grafının özdeğerleridir.) Yukarıdaki tanımda $2\sum_{i=1}^{n/2}\lambda_i$ toplamı E_π için trivial olmayan kısım olup $\lambda_{n/2} \geq 0 \geq \lambda_{n/2+1}$ şartı sağlandığında bu toplam grafın enerjisine indirgenmiş olur.

1978 de Ivan Gutman bir grafın enerjisi kavramını ortaya attığında matematikçilerin bunu ilginç bulacağını ve araştırmaya başlayacağını düşünmüştür. Ancak beklenildiği gibi olmamış ve yazar dışında 1998 li yıllara kadar kimse grafın enerjisi üzerine bir çalışma yapmamıştır. Bu durum 20. yüzyılın sonunda değişmiş ve grafın enerjisi birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Literatüre bakıldığında 2001 yılı ve sonrasında grafın enerjisi üzerine 150 den fazla çalışma yapıldığı görülmektedir.

Grafın enerjisinin son yıllarda popüler bir konu olmasından dolayı bu tanıma benzer tanımlar ortaya çıkmıştır. Bu tanımlardan başlıcaları grafın Laplacian enerjisi ve grafın uzaklık enerjisi tanımlarıdır.

Şimdi bir grafta Estrada indeks kavramının çıkış noktasını ve önemini verelim.

G grafı, n noktalı bir (moleküler) graf ve G nin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ olsun. Bu takdirde G nin Estrada indeksi [8]

$$EE(G) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanım Ernesto Estrada tarafından 2000 yılında organik moleküllerin 3D yapılarının belirli özelliklerini temsil edebilen yeni bir yapı tanımlayıcı olarak verilmiştir. Özellikle de proteinlerin ve diğer uzun zincirli biyopolimerlerin bağ derecelerinin karakterizasyonunda kullanılmıştır.

Ayrıca Estrada indeksin biyokimya ve kompleks network teoride de uygulamalarının olduğu bilinmektedir.

Bir grafın Estrada indeksi son yıllarda çalışılmakta olan bir konu olup birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Ayrıca bir grafın Laplacian Estrada indeksi tanımlanmış ve bunun üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Şimdi çalışmamızla ilgili literatür hakkında bilgiler verelim.

H. S. Ramane ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, n noktalı bir G grafının uzaklık enerjisi için bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

H. S. Ramane ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, n noktalı bir T ağacının uzaklık enerjisi için bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

G. Indulal ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, n noktalı ve çapı ikiyi geçmeyen bir G grafının uzaklık enerjisi için bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

G. Indulal (2009) çalışmasında, uzaklık derece dizisi $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ve ikinci uzaklık derece dizisi $T_1, T_2, \ldots, T_n$ olan n noktalı bir G grafının uzaklık enerjisi için bu değerlerin kareleri toplamını ihtiva eden bir üst sınır elde etmiştir.

J. A. De La Pena ve arkadaşları (2007) çalışmalarında, n noktalı, m kenarlı bir G grafının Estrada indeksi için nokta sayısını ve kenar sayısını ihtiva eden bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca Estrada indeks için grafın enerjisini de ihtiva eden bazı üst sınırlar vermişlerdir.

I. Gutman (2008) çalışmasında, n noktalı, m kenarlı bir G grafının Estrada indeksi için nokta sayısını ve kenar sayısını ihtiva eden bazı alt sınırlar elde etmiştir.

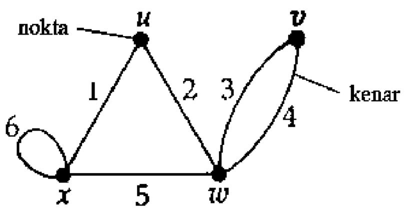
B. Zhou ve I. Gutman (2008) çalışmalarında, n noktalı, m kenarlı ve derece dizisi $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ olan bir G grafının Laplacian Estrada indeksi için nokta sayısını, kenar sayısını ve grafın ilk Zagreb indeksi olan $Z(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$ yi ihtiva eden bazı alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

Şimdi bu çalışmada yararlanılacak bazı temel kavram (örnekleri ile birlikte) ve teoremleri verelim. Detaylı bilgiler için [1, 4, 5, 8-11,15,16,18] referanslarına bakılabilir.

1.1. Graf Tanımı

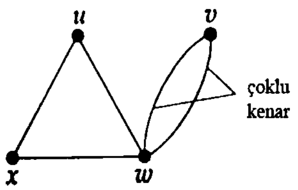
Bir *graf* noktalar ve kenarlar olarak bilinen elemanların kümesinden oluşur. Her bir kenar iki noktayı birleştirir.

Şimdi 4 noktalı ve 6 kenarlı bir graf örneği verelim.

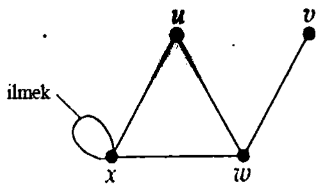


Bir grafta aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar* denir. Bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara *ilmek* denir. Çoklu kenar ya da ilmeği olmayan grafa ise *basit graf* denir.

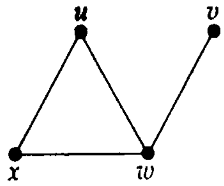
Aşağıda çoklu kenar, ilmek ve basit graf örnekleri verilmiştir.



(a)



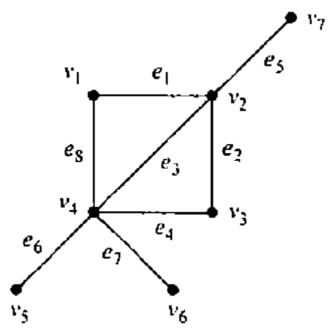
(b)

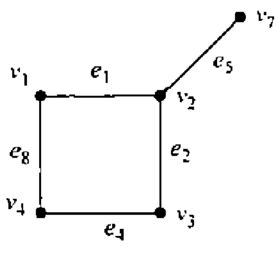


basit graf (c)

Herhangi bir G grafı verilsin. Nokta kümesi G nin nokta kümesinin alt kümesi ve kenar kümesi de G nin kenar kümesinin alt kümesi olan grafa G nin bir alt grafı denir.

Aşağıda bir G grafı ve G nin bir alt grafı verilmiştir.



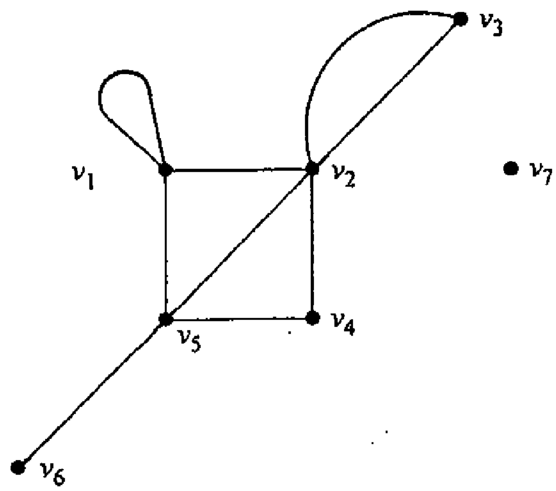


G grafı

G nin alt grafı

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ olan bir graf olmak üzere v_i ve v_j noktaları kenar oluşturuyor ise bu noktalara *komşudur* denir ve $v_i \sim v_j$ şeklinde gösterilir. Aksi takdirde *komşu değildir* denir ve $v_i \nsim v_j$ şeklinde gösterilir. Herhangi bir v_i noktasının derecesi v_i ye komşu olan noktaların sayısı olup d_i ile gösterilir. Derecesi 0 (sıfır) olan noktaya *izole nokta* ve derecesi 1 (bir) olan noktaya ise *pendant nokta* denir.

Aşağıdaki grafta, v_4 noktası v_2 ve v_5 noktaları ile komşudur fakat diğer noktalarla komşu değildir. Bu grafın noktalarının dereceleri $d_1=4$, $d_2=5$, $d_3=2$, $d_4=2$, $d_5=4$, $d_6=1$ ve $d_7=0$ olup v_7 izole bir nokta ve v_6 pendant bir noktadır.



Ayrıca bir grafın noktalarının derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katı olup, tek dereceli noktaların sayısı da çifttir.

1.2. Yol ve Bağlantılılık

Şimdi bir grafta yol ve bağlantılılık kavramları ile ilgili tanımları verelim.

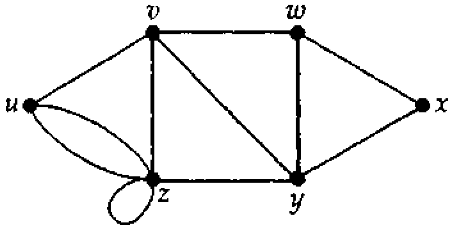
Bir G grafının nokta kümesi $V(G)=\{u,v,w,x,\dots,y,z\}$ olsun. Ardı ardına k kenarın dizilmesiyle elde edilen

$$\underbrace{uv, vw, wx, \dots, yz}_{k}$$

formuna G de k uzunluğunda bir *yürüme* denir. Bu şekildeki bir yürüme $uvwx\dots yz$ şeklinde gösterilir.

Herhangi bir G grafında; aynı noktada başlayan ve biten bir yürümeye G de bir *kapalı yürüme*, bütün noktaları ve kenarları birbirinden farklı olan yürümeye G de bir *yol* ve bütün kenarları, başlangıç ve bitiş noktaları hariç bütün noktaları farklı olan kapalı bir yürümeye ise G de bir *devir* denir.

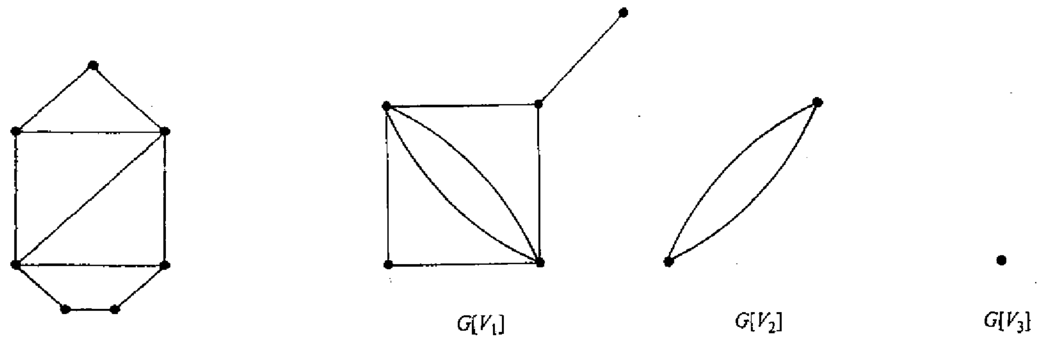
Aşağıdaki gibi bir graf verilsin.



Bu grafta $uvwxywvzzy$ 9 uzunluğunda bir yürüme, $vywxyzv$ kapalı bir yürüme, $vwxyz$ bir yol ve $vwxyzv$ bir devirdir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin v_i ve v_j noktaları arasında bir yol varsa bu takdirde bu *noktalara bağlantılıdır* denir. Bağlantılılık bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $V_1,V_2,\ldots,V_r$ denklik sınıfları olmak üzere $G[V_1],G[V_2],\ldots,G[V_r]$ alt graflarına G nin *bileşenleri* denir. $r=1$ olması durumunda *graf bağlantılıdır*, aksi takdirde r bileşene sahip *bağlantısız bir graftır*.

Aşağıdaki G_1 grafı bağlantılı, G_2 grafı ise $G[V_1],G[V_2]$ ve $G[V_3]$ bileşenleri ile bağlantısız bir graftır.



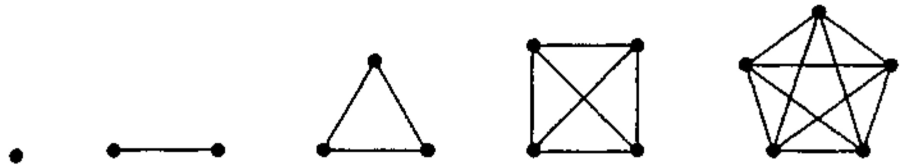
G_1 G_2

1.3. Özel Graflar

Şimdi çalışmamızda adı geçen bazı özel grafların tanımlarını verelim.

Her bir nokta çifti birbirine komşu olan G grafına bir *tam graf* denir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir.

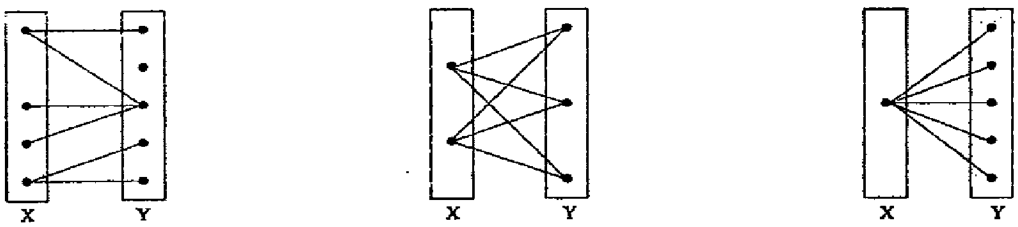
Aşağıda bazı tam graf örnekleri verilmiştir.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Nokta kümesi X ve Y gibi iki alt kümeye ayrılmış olan ve kenarları da X deki bir noktayla Y deki bir noktanın birleştirilmesiyle elde edilen, G grafına *iki parçalı graf* ve (X,Y) ikilisine de G nin parçaları denir. Ayrıca, $|X| = p$ ve $|Y| = q$ olacak şekildeki *iki parçalı tam graf* $K_{p,q}$ ile gösterilir. Özel olarak $K_{1,q}$ grafına da *star graf* denir.

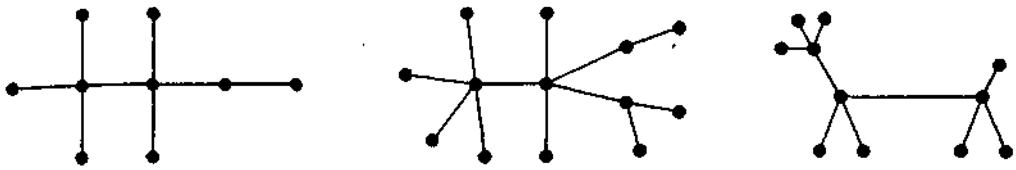
Aşağıda iki parçalı graf, iki parçalı tam graf ve star graf örnekleri verilmiştir.



İki parçalı graf $K_{2,3}$ **grafı** $K_{1,5}$ star grafı

Hiç deviri olmayan bağlatılı grafa *ağaç* denir.

Şimdi bazı ağaç örnekleri verelim.



T_1 T_2 T_3

1.4. Komşuluk, Laplacian ve Uzaklık Matrisleri

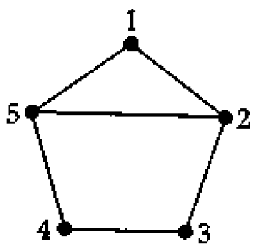
Şimdi çalışmamızda kullandığımız basit bir grafın komşuluk, Laplacian ve uzaklık matrislerinin tanımlarını verip, bu tanımları bir örnek üzerinde anlamaya çalışalım.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin *komşuluk matrisi*

$$A(G)=[a_{ij}]=\begin{cases}1 & , v_i \sim v_j \\ 0 & , \text{aksi takdirde}\end{cases}$$

olacak şekilde $n\times n$ simetrik bir matristir.

Aşağıdaki gibi bir graf verilsin.



Şekil 1.4.1

Bu takdirde bu grafın komşuluk matrisi,

$$A(G)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

olur.

G grafı, n noktalı bir graf olsun. G nin *Laplacian matrisi* $L(G)=D(G)-A(G)$ olacak şekilde $n\times n$ simetrik bir matristir. Burada $D(G)$ grafın nokta derecelerinin köşegen matrisi ve $A(G)$ grafın komşuluk matrisidir.

Şekil 1.4.1 deki grafı göz önüne alalım. Bu grafın noktalarının dereceleri

$$d_1=2,\ d_2=3,\ d_3=2,\ d_4=2 \text{ ve } d_5=3$$

olup nokta derecelerin köşegen matrisi,

$$D(G)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece Laplacian matris,

$$L(G)=D(G)-A(G)=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin herhangi v_i ve v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu, bu noktalar arasındaki uzaklık olup d_{ij} ile gösterilir. Bu takdirde, G nin *uzaklık matrisi,* $D=[d_{ij}]$ olacak şekilde $n\times n$ simetrik bir matristir.

Şekil 1.4.1 deki grafı göz önüne alalım. Bu grafın uzaklık matrisi,

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

1.5. Graf Parametreleri

Şimdi çalışmamızda sıkça kullanacağımız bir grafın bazı matrislerinin enerjisi, Estrada indeksi ve bir grafın çapı tanımlarını verelim.

G grafı, komşuluk matrisi $A(G)$ olan bir graf olsun. Bu takdirde $A(G)$ nin özdeğerlerine G *grafının özdeğerleri* denir.

G grafı, n noktalı bir graf ve G nin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olsun. Bu takdirde G *grafının enerjisi*

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

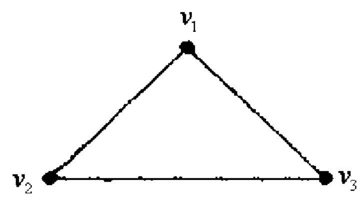
biçiminde tanımlanır.

G grafı, n noktalı bir graf ve G nin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olmak üzere G *grafının Estrada indeksi*

$$EE(G) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıdaki $G = K_3$ tam grafını göz önüne alalım.



Şekil 1.5.1

Bu grafın komşuluk matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri,

$$\lambda_1 = 2 \text{ ve } \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

dir. Böylece bu grafın enerjisi ve Estrada indeksi sırasıyla,

$$E(G)=\sum_{i=1}^{3}|\lambda_i|=4 \text{ ve } EE(G)=\sum_{i=1}^{n}e^{\lambda_i}\cong 8.12481$$

olarak elde edilir.

G grafı, Laplacian matrisi $L(G)$ olan bir graf olsun. Bu takdirde $L(G)$ nin özdeğerlerine G *grafının Laplacian özdeğerleri* denir.

G grafı, n noktalı, m kenarlı bir graf ve G nin Laplacian özdeğerleri $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ olsun. Bu takdirde G *grafının Laplacian enerjisi*

$$LE(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\sigma_i-\frac{2m}{n}\right|$$

biçiminde tanımlanır.

G grafı, n noktalı bir graf ve G nin Laplacian özdeğerleri $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ olmak üzere, G *grafının Laplacian Estrada indeksi*

$$LEE(G)=\sum_{i=1}^{n}e^{\sigma_i}$$

biçiminde tanımlanır.

Şekil 1.5.1 deki $G=K_3$ tam grafını göz önüne alalım. Bu grafın Laplacian matrisi,

$$L(G)=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

olup, Laplacian özdeğerleri,

$$\sigma_1=\sigma_2=3 \text{ ve } \sigma_3=0$$

dir. Ayrıca bu grafın nokta sayısı ve kenar sayısı sırasıyla $n=3$ ve $m=3$ olmak üzere, Laplacian enerjisi ve Laplacian Estrada indeksi sırasıyla,

$$LE(G)=\sum_{i=1}^{3}|\sigma_i-2|=4 \text{ ve } LEE(G)=\sum_{i=1}^{3}e^{\sigma_i}\cong 41.17107$$

olarak elde edilir.

G grafı, uzaklık matrisi D olan bir graf olsun. Bu takdirde D nin özdeğerlerine G *grafının uzaklık özdeğerleri* denir.

G grafı, n noktalı bir graf ve G nin uzaklık özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ olsun. Bu takdirde G nin *uzaklık enerjisi*

$$E_D(G) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$$

biçiminde tanımlanır.

Bir G grafının her nokta çifti arasındaki uzaklıklarının maksimumuna G *grafının çapı* denir ve *çap*(G) şeklinde gösterilir.

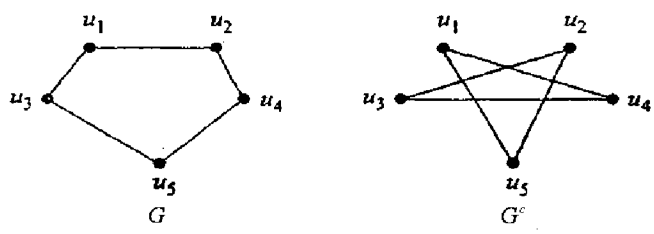
Grafın tam graf olması durumunda; komşuluk matrisi ve uzaklık matrisi çakıştığından, Şekil 1.5.1 deki $G = K_3$ tam grafının uzaklık özdeğerleri ve uzaklık enerjisi, bu grafın özdeğerleri ve enerjisi ile aynı olur. Ayrıca, $G = K_3$ tam grafının çapı 1 dir.

1.6. Graf İşlemleri

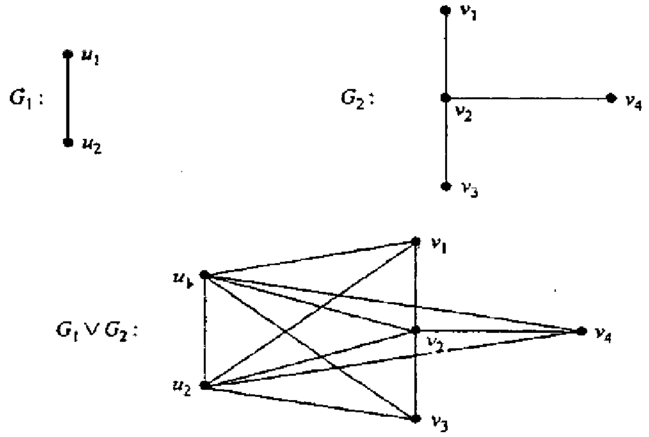
Şimdi çalışmamızda kullandığımız bazı graf işlemlerinden bahsedelim.

G basit bir graf olsun. G^c grafı, G grafının *tamamlayıcısını* göstermek üzere, bu graf "G^c de u ve v noktalarının komşu olması için gerek ve yeter şart bunların G de komşu olmamasıdır." biçiminde tanımlanır. Ayrıca, herhangi bir G grafı için G ve G^c graflarının nokta kümeleri aynıdır.

Aşağıda bir G grafı ve bu grafın tamamlayıcısını gösteren bir örnek verilmiştir.



G_1 ve G_2 grafları, sırasıyla $V(G_1)$ ve $V(G_2)$ nokta kümelerine sahip iki graf ve $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ olsun. G_1 grafının her bir noktası G_2 grafının her bir noktasına komşu olacak şekilde elde edilen grafa, G_1 ve G_2 *graflarının birleşimi* denir ve $G_1 \vee G_2$ şeklinde gösterilir. Aşağıda G_1 ve G_2 grafları ve bu grafların birleşimleri verilmiştir.

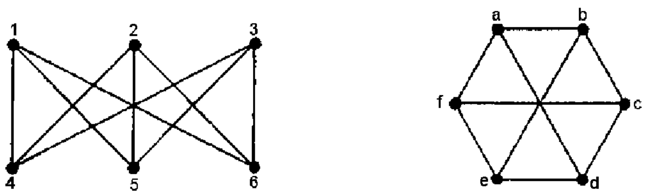


G_1 ve G_2, nokta kümeleri $V(G_1)$ ve $V(G_2)$ olan iki graf olsun. Her $u, v \in V(G_1)$ için,

$$u \sim v \Leftrightarrow f(u) \sim f(v)$$

şeklinde 1-1 örten bir $f : V(G_1) \to V(G_2)$ dönüşümü varsa, G_1 ve G_2 graflarına *izomorfik graflar* denir.

Aşağıdaki iki graf birbirine izomorftur.



Ayrıca izomorfik grafların komşu matrisleri benzer olup, benzer matrislerin özdeğerleri aynı olduğundan, izomorfik graflar aynı özdeğerlere sahiptir. Çalışmamızda izomorfik grafların bu özelliğinden faydalanacağız.

1.7. Perron Frobenius Teoremi

Bu alt bölümde, çok önemli olan ve daha sonra ana sonuçlarımızı vermek için kullanacağımız bazı Lineer Cebir konularından bahsedelim.

$A=[a_{ij}]$ matrisi, $m\times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ için

$$a_{ij}\geq 0$$

oluyorsa, A matrisine *negatif olmayan bir matris* denir.

Aşağıdaki A matrisi negatif olmayan matrise bir örnektir.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Her bir satırı ve her bir sütunundaki bir elemanı 1 (bir) ve diğerleri 0 (sıfır) olan matrislere *permütasyon matris* denir. Ayrıca permütasyon matrisler n tane elemanın özel bir permütasyonunu temsil eder.

Aşağıdaki matris, $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$ permütasyonuna karşılık gelen bir permütasyon matristir.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$M_{m,n}$ kümesi, $m\times n$ tipindeki matrislerin ve M_n ise $n\times n$ tipindeki kare matrislerin kümesi olmak üzere aşağıdaki tanımları verelim.

$A\in M_n$ olsun.

(a) $n=1$ ve $A=0$ ise, ya da

(b) $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n-1$ olacak şekildeki r tamsayıları için $B \in M_r$, $D \in M_{n-r}$, $C \in M_{r,n-r}$ ve $0 \in M_{n-r,r}$ olmak üzere

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $P \in M_n$ permütasyon matrisi varsa, A matrisine *indirgenebilir matris* denir.

$A \in M_n$ olsun. Eğer A matrisi indirgenebilir matris değilse bu takdirde A matrisine *indirgenemez matris* denir.

Ayrıca herhangi bir G grafı bağlantılı ise uzaklık matrisi indirgenemezdir. Buna göre aşağıdaki örneği verelim.

Şekil 1.5.1 deki $G = K_3$ tam grafını göz önüne alalım. Bu graf bağlantılı bir graf olduğundan uzaklık matrisi indirgenemez bir matristir.

Şimdi indirgenemez negatif olmayan matrisler için Perron Frobenius Teoremini verelim.

Teorem 1.7.1. $A \in M_n$ olsun. Eğer A indirgenemez negatif olmayan bir matris ise

(a) $\lambda > 0$ dır.

(b) λ, A matrisinin bir özdeğeridir.

(c) $Ax = \lambda x$ ifadesinde $x > 0$ dır.

(d) λ, A matrisinin katlı olmayan bir özdeğeridir.

(e) A matrisinin her μ özdeğeri için $|\mu| \leq \lambda$ dır.

Burada λ özdeğerine A matrisinin *Perron özdeğeri* ve bu özdeğere karşılık gelen özvektöre de A matrisin *Perron özvektörü* denir.

1.8. Bazı Reel Sayı Eşitsizlikleri

Şimdi çalışmamızda kullanacağımız bazı reel sayı eşitsizliklerini verelim.

Teorem 1.8.1. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reel sayı dizileri olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart her bir $1 \le i \le n$ için $a_i = rb_i$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

Teorem 1.8.2. (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği) Negatif olmayan n tane $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayıları için

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ olmasıdır.

2. BİR GRAFIN UZAKLIK ENERJİSİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde basit bağlantılı bir grafın uzaklık enerjisi için bazı sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sınırların daha önceki bazı sınırlardan daha iyi olduğu gösterilmiş ve bu sınırlar geliştirilmiştir. Daha sonra bu sonuçlar bir örnek üzerinde karşılaştırılmıştır.

Yukarıdaki paragrafta belirtilen ve bu bölüm içinde geçen Teorem 2.1, Teorem 2.2, Teorem 2.3, Teorem 2.4, Teorem 2.5, Teorem 2.6 ve Teorem 2.7 orjinal olup tarafımızdan ispatlanmıştır.

Şimdi bu bölümde bilinmesi gereken bazı tanımları verelim. Detaylı bilgiler için [17] referansına bakılabilir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ ve uzaklık matrisi $D=[d_{ij}]$ olan bir graf olsun.

1) Herhangi bir v_i noktasının *uzaklık derecesi*

$$D_i=\sum_{j=1}^{n} d_{ij}$$

biçiminde tanımlanır.

2) G grafının uzaklık derece dizisi $\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$ olmak üzere, herhangi bir v_i noktasının *ikinci uzaklık derecesi* ise

$$T_i=\sum_{j=1}^{n} d_{ij}D_j$$

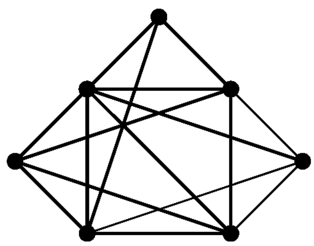
biçiminde tanımlanır.

3) G grafı, uzaklık derece dizisi $\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$ olan bir graf olmak üzere, eğer her i için $D_i=k$ ise bu takdirde G grafına $k-$*uzaklık regüler graf* denir.

4) G grafı, uzaklık derece dizisi $\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$ ve ikinci uzaklık derece dizisi $\{T_1,T_2,\ldots,T_n\}$ olan bir graf olmak üzere, her i için $\frac{T_i}{D_i}=k$ ise bu takdirde G grafına *pseudo* $k-$ *uzaklık regüler graf* denir.

Bir G grafı uzaklık regüler ise pseudo-uzaklık regüler olduğu tanımlarından açıktır. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani, pseudo uzaklık regüler olan bir graf uzaklık regüler olmak zorunda değildir. Şimdi buna [13] de de belirttiğimiz bir karşıt örnek verelim.

Örnek 2.1. Aşağıdaki $G = K_4 \vee K_3^c$ grafını düşünelim. Burada $\vee$ grafların birleşme işlemini ve K_3^c de, K_3 tam grafının tamamlayıcısını göstermektedir.



Şekil 2.1

$G = K_4 \vee K_3^c$

G nin uzaklık matrisi,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, G nin uzaklık dereceleri $D_1 = D_2 = D_3 = 8$ ve $D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = 6$ ve ikinci uzaklık dereceleri $T_1 = T_2 = T_3 = 56$ ve $T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = 42$ dir. Buradan $\frac{T_i}{D_i} = 7$, ($i = 1,2,3,4,5,6,7$) olup bu graf pseudo 7-uzaklık regülerdir. Ancak uzaklık regüler değildir.

Şimdi [13] de yer verdiğimiz ana sonuçlarımız Teorem 2.1, Teorem 2.2, Teorem 2.3 ve Teorem 2.4 ü verelim.

Öncelikle bir G grafının uzaklık enerjisine bir üst sınır elde etmek için kullanacağımız, G nin uzaklık matrisinin en büyük özdeğeri olan μ_1 için bir alt sınır bulalım. Bunun için

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ için } M_i^{(1)} = D_i^{\alpha} \text{ ve } t \geq 2 \text{ için } M_i^{(t)} = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} M_j^{(t-1)} \text{ olmak üzere}$$

$$M_i^{(1)}, M_i^{(2)}, \ldots, M_i^{(t)}, \ldots$$

dizisini tanımlayalım.

Teorem 2.1. G grafı, n noktalı bağlantılı bir graf, α bir reel sayı ve t bir tamsayı olsun. Bu takdirde

$$\mu_1 \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t+1}\ {}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}} \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $X = x_1, x_2, \ldots, x_n\ {}^{T}$ vektörü D nin en büyük özdeğeri μ_1 e karşılık gelen pozitif, birim Perron özvektör ve

$$C = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}} \quad M_1^{t}, M_2^{t}, \ldots, M_n^{t}\ {}^{T}$$

olsun. C pozitif birim bir vektör olup,

$$\mu_1\ D = \sqrt{\mu_1\ D^2} = \sqrt{X^T D^2 X} \geq \sqrt{C^T D^2 C} \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned} DC &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}} \left(\sum_{j=1}^{n} d_{1j} M_j^{t}, \sum_{j=1}^{n} d_{2j} M_j^{t}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} d_{nj} M_j^{t} \right)^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}} \quad M_1^{t+1}, M_2^{t+1}, \ldots, M_n^{t+1}\ {}^{T} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mu_1 \geq \sqrt{C^T D^2 C} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t+1}\ {}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Aşağıda Teorem 2.1 için eşitlik koşulu verilmiştir.

Teorem 2.2. (2.1) sınırında α ve t nin özel değerlerine karşılık eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{M_1^{t+1}}{M_1^{t}} = \frac{M_2^{t+1}}{M_2^{t}} = \cdots = \frac{M_n^{t+1}}{M_n^{t}}$$

olmasıdır.

İspat. İlk olarak (2.1) sınırında eşitlik olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (2.2) eşitsizliğinden C vektörü D nin en büyük özdeğeri μ_1 e karşılık gelen özvektör olduğundan $DC = \mu_1 C$ olur. Bu ise her i için $\frac{M_i^{t+1}}{M_i^{t}} = \mu_1$ eşitliğini sağlar.

Aksine, $\frac{M_1^{t+1}}{M_1^{t}} = \frac{M_2^{t+1}}{M_2^{t}} = \cdots = \frac{M_n^{t+1}}{M_n^{t}} = k$ olsun. Böylece, her i için, $\frac{M_i^{t+1}}{M_i^{t}} = k$ ve dolayısıyla $M_i^{t+1} = kM_i^{t}$ eşitliği sağlanır. Bu takdirde $DC = kC$ olup buradan C vektörünün, D nin k özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olduğu sonucuna varılır. Böylece $\mu_1 = k$ olup (2.1) de eşitlik sağlanır.

(2.1) sınırında $\alpha = t = 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1. (Indulal, 2009) G grafı, n noktalı bağlantılı, uzaklık derece dizisi $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ve ikinci uzaklık derece dizisi $T_1, T_2, \ldots, T_n$ olan bir graf olsun. Bu takdirde

$$\mu_1 \geq \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + \cdots + T_n^2}{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \cdots + D_n^2}} \tag{2.3}$$

dir. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart bazı k değerleri için G nin pseudo $k-$uzaklık regüler graf olmasıdır.

Şimdi basit bağlantılı bir grafın uzaklık enerjisi için elde ettiğimiz üst sınırı verebiliriz.

Teorem 2.3. G grafı, n noktalı ve bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{R}$ sabit değerleri için

$$E_D\ G\ \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t+1}\ {}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}} + \sqrt{n-1\left[S - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t+1}\ {}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}\right]} \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\ {}^{2}$ dir.

İspat. G grafının uzaklık özdeğerleri $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \mu_n$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_i\right| = E_D\ G$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\ {}^{2}$$

eşitlikleri bilinmektedir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\sum_{i=2}^{n} \left|\mu_i\right| \le \sqrt{n-1\ \sum_{i=2}^{n} \mu_i^2} = \sqrt{n-1\quad S-\mu_1^2} \tag{2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$E_D\ G\ \le \mu_1 + \sqrt{n-1\quad S-\mu_1^2}$$

olur. Teorem 2.1 den

$$\mu_1 \ge \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t+1}\ {}^{2}}{\sum_{i=1}^{n} M_i^{t}\ {}^{2}}} \tag{2.6}$$

olup α ve t nin özel değerleri için eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{M_1^{t+1}}{M_1^{t}} = \frac{M_2^{t+1}}{M_2^{t}} = \cdots = \frac{M_n^{t+1}}{M_n^{t}}$$

olmasıdır.

Sonuç 2.1 ve [17, Teorem 6] dan

$$\mu_1 \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^{t+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^{t}\right)^2}} \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}} \geq \sqrt{\frac{S}{n}} \tag{2.7}$$

elde edilir. $x \leq S$ olmak üzere, $f(x) = x + \sqrt{(n-1)(S-x^2)}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Dikkat edilirse f fonksiyonu, $x \geq \sqrt{\frac{S}{n}}$ için monoton azalan olup

$$E_D(G) \leq f(\mu_1) \leq f\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^{t+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^{t}\right)^2}}\right)$$

dir. Böylece (2.4) eşitsizliği elde edilir.

Aşağıdaki lemmayı (2.4) sınırının eşitlik koşulunu vermek için kullanacağız.

Lemma 2.1. (Indulal, 2009) Bağlantılı bir G grafının iki farklı uzaklık özdeğerinin olması için gerek ve yeter şart G nin tam graf olmasıdır.

Teorem 2.4. (2.4) sınırında eşitlik olması için gerek ve yeter şart G nin tam graf ya da

$$\frac{M_1^{t+1}}{M_1^{t}} = \frac{M_2^{t+1}}{M_2^{t}} = \cdots = \frac{M_n^{t+1}}{M_n^{t}} = k \geq \sqrt{\frac{S}{n}}$$

eşitsizliğini sağlayan ve üç farklı uzaklık özdeğeri $\left(k, \sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}, -\sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}\right)$ olan bağlantılı bir graf olmasıdır.

İspat. İlk olarak (2.4) sınırında eşitlik olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (2.6) dan ve Teorem 2.2 den

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^{t+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^{t}\right)^2}}$$

ve

$$\frac{M_1^{t+1}}{M_1^t} = \frac{M_2^{t+1}}{M_2^t} = \cdots = \frac{M_n^{t+1}}{M_n^t}$$

olmalıdır. Ayrıca (2.5) den

$$|\mu_i| = \sqrt{\frac{S - \mu_1^2}{n-1}}, \qquad i = 2, \ldots, n$$

olmalıdır. Bu takdirde burada üç durum söz konusudur.

1. Durum: G nin bir tek farklı uzaklık özdeğerinin olması durumunda, $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$ ve G bağlantılı olduğundan $G = K_1$ olur.

2. Durum: G nin iki farklı uzaklık özdeğeri olması durumunda, Lemma 2.1 den G tam graf olmalıdır.

3. Durum: G nin üç farklı uzaklık özdeğeri olması durumunda ise $\mu_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^{t+1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(M_i^t\right)^2}}$ ve $|\mu_i| = \sqrt{\frac{S - \mu_1^2}{n-1}}$, $i = 2, \ldots, n$ olur. Her i için, $\frac{M_i^{t+1}}{M_i^t} = k$ olduğundan G, üç farklı uzaklık özdeğeri $\left(k, \sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}, -\sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}\right)$ olan bağlantılı bir graftır.

Aksine, belirtilen graflar için (2.4) sınırında eşitlik olduğunu görmek kolaydır.

(2.4) sınırında $\alpha = t = 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2. (Indulal, 2009) G grafı, n noktalı bağlantılı, uzaklık derece dizisi $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ve ikinci uzaklık derece dizisi $T_1, T_2, \ldots, T_n$ olan bir graf olsun. Bu takdirde

$$E_D(G) \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}} + \sqrt{(n-1)\left[S - \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}\right]} \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^{\ 2}$ olmak üzere eşitlik olması için gerek ve yeter şart G nin tam graf ya da bazı k değerleri için üç farklı uzaklık özdeğeri $\left(k, \sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}, -\sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}\right)$ olan pseudo $k-$uzaklık regüler graf olmasıdır.

Şimdi uzaklık enerjisi için [3] de de yer verdiğimiz ikinci sınırımızı ve bu sınırın bazı sonuçlarını verelim.

İlk olarak sınırımızın ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 2.2. (Ramane ve ark., 2008) G grafı, n noktalı bağlantılı bir graf ve G nin uzaklık özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 2\sum_{i<j} \left(d_{ij}\right)^2$$

eşitlikleri vardır.

Lemma 2.3. (Zhou ve ark., 2008) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ negatif olmayan sayılar ise bu takdirde

$$n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right] \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)^2$$
$$\leq n(n-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

eşitsizliği vardır.

Şimdi [3] de bulunan sınırımızın ispatını daha detaylı bir şekilde vermeden önce bu sınırla karşılaştıracağımız aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.1. (Ramane ve ark., 2008) G grafı, n noktalı ve bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{2\sum_{i<j}(d_{ij})^2 + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}} \leq E_D(G) \leq \sqrt{2n\sum_{i<j}(d_{ij})^2} \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada Δ, G nin D uzaklık matrisinin determinantının mutlak değeridir.

Teorem 2.5. G grafı, n noktalı ve bağlantılı bir graf olsun. G nin D uzaklık matrisinin determinantının mutlak değeri Δ ile gösterelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\sqrt{2\sum_{i<j}\left(d_{ij}\right)^2+n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}} &\le E_D(G)\\ &\le \sqrt{2(n-1)\sum_{i<j}(d_{ij})^2+n\Delta^{\frac{2}{n}}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $i=1,2,\dots,n$ için $a_i=\mu_i^2$ olsun. Lemma 2.3 den

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2-\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i^2\right)^{\frac{1}{n}}\right) &\le n\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\right)^2\\ &\le n(n-1)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2-\left(\prod_{i=1}^{n}\mu_i^2\right)^{\frac{1}{n}}\right)\end{aligned}$$

olur. Bu takdirde Lemma 2.2 den ve

$$\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|=E_D(G) \text{ ve } \prod_{i=1}^{n}|\mu_i|=\Delta$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}2\sum_{i<j}(d_{ij})^2-n\Delta^{\frac{2}{n}} &\le 2n\sum_{i<j}(d_{ij})^2-E_D^2(G)\\ &\le (n-1)\left(2\sum_{i<j}(d_{ij})^2-n\Delta^{\frac{2}{n}}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}2\sum_{i<j}\left(d_{ij}\right)^2+n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}} &\le E_D^2(G)\\ &\le 2(n-1)\sum_{i<j}(d_{ij})^2+n\Delta^{\frac{2}{n}}\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 2.1. Dikkat edilirse (2.10) daki alt sınır, (2.9) daki alt sınır ile çakışmaktadır. Ayrıca (2.10) daki üst sınır (2.9) daki üst sınırdan daima daha iyidir. Gerçekten aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$2\sum_{i<j}(d_{ij})^2 \geq n\Delta^{\frac{2}{n}}$$

olup, (2.9) daki

$$E_D(G) \leq \sqrt{2n\sum_{i<j}(d_{ij})^2}$$

üst sınırı elde edilir.

Şimdi Teorem 2.5 in iki sonucunu (Teorem 2.6 ve Teorem 2.7) vermeden önce ilk sonucumuzun ispatında kullanacağımız bir lemma ve sınırımızı karşılaştıracağımız bir önerme verelim.

Lemma 2.4. (Indulal ve ark., 2008) G grafı, n noktalı, m kenarlı bağlantılı bir graf ve $çap(G) \leq 2$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 = 2(2n^2 - 2n - 3m) \tag{2.11}$$

eşitliği vardır.

Önerme 2.2. (Indulal ve ark., 2008) G grafı, n noktalı, m kenarlı bağlantılı bir graf ve $çap(G) \leq 2$ olmak üzere

$$\sqrt{4n(n-1) - 6m + n(n-1)\Delta^{2/n}} \leq E_D(G) \leq \sqrt{2n(2n^2 - 2n - 3m)} \tag{2.12}$$

eşitsizliği vardır. Burada Δ, G nin D uzaklık matrisinin determinantının mutlak değeridir.

Teorem 2.6. G grafı, n noktalı, m kenarlı, bağlantılı bir graf ve $çap(G) \leq 2$ olsun. Bu takdirde

$$E_D(G) \leq \sqrt{2(n-1)(2n^2 - 2n - 3m) + n\Delta^{\frac{2}{n}}} \tag{2.13}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 2.5 den

$$E_D(G) \leq \sqrt{2(n-1)\sum_{i<j}(d_{ij})^2 + n\Delta^{\frac{2}{n}}}$$

eşitsizliği bilinmektedir. Lemma 2.2 ve (2.11) eşitliğinden

$$2\sum_{i<j}(d_{ij})^2 = 2(2n^2 - 2n - 3m)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 2.2. (2.13) deki üst sınır (2.12) deki üst sınırdan daima daha iyidir.

Şimdi ikinci sonucumuzun ispatında kullanacağımız bir lemma verelim.

Lemma 2.5. (Edelberg ve ark., 1976) T grafı, n noktalı bir ağaç olsun. Bu takdirde

$$\det D(T) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2} \tag{2.14}$$

eşitliği vardır.

Şimdi [3] de bulunan ikinci sonucumuzun ispatını vermeden önce bu sınırla karşılaştıracağımız aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.3. (Ramane ve ark., 2008) T grafı, n noktalı bir ağaç olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{2\sum_{i<j}(d_{ij})^2 + n[(n-1)^{n+2}4^{n-2}]^{1/n}} \le E_D(T) \le \sqrt{2n\sum_{i<j}(d_{ij})^2} \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.7. T grafı, n noktalı bir ağaç olsun. Bu takdirde

$$E_D(T) \le \sqrt{2(n-1)\sum_{i<j}(d_{ij})^2 + n[(n-1)^2 4^{n-2}]^{\frac{1}{n}}} \tag{2.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 2.5 den

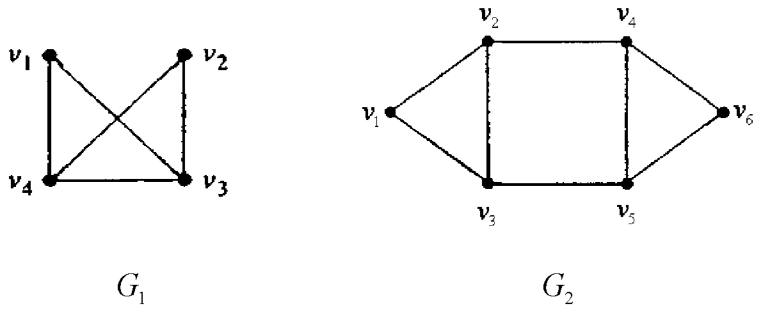
$$E_D(G) \le \sqrt{2(n-1)\sum_{i<j}(d_{ij})^2 + n\Delta^{\frac{2}{n}}}$$

dir. Böylece (2.14) eşitliği kullanılarak istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Not 2.3. (2.16) daki üst sınır (2.15) deki üst sınırdan daima daha iyidir.

Şimdi de bu sonuçları bir örnek üzerinde karşılaştıralım.

Örnek 2.2. Aşağıdaki gibi G_1 ve G_2 grafları verilsin.



Şekil 2.2

G_1 grafının uzaklık matrisi,

$$D_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece G_1 in uzaklık özdeğerleri,

$$\mu_1(G_1) \cong 3.56155,\ \mu_2(G_1) \cong -0.56155,\ \mu_3(G_1) = -1 \text{ ve } \mu_4(G_1) = -2$$

olup uzaklık enerjisi,

$$E_D(G_1) = \sum_{i=1}^{4} |\mu_i| \cong 7.1231$$

dir.

G_2 grafının uzaklık matrisi,

$$D_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece G_2 nin uzaklık özdeğerleri,

$$\mu_1(G_2) \cong 7.77200,\ \mu_2(G_2) = 0,\ \mu_3(G_2) \cong -0.77200,\ \mu_4(G_2) \cong -1, \mu_5(G_2) = -2$$

ve

$$\mu_6(G_2) = -4$$

olup uzaklık enerjisi ise

$$E_D(G_2) = \sum_{i=1}^{6} |\mu_i| \cong 15.554$$

dir.

Bu grafların uzaklık enerjileri için yukarıda bahsedilen sınırlar aşağıdaki değerleri verir.

	(2.4)	(2.4)	(2.4)	(2.8)	(2.9)	(2.10)
	$\alpha = 2$ ve $t = 1$ için	$\alpha = 0.005$ ve $t = 2$ için	$\alpha = 1$ ve $t = 3$ için			
G_1	7.61868	7.55482	7.55480	7.55589	8.48528	7.87400
G_2	18.35450	18.16335	18.16334	18.16463	22.18107	20.24845

Tablo 2.1

3. BİR GRAFIN UZAKLIK ESTRADA İNDEKSİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde basit bağlantılı bir grafın uzaklık Estrada indeksi tanımlanmış ve bu indeks için bazı sınırlar elde edilmiştir. Belirtilen bu tanım ve sonuçlar, [14] de yer almaktadır.

İlk olarak bir grafın uzaklık Estrada indeksini tanımlayalım.

Tanım 3.1. G grafı, n noktalı bir graf ve G nin uzaklık özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ olsun. Bu takdirde $DEE(G)$ ile gösterilen G grafının *uzaklık Estrada indeksi*

$$DEE(G) = \sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i} \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca

$$N_k = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^k$$

olmak üzere,

$$DEE(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_k}{k!}$$

eşitliği vardır.

Şimdi bu bölümdeki ana sonuçlarımız olan Teorem 3.3 ve Teorem 3.5 de kullanacağımız aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.1. G grafı, n noktalı, m kenarlı, bağlantılı bir graf ve $çap(G) = \rho$ olsun. Bu durumda

$$m \le \sum_{i<j} (d_{ij})^2 \le \frac{n(n-1)}{2} \rho^2 \tag{3.2}$$

dir.

İspat. $d_{ij} \ge 1$ $(i \ne j)$ ve $d_{ij} \le \rho$ olduğundan

$$\sum_{i<j} (d_{ij})^2 \ge \frac{n(n-1)}{2} \ge m$$

ve

$$\sum_{i<j} (d_{ij})^2 \le \frac{n(n-1)}{2} \rho^2$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi Teorem 3.1 için eşitlik koşulu verelim.

Teorem 3.2. (3.2) sınırının her iki tarafında eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ olmasıdır.

İspat. (3.2) sınırının her iki tarafında eşitlik olması için gerek ve yeter şart $1 = d_{ij} = \rho$ olmalıdır. Yani, herhangi iki nokta arasındaki uzaklık ve grafın çapı 1 olmalıdır. Bu ise graftaki her bir nokta çiftinin birbirine komşu olmasıyla mümkündür. Böylece $G \cong K_n$ olur.

Şimdi uzaklık Estrada indeksi için elde ettiğimiz ilk ana sonucumuzu verelim.

Teorem 3.3. G grafı, n noktalı m kenarlı bağlantılı bir graf ve $çap(G) = \rho$ olsun. Böylece

$$\sqrt{n^2+4m} \le DEE(G) \le n-1+e^{\rho\sqrt{n(n-1)}} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İlk olarak alt sınırı ispatlayalım. (3.1) eşitliğinin karesi alınırsa,

$$DEE^2(G) = \sum_{i=1}^{n} e^{2\mu_i} + 2\sum_{i<j} e^{\mu_i} e^{\mu_j} \tag{3.4}$$

elde edilir. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} 2\sum_{i<j} e^{\mu_i} e^{\mu_j} &\ge n(n-1)\left(\prod_{i<j} e^{\mu_i} e^{\mu_j}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &= n(n-1)\left[\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\mu_i}\right)^{n-1}\right]^{\frac{2}{n(n-1)}} \\ &= n(n-1)(e^{N_1})^{\frac{2}{n}} \\ &= n(n-1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. Kuvvet serisinin açılımından ve $N_0 = n$; $N_1 = 0$ ve $N_2 = 2\sum_{i<j}(d_{ij})^2$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} e^{2\mu_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\ge 0}\frac{(2\mu_i)^k}{k!} = n + 4\sum_{i<j}(d_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\ge 3}\frac{(2\mu_i)^k}{k!}$$

elde edilir. Mümkün olduğu kadar iyi bir alt sınır elde etmek için, $\sum_{k\ge 3}\frac{(2\mu_i)^k}{k!}$ ifadesi yerine $4\sum_{k\geq 3}\frac{(\mu_i)^k}{k!}$ yazalım. Ayrıca aşağıdaki ifadeyi elde etmek için, $4=2^2$ yerine $t\in[0,4]$ çarpanını kullanalım. Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} e^{2\mu_i} &\geq n+4\sum_{i<j}(d_{ij})^2+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 3}\frac{(\mu_i)^k}{k!}\\ &= n+4\sum_{i<j}(d_{ij})^2-tn-t\sum_{i<j}(d_{ij})^2+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 0}\frac{(\mu_i)^k}{k!}\\ &= n(1-t)+(4-t)\sum_{i<j}(d_{ij})^2+tDEE(G)\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.1 den

$$\sum_{i=1}^{n} e^{2\mu_i} \geq n(1-t)+(4-t)m+tDEE(G) \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitsizlikleri (3.4) de yazılır ve elde edilen denklem $DEE(G)$ ye göre çözülürse

$$DEE(G)\geq \frac{t}{2}+\sqrt{\left(n-\frac{t}{2}\right)^2+(4-t)m}$$

elde edilir. $n\geq 2$ ve $m\geq 1$ için

$$f(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{\left(n-\frac{x}{2}\right)^2+(4-x)m}$$

fonksiyonu $[0,4]$ aralığında monoton azalandır. Böylece $DEE(G)$ için en iyi alt sınır $t=0$ için elde edilir.

Şimdi üst sınırı ispatlayalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}DEE(G) &= n+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 1}\frac{(\mu_i)^k}{k!}\\ &\leq n+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 1}\frac{|\mu_i|^k}{k!}\\ &= n+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^2)^{\frac{k}{2}}\\ &\leq n+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^2)\right]^{\frac{k}{2}}\\ &= n+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\left[2\sum_{i<j}(d_{ij})^2\right]^{\frac{k}{2}}\end{aligned}$$

$$= n - 1 + \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\sqrt{2\sum_{i<j} (d_{ij})^2} \right)^2}{k!}$$

$$= n - 1 + e^{\sqrt{2\sum_{i<j} (d_{ij})^2}} \qquad (3.7)$$

olup, Teorem 3.1 den

$$DEE(G) \leq n - 1 + e^{\rho\sqrt{n(n-1)}}$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 3.3 için eşitlik koşulu verelim.

Teorem 3.4. (3.3) eşitsizliğinin her iki tarafında eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_1$ olmasıdır.

İspat. (3.3) eşitsizliğinin her iki tarafında da eşitlik olması için gerek ve yeter şart G nin bütün uzaklık özdeğerleri sıfır olmalıdır. G bağlantılı bir graf olduğundan bu sadece $G \cong K_1$ olmasıyla mümkündür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi (3.7) eşitsizliğinin bir sonucunu verelim.

Sonuç 3.1. G grafı, n noktalı, m kenarlı bağlantılı bir graf ve $çap(G) \leq 2$ olsun. Bu takdirde

$$DEE(G) \leq n - 1 + e^{\sqrt{2(2n^2 - 2n - 3m)}} \qquad (3.8)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.7) eşitsizliğinden, Lemma 2.2 ve (2.11) eşitliğinden ispat açıktır.

Şimdi uzaklık Estrada indeksi için elde ettiğimiz ikinci ana sonucumuzu verelim.

Teorem 3.5. G grafı, n noktalı m kenarlı bağlantılı bir graf ve $çap(G) = \rho$ olsun. Bu takdirde

$$DEE(G) - E_D(G) \leq n - 1 - \rho\sqrt{n(n-1)} + e^{\rho\sqrt{n(n-1)}} \qquad (3.9)$$

ve

$$DEE(G) \leq n - 1 + e^{E_D(G)} \qquad (3.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Teorem 3.3 ün ispatından

$$DEE(G) = n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 1}\frac{(\mu_i)^k}{k!} \leq n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 1}\frac{|\mu_i|^k}{k!}$$

elde edilir. Uzaklık enerjisinin tanımından,

$$DEE(G) \leq n + E_D(G) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{k\geq 2}\frac{|\mu_i|^k}{k!}$$

olur. Burada Teorem 3.3 deki işlemlerin benzeri yapılırsa

$$\begin{aligned} DEE(G) - E_D(G) &\leq n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 2}\frac{|\mu_i|^k}{k!} \\ &\leq n - 1 - \sqrt{2\sum_{i<j}(d_{ij})^2} + e^{\sqrt{2\sum_{i<j}(d_{ij})^2}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

ifadesi kolay bir şekilde görülür. $f(x) = e^x - x$ fonksiyonu $[0,\infty]$ aralığında monoton artan olduğundan ve Teorem 3.1 den

$$DEE(G) - E_D(G) \leq n - 1 - \rho\sqrt{n(n-1)} + e^{\rho\sqrt{n(n-1)}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$DEE(G)$ ve $E_D(G)$ arasındaki diğer bir ilişki ise

$$\begin{aligned} DEE(G) &\leq n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 1}\frac{|\mu_i|^k}{k!} \\ &\leq n + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\right)^k \\ &= n + \sum_{k\geq 1}\frac{(E_D(G))^k}{k!} \\ &= n - 1 + \sum_{k\geq 0}\frac{(E_D(G))^k}{k!} \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece

$$DEE(G) \leq n - 1 + e^{E_D(G)}$$

eşitsizliği elde edilip ispat tamamlanır.

Şimdi Teorem 3.5 için eşitlik koşulu verelim.

Teorem 3.6. (3.9) ve (3.10) da eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_1$ olmasıdır.

İspat. İspat, Teorem 3.4 ün ispatına benzerdir.

Şimdi (3.11) eşitsizliğinin bir sonucunu verelim.

Sonuç 3.2. G grafı, n noktalı, m kenarlı bağlantılı bir graf ve $çap(G) \leq 2$ olsun. Bu takdirde

$$DEE(G) - E_D(G) \leq n - 1 - \sqrt{2(2n^2 - 2n - 3m)} + e^{\sqrt{2(2n^2-2n-3m)}} \tag{3.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.11) eşitsizliğinden, Lemma 2.2 ve (2.11) eşitliğinden ispat açıktır.

Şimdi uzaklık Estrada indeksi için elde ettiğimiz sınırları bir örnek üzerinde karşılaştıralım.

Örnek 3.1. $G_1 = K_3$ ve $G_2 = K_{1,3}$ grafları verilsin. G_1 ve G_2 graflarının uzaklık matrisleri sırasıyla,

$$D_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$D_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, uzaklık özdeğerleri

$$\mu_1(G_1) = 2 \text{ ve } \mu_2(G_1) = \mu_3(G_1) = -1$$

ve

$$\mu_1(G_2) \cong 4.64575, \mu_2(G_2) \cong -0.64575 \text{ ve } \mu_3(G_2) = \mu_4(G_2) = -2$$

dir. Böylece uzaklık enerjileri ve uzaklık Estrada indeksleri sırasıyla,

$$E_D(G_1) = 4 \ , \ E_D(G_2) \cong 9.2915$$

ve

$$DEE(G_1) \cong 8.12481, \ DEE(G_2) \cong 104.93638$$

olarak elde edilir.

Bu grafların uzaklık Estrada indeksleri için yukarıda bahsedilen üst sınırlar aşağıdaki değerleri verir.

	(3.3)	(3.8)	(3.9)	(3.10)	(3.12)
G_1	13.58243	13.58243	15.13294	56.59815	15.13294
G_2	1023.65844	242.18219	1016.73024	10848.44006	236.70496

Tablo 3.1

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ikinci bölümünde basit bağlantılı bir grafın uzaklık enerjisi için Teorem 2.3 de (2.4) ve Teorem 2.5 de (2.10) eşitsizlikleri ile verilen sınırlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümünde ise basit bağlantılı bir grafın uzaklık Estrada indeksi tanımlanmış ve bu indeks için Teorem 3.3 de (3.3) ve Teorem 3.5 de (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri ile verilen sınırlar elde edilmiştir. Bununla birlikte çapı ikiyi geçmeyen bir grafın uzaklık Estrada indeksi için Sonuç 3.1 de (3.8) ve Sonuç 3.2 de (3.12) sınırları elde edilmiştir.

(2.8) ile verilen sınır (2.4) ile verilen sınırın özel bir durumu olup, (2.4) ile verilen sınırındaki α ve t nin bazı değerleri için, (2.4) sınırının (2.8) sınırından ve (2.10) daki üst sınırın da (2.9) daki üst sınırdan daha iyi olduğu Tablo 2.1 den de görülmektedir. Uzaklık Estrada indeksi için elde edilen sınırlar çok iyi değerler vermemesine rağmen (bakınız Tablo 3.1) bu sınırların uzaklık enerjisi ve uzaklık Estrada indeksi arasında bağlantılar kurması açısından önemli olduğunu düşünüyoruz.

Bir grafın uzaklık enerjisi için daha iyi sınırlar bulunabilir. Bununla birlikte uzaklık Estrada indeksi daha detaylı bir şekilde çalışılabilir ve özel grafların uzaklık Estrada indeksinin incelenmesi ile yeni çalışma sahaları oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Aldous, J. M., Wilson R. J. 2000. Graphs and Applications, The Open University Printed in Great Britain.
[2] Bapat, R., Kirkland, S. T., Neumann, M. 2005. On distance matrices and Laplacians, *Linear Algebra Appl.* **401** 193-209.
[3] Bozkurt, Ş. B., Güngör, A. D., Zhou, B. 2010. A note on the distance energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput Chem.* **64** 129-134.
[4] Buckley, F., Harary, F. 1990. Distance in Graphs, Addison Wesley, Redwood.
[5] Cvetkovic, D., Doob, M., Sachs, H. 1999. Spectra of Graphs-Theory and Application, third ed., Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg Leipzig.
[6] De La Pena, J. A., Gutman, I., Rada, J. 2007. Estimating the Estrada index, *Linear Algebra Appl.* **427** 70-76.
[7] Edelberg, M., Garey, N.R., Graham, R. L. 1976. On the distance matrix of a tree, *Discrete Math.* **14** 23-29.
[8] Estrada, E. 2000. Characterization of 3D molecular structure, *Chem. Phys Lett.* **319** 713-718.
[9] Fath-Tabar, G. H., Ashrafi, A. R., Gutman, I. Note on Estrada and *L*-Estrada indices of graphs, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts (CI. Math. Natur.)* in press.
[10] Gutman, I. 1978. The energy of a graph, *Ber. Math. Statist. Sekt. Forschungszentrum Graz* **103** 1-22.
[11] Gutman, I., Zhou, B. 2006. Laplacian energy of a graph, *Linear Algebra Appl.* **414** 29-37.
[12] Gutman, I. 2008. Lower Bounds for Estrada index,. *Publ. Inst. Math. Beograd* **83** 1-7.
[13] Güngör, A. D., Bozkurt, Ş. B. On the distance spectral radius and the distance energy of graphs, *Linear and Multilinear Algebra*, gönderildi.
[14] Güngör, A. D., Bozkurt, Ş. B. On the distance Estrada index of graphs, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic,* gönderildi.
[15] Horn, R. A., Johnson, C. R. 1985. Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York.
[16] Indulal, G., Gutman, I. Vijaykumar, A. 2008. On the distance energy of a graph, *MATCH Commun. Math. Comput Chem* **60** 461-472.
[17] Indulal, G. 2009. Sharp Bounds on the distance spectral radius and the distance energy of graphs, *Linear Algebra Appl.* **430** 106-113.
[18] Mitrinovic, D. S. 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
[19] Ramane, H. S., Revankar, D. S., Gutman, I., Rao, S. B., Acharya, B. D., Walikar, H. B. 2008. Bounds for the distance energy of a graph, *Kragujevag J. Math.* **31** 59-68.
[20] Zhou, B., Gutman, I., Aleksic, T. 2008. A note on the Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **60** 441-446.
[21] Zhou, B. Gutman, I. More on the Laplacian Estrada index, *Appl. Anal. Discrete Math.* to appear.