



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KARMA DAĞILIMLAR İÇİN STRES –
DAYANIKLILIK
GÜVENİRLİĞİNİN TAHMİNİ**
Adem YILMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İstatistik Anabilim Dalı

NİSAN-2014
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Adem YILMAZ tarafından hazırlanan "Karma Dağılımlar için Stress-Dayanıklılık Güvenirliğinin Tahmini" adlı tez çalışması 17/04/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Yrd. Doç. Dr. Aydın KARAKOCA

Danışman

Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI

Üye

Doç. Dr. Coşkun KUŞ

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

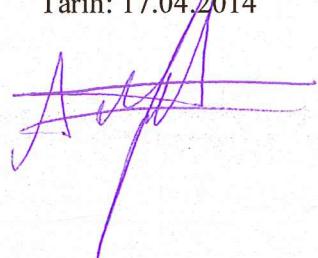
Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Adem YILMAZ

Tarih: 17.04.2014



ÖZET

YÜKSEK LİSANS

KARMA DAĞILIMLAR İÇİN STRES – DAYANIKLILIK GÜVENIRLİĞİNİN TAHMİNİ

Adem YILMAZ

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı**

**Danışman:
Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI**

2014, 33 Sayfa

Jüri
Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI
Yrd. Doç. Dr. Aydem KARAKOCA
Doç. Dr. Coşkun KUŞ

Bu tez çalışmasında, stress-dayanıklılık güvenilirliği $R=P(X>Y)$ 'nin en çok olabilirlik (MLE) ve Bayes tahminleri elde edilmiştir. Burada, X ve Y birbirinden bağımsız ve farklı parametreli aynı karma dağılım ailesine sahip olarak kabul edilmiştir. Ayrıca bu tahmin ediciler bir simülasyon çalışması ile tahmini riskleri açısından karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Güvenirlilik Analizi, Karma Dağılımlar, Simülasyon, Stres- Dayanıklılık Güvenirliği, Tahmin

ABSTRACT

MS THESIS

ESTIMATION OF STRESS-STRENGTH RELIABILITY FOR COMPOUND DISTRIBUTION

Adem YILMAZ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN STATISTICS**

Advisor:

Assist. Prof. Dr. İsmail KINACI

2014, 33 Pages

Jury

Abstract

In this study, maximum likelihood and Bayes estimation of the stress-strength reliability $R=P(X>Y)$ when X and Y have independently same mixed distribution family and different parameter are obtained. An extensive computer simulation is used to compare of obtained estimators in that their estimated risks.

Keywords: Mixed Distributions, Simulation, Reliability Analysis, Stress-strength reliability, Estimation.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında benden emeklerini esirgemeyen saygıdeğer ve çok değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. İsmail KINACI, Yrd. Doç. Dr. Aydın KARAKOCA ve çok değerli arkadaşım Arş. Gör. Yunus AKDOĞAN' a ve bana güvenen ve desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Adem YILMAZ
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	3
2.1. Nokta Tahmini	3
2.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi ve Asimptotik Özellikleri	4
2.1.2. Bayes Tahmin edicileri	4
2.2. Aralık Tahmini.....	7
2.4. Newton-Raphson Yöntemi	9
2.5. Karma Dağılımlar	10
2.5.1. EP Dağılımı.....	10
2.5.2. EG Dağılımı.....	11
2.5.3. ENB Dağılımı	11
2.5.4. WNB Dağılımı	12
2.6. Stres-Dayanıklılık Güvenirliliği	13
3. ÜSTEL-GEOMETRİK(EG) DAĞILIMI İÇİN STRES–DAYANIKLILIK GÜVENİRLİĞİNİN TAHMİNİ.....	13
3.1. R 'nin En Çok Olabilirlik Tahmini	14
3.2. R 'nin Bayes Tahmini (Thirney-Kadane Yaklaşımı).....	19
4. ÜSTEL-POISSON(EP) DAĞILIMI İÇİN STRES–DAYANIKLILIK GÜVENİRLİĞİNİN TAHMİNİ.....	21
4.1. R' nin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	22
5. SİMULASYON ÇALIŞMASI.....	26
5.1. EG DAĞILIMI.....	26
5.2. EP DAĞILIMI	29
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMIŞ	33

1. GİRİŞ

Stres-dayanıklılık güvenilirliği, belirli bir parçanın veya sistemin, maruz kaldığı strese dayanma olasılığı olarak tanımlanabilmektedir. Maruz kalınan stres Y ve dayanıklılık X ile gösterilirse stres-dayanıklılık güvenilirliği $R = P(Y < X)$ şeklinde ifade edilebilir. Stres-dayanıklılık güvenilirliği tıp, biyoloji, mühendislik ve ziraat alanlarında oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin, bir mikroorganizmaların bir ilaçla karşı, bir beton kalibinin maruz kaldığı baskiya, bir ampulün voltaja, bir köprünün kendi üzerindeki ağırlığa vb. dayanması olasılıklarının önceden bilinmesi hiç şüphesiz ki ilgili alanda bazı kararların alınabilmesi açısından oldukça önemlidir. Ancak gerçek hayatı bu tür olasılıkların önceden bilinmesi pek mümkün değildir. Bu sebeple bu olasılıkların yani stres-dayanıklılık güvenilirliklerinin tahmini ayrı bir öneme sahiptir. Şu ana kadar stres-dayanıklılık güvenilirliği ile ilgili yapılan çalışmalar genellikle stres ve dayanıklılığın aynı dağılım ailesine ait (örneğin üstel, Weibull, Normal, Gamma, Burr, Pareto gibi) rasgele değişkenler olduğu durum incelenmiştir. En çok incelenen tahmin edici ise sahip olduğu özellikler açısından doğal olarak en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Ancak bazı varsayımlar altında stres-dayanıklılık güvenilirliği için tam örneklemeye dayalı başka tahmin ediciler de incelenmiştir. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

Awad ve ark. (1981), X ve Y rasgele değişkenlerinin iki değişkenli üstel dağılığını varsayıarak $R = P(Y < X)$ stres-dayanıklılık güvenilirliği için üç ayrı tahmin ediciyi incelemiştir. Ayrıca X ve Y 'nin ortalamalarının eşitliğini test etmek için bir test ve ortalamalar arasındaki fark için güven limitleri vermişlerdir.

Church ve Harris (1970), X ve Y rasgele değişkenlerinin bağımsız ve normal dağılımlı olmaları durumunda $R = P(Y < X)$ olasılığı için güven aralıkları elde etmişlerdir.

Costantine ve Karson (1986), X ve Y rasgele değişkenlerinin sırasıyla (M, λ) ve (N, μ) parametreli gamma dağılımına sahip oldukları ve M ve N parametrelerinin bilindiği varsayıımı altında $P(Y < X)$ olasılığı için en çok olabilirlik ve en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Woodward ve Kelley (1977), X ve Y rasgele değişkenlerinin bağımsız ve normal dağılımlı olmaları durumunda $P(Y < X)$ olasılığının en küçük varyanslı yansız tahmin edicisini yeni bir formda elde etmişlerdir.

Kotz ve ark. (2003) tarafından yazılan bu kitap $P(Y < X)$ stres-dayanıklılık güvenilirliğinin ayrıntılı bir şekilde incelendiği önemli bir eserdir. Bu kitapta başlıca stres-dayanıklılık güvenilirliğinin tarihçesi, matematiksel ifadesi ve tahmini konusu üzerinde durulmuştur. Tahmin aşamasında X ve Y rasgele değişkenlerinin normal, iki parametrel Üstel, Gamma, Pareto, Weibull, Burr X ve XII ve daha başka dağılımlara sahip olmaları durumunda stres-dayanıklılık güvenilirliğinin en çok olabilirlik tahmin edicileri incelenmiştir. Yine bazı dağılımlar için en küçük varyanslı yansız tahmin ediciler ve Bayes tahmin edicileri incelenmiştir. Ayrıca kitabın son bölümünde bir çok uygulama ve örneğe yer verilmiştir.

Kundu ve Gupta (2005), X ve Y rasgele değişkenlerinin aynı ölçek parametreli ve farklı şekil parametreli genelleştirilmiş üstel dağılıma sahip olmaları durumunda $P(Y < X)$ için en çok olabilirlik tahmin edicisini ve bu tahmin edicinin asimptotik dağılımını elde etmişlerdir. Bu asimptotik dağılımı kullanarak $P(Y < X)$ için asimptotik güven aralığını oluşturmuşlardır. Ayrıca ortak olan ölçek parametresinin bilindiği varsayımyı altında $P(Y < X)$ olasılığının en çok olabilirlik tahmin edicisinin yanında Bayes ve en küçük varyanslı yansız tahmin edicilerini elde etmişler ve bu tahmin edicilerin performanslarını bir Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırmışlardır.

Kundu ve Gupta (2006), X ve Y 'lerin farklı ölçek parametreli ve aynı şekil parametreli Weibull dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler olmaları durumunda $P(Y < X)$ olasılığının en çok olabilirlik tahminini incelemiştir. En çok olabilirlik tahmin edicisinin analitik olarak elde edilememesinden dolayı analitik olarak elde edilebilen yaklaşık en çok olabilirlik tahmin edicisi üzerinde durmuşlardır. Ayrıca en çok olabilirlik tahmin edicisinin asimptotik dağılımını elde etmişler ve buna bağlı olarak da $P(Y < X)$ için asimptotik güven aralığını vermişlerdir. Yazarlar $P(Y < X)$ için Bayes tahminini ve karşılık gelen aralıkları elde etmişler ve bir simülasyon çalışması ile yöntemleri karşılaştırmışlardır.

Son zamanlarda çeşitli dağılımlar farklı tekniklerle birleştirilerek yeni karma dağılımlar elde edilmiştir. Örneğin, Adamidis ve Loukas (1998) geometrik sayıda üstel dağılıma sahip rasgele değişkenlerin minimumunun dağılımını dikkate alarak Üstel-Geometrik (EG) dağılım olarak adlandırıldıkları dağılımı elde etmişlerdir. Adamidis ve Loukas'ın bu çalışması bu türden çalışmaların başlangıç noktası olmuştur. Daha sonra benzer düşünce ile Kus (2007). Tahmasbi ve Rezai (2008) ve Chankandi ve Ganjali

(2009) sırasıyla Üstel-Poisson (EP), Üstel-Logoritmik (EL) ve Üstel-Kuvvet Serisi (EPS) isimli yeni yaşam zamanı dağılımlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, Adamidis ve Loukas (1998) tarafından önerilen Üstel-Geometrik ve Kuş (2007) tarafından önerilen Üstel-Poisson dağılımları için stres-dayanıklılık güvenilirlikleri ve bunların en çok olabilirlik tahmin edicileri ile Tierney-Kadane yaklaşımı kullanılarak yaklaşık Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin simülasyon ile elde edilen ortalama yan ve ortalama MSE (Hata Kareler Ortalaması) diğerleri verilmiştir. Ayrıca yine simülasyon en çok olabilirlik tahmin edicileri ile Bayes tahmin edicileri tahmini riskleri açısından kıyaslanmıştır.

Tezde elde edilen tüm sonuçlara, nümerik bir uygulama eklenmiş, Nümerik çalışmalarında Excel 2010, Maple 13 paket programları ile Matlab 10 programlama dilleri kullanılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Nokta Tahmini

Parametresi tahmin edilmek istenilen kitle $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$ dağılımına sahip olsun. Burada θ kitle parametresini, Θ , parametre uzayını temsil etmektedir. Bu kitleden alınan ve her biri aynı $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$ dağılımına sahip X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerin dizisine *örneklem* denir.

Örneklemenin bilinmeyen parametre içermeyen bir fonksiyonuna istatistik denir. İstatistikler aynı zamanda birer rasgele değişkendir. Bir istatistik bir parametreyi veya parametrenin bir fonksiyonunu tahmin etmek amacıyla kullanıldığında tahmin edici adını alır. Tahmin edicinin aldığı değere de tahmin denir.

Dağılımı bilinen fakat parametreleri bilinmeyen bir kitlenin parametrelerinin tahmin edilmesi istatistik biliminin en önemli problemlerindendir. Kitle parametreleri, kitleden alınan bir örneklem yardımıyla oluşturulan istatistiklerle tahmin edilir. Parametre hakkında bütün bilgi örneklemen içindedir. Bu şekilde elde edilen tahminlere nokta tahmini denir.

2.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi ve Asimptotik Özellikleri

X_1, X_2, \dots, X_n örneklemin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f(\mathbf{x}|\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$$

Biçiminde olmak üzere bu fonksiyona x_1, x_2, \dots, x_n ' lerin değil de, θ 'nın bir fonksiyonu gözüyle bakıldığında bu fonksiyon olabilirlik fonksiyonu adını alır ve $L(\theta | \mathbf{x})$ şeklinde gösterilir.

$L(\hat{\theta} | \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta} (L(\theta | \mathbf{x}))$ eşitliğini sağlayan $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ istatistiğine θ 'nın en çok olabilirlik tahmini ve $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ istatistiğine ise θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi adı verilir.

Teorem 2.1. (Roussas 1973) $X_1, X_2, \dots, X_n, f(x|\theta), \theta \in \Theta \subset R^r$ dağılımdan alınmış örneklem olmak üzere $\varphi: \Theta \rightarrow \Theta' \subseteq R^m$ bire-bir fonksiyon olsun. O zaman $\hat{\theta}$, θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi ise, $\varphi(\hat{\theta})$ da $\varphi(\theta)$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir.

2.1.2. Bayes Tahmin edicileri

Bayes yaklaşımı, diğer tahmin yöntemlerinden temelde farklıdır. Bu yöntemlerde bir θ parametresinin bilinmediği ancak sabit olduğu kabul edilir. θ parametreli bu dağılımdan X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örneklemi çekilir, örneklemdeki gözlenen değerlere bağlı olarak θ 'nın değeri hakkında bilgi elde edilir. Bayes yaklaşımında ise θ 'nın bir olasılık dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğu varsayıılır. Bu olasılık dağılımı θ 'nın prior yada önsel dağılımı olarak adlandırılır. Bu önsel dağılım subjektif bir dağılımdir. Yani araştırmacı örneklemi almadan önce θ 'nın bu önsel dağılımının seçimini kendisi yapmaktadır. Bayes yönteminde θ parametreli dağılımdan X_1, X_2, \dots, X_n örneklemi alınır ve bu örneklemden elde edilen bilgiye dayalı olarak θ 'nın önsel dağılımını güncellenir. Güncellenen bu dağılım θ 'nın posterior ya da sonsal dağılımı olarak adlandırılır. Bu güncelleme işlemi Bayes kuralı

kullanılarak yapıldığı için bu yaklaşım Bayes yaklaşımı olarak adlandırılır. Bu yaklaşımda yapılacaklar kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$\pi(\theta)$ θ 'nın önsel dağılımını ve $f(\mathbf{x}|\theta) \mathbf{X}$ örneklememinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere θ ve \mathbf{X} 'in ortak dağılımı

$$f(\mathbf{x},\theta) = f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ve $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dir. Buna göre θ 'nın sonsal dağılımı

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x},\theta)}{f(\mathbf{x})}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $f(\mathbf{x})$ \mathbf{X} 'in marjinal dağılımıdır ve

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x},\theta) d\theta = \int_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x},\theta)\pi(\theta) d\theta$$

şeklinde elde edilir. Sonuçta θ 'nın sonsal dağılımı

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta \in \Theta} f(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) d\theta}$$

olarak ifade edilir. Elde edilen bu sonsal dağılımla birlikte elimizde θ 'nın bir dağılımı bulunmaktadır ve bu dağılım örneklemden gelen bilgiyi de içermektedir.

Bu aşamadan sonra θ için Bayes tahminine geçilebilir. Burada kayıp fonksiyonu için kabuller devreye girmektedir. Uygulamalarda genellikle karesel kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmin edicileri elde edilmektedir. Karesel kayıp fonksiyonu altında θ parametresinin Bayes tahmini θ 'nın posterior dağılımı $\pi(\theta|\mathbf{x})$ 'in beklenen değeri olarak elde edilir.

Yani

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{Bayes} &= E(\theta | \mathbf{X}) \\ &= \int_{\theta \in \Theta} \theta \pi(\theta | \mathbf{X}) d\theta\end{aligned}$$

şeklindedir. θ 'nın herhangi bir $U(\theta)$ gibi bir fonksiyonun Bayes tahmin edicisi ise

$$\hat{U}(\theta)_{Bayes} = \int_{\theta \in \Theta} u(\theta) \pi(\theta | \mathbf{X}) d\theta$$

şeklinde elde edilebilir.

2.1.2.1.Tierney-Kadane

Eşitlik (2.1) ile verilen ve iki integralin oranı şeklinde ifade edilen Bayes tahmin edicisinin elde edilmesinde integrallerin hesaplanamaması gibi sorunlar ortaya çıkmaktadır.

Yukarıda verilen $U(\theta)$ 'nın Bayes tahmin edicisi \hat{U}_{Bayes}

$$\hat{U}_{Bayes} = \frac{\int e^{nL^*(\theta|\mathbf{x})} d\theta}{\int e^{nL(\theta|\mathbf{x})} d\theta} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada;

$$L(\theta | \mathbf{x}) = \frac{1}{n} (\ln(\theta | x) + \ln g(\theta)) \quad (2.2)$$

şeklindedir ve eşitlikteki $g(\theta)$ seçilen önsel dağılımı göstermektedir.

$$L^*(\theta | \mathbf{x}) = L(\theta | \mathbf{x}) + \frac{1}{n} \ln U(\theta) \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu yaklaşımı göre $U(\theta)$ 'nın yaklaşık Bayes tahmini

$$\hat{U}_{Bayes} \cong \left(\frac{\det \Sigma^*}{\det \Sigma} \right)^{1/2} U(\hat{\theta}^*) \frac{q(\hat{\theta}^* | \mathbf{x})}{q(\hat{\theta} | x)} \quad (2.4)$$

eşitliği yardımıyla bulunabilir. Ayrıca;

$q(\theta | \mathbf{x}) = \ell(\theta | \mathbf{x}) g(\theta)$ şeklinde elde edilir.

Burada $\hat{\theta}$, $L(\theta | \mathbf{x})$ fonksiyonunu maksimum yapan değer; $\hat{\theta}^*$ ise $L^*(\theta | \mathbf{x})$ fonksiyonunu maksimum yapan değerdir.

Ayrıca Σ , $L(\theta | \mathbf{x})$ 'in ikinci türevler matrisinin (-) işaretlisinin tersinin $\hat{\theta}$ 'daki değeri; Σ^* ise $L^*(\theta | \mathbf{x})$ 'in ikinci türevler matrisinin (-) işaretlisinin tersinin $\hat{\theta}^*$ 'daki değeridir.

2.2. Aralık Tahmini

X_1, X_2, \dots, X_n , $f(x|\theta)$, $\theta \in \Theta \subset R$ dağılımından alınmış n birimlik bir örneklem olsun. Rasgele aralık, en az bir sınır noktası rasgele değişken olan sonlu veya sonsuz aralıktır.

$L : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ve $U : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ için $L(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x})$ koşulunu sağlayan Borel ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere, L ve U fonksiyonları yardımıyla oluşturulan $[L(X_1, X_2, \dots, X_n), U(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ aralığı aşağıdaki (2.5) eşitsizliğini sağlarsa, θ parametresi için $1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) anlam seviyeli güven aralığı adını alır.

$$P_\theta [L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n)] \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (2.5)$$

Eğer aşağıdaki (2.6) eşitsizliği sağlanırsa $L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'e, $1 - \alpha$ güven seviyeli alt güven limiti denir.

$$P_\theta [L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta < \infty] \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (2.6)$$

Eğer aşağıdaki (2.7) eşitsizliği sağlanırsa $U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'e, $1 - \alpha$ güven seviyeli üst güven limiti denir.

$$P_{\theta}[-\infty \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \dots, X_n)] \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (2.7)$$

Güven aralığının, θ parametresinin çok boyutlu olması durumunda genelleştirilmesi, güven bölgesi olarak adlandırılır (Roussas 1973).

2.3. Fisher Bilgi Matrisi

X_1, X_2, \dots, X_n örneklemi, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x|\theta), \theta \in \mathbb{R}^p$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Örneklem ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\mathbf{x}|\theta), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere bu fonksiyona parametrenin bir fonksiyonu gözü ile bakıldığında

$$L(\theta|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}|\theta), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona X_1, X_2, \dots, X_n örneklemine dayalı olabilirlik fonksiyonu denir. Burada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ ve $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ şeklinde olup Θ parametre uzayıdır. Olabilirlik fonksiyonu $L(\theta|\mathbf{x})$ in logaritması alınarak

$$\ell(\theta) = \log(L(\theta|\mathbf{x})), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p \quad (2.9)$$

şeklinde elde edilen fonksiyona log-olabilirlik fonksiyonu denir.

X_1, X_2, \dots, X_n örneklemi, olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\theta), \theta \in \mathbb{R}^p$ olan kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. Bu örneklem için Fisher bilgi matrisi

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -E \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \log(L(\theta|\mathbf{x})) \right) \right\} \\ &= -E \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \ell(\theta) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= - \begin{pmatrix} E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) & \dots & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_p}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2}\right) & \dots & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_p}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p \partial \theta_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p \partial \theta_2}\right) & \dots & E\left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p^2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır, burada $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$ ve $\ell(\boldsymbol{\theta})$ sırasıyla eşitlik (2.8) ve (2.9) de verilen olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonlarıdır.

2.4. Newton-Raphson Yöntemi

$f(x)=0$ denkleminin bir kökünün bulunmasındaki iteratif yöntemlerden biridir. $f(x)$ sürekli ve türevlenebilen fonksiyonunun bilinen yaklaşık bir kökü x_n olsun. $f(x_n + h)$ fonksiyonu x_n civarında ikinci mertebeye kadar Taylor serisine açılırsa

$$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}hf''(\xi_n) \quad \xi \in (x_n, x_n + h) \quad (2.11)$$

yazılabilir. $x_n + h = x_{n+1}$ değerinin gerçek köke çok yakın olduğu yani $f(x_n + h)$ 'ın hemen hemen sıfır olduğu düşünülürse,

$$0 = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_n) \quad \xi \in (x_n, x_n + h) \quad (2.12)$$

yazılır. Şayet h yeterince küçük ise h^2 'yi içeren terim ve sonraki terimler ihmal edilebilir. Böylece

$$f(x_n) + hf'(x_n) = 0$$

veya

$$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.13)$$

olarak elde edilir. Eğer $h = x_{n+1} - x_n$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.14)$$

iterasyon denklemine ulaşılır.

Newton – Raphson yöntemi geometrik olarak incelenecək olursa $f(x)=0$ fonksiyonunun başlangıç yaklaşık kökü x_0 olmak üzere fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.15)$$

olarak yazılabilir. Bu teğetin x eksenini kestiği nokta ilk kök yaklaşımı olur ve

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.16)$$

elde edilir. Bu şekilde ardışık yaklaşımlar kullanılarak, gerçek köke ulaşılır.

2.5. Karma Dağılımlar

2.5.1. EP Dağılımı

Kuş (2007) tarafından öne sürülen bu dağılım üstel dağılımla sıfırdan budaňmış poisson dağılımı ile birleştirilmiş olup azalan bozulma oranı özelliği göstermektedir. X rasgele değişkeni EP (Exponantial-Poisson) dağılımına sahip ise sırasıyla, olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu,

$$f_X(x; \lambda, \beta) = \frac{\beta\lambda}{e^\lambda - 1} \exp[-\beta x + \lambda e^{-\beta x}], \quad x > 0, \lambda, \beta > 0,$$

$$F_X(x; \lambda, \beta) = \frac{1}{e^\lambda - 1} \left[-e^\lambda - \exp(\lambda e^{-\beta x}) \right], \quad x > 0, \lambda, \beta > 0,$$

şeklindedir. X rasgele değişkenin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \lambda \{ \beta (\exp(\lambda) - 1) \}^{-1} H_{2,2}([1,1], [2,2], \lambda)$$

$$Var(X) = \lambda \{ \beta^2 (\exp(\lambda) - 1) \}^{-1} \{ 2H_{3,3}([1,1,1], [2,2,2], \lambda) - \lambda \{ (\exp(\lambda) - 1) \}^{-1} H_{2,2}^2([1,1], [2,2], \lambda) \}$$

biçimindedir (Kuş 2007).

2.5.2. EG Dağılımı

Azalan bozulma oranına sahip bir dağılım olup Adamidis ve Loukas (1998) tarafından üstel dağılım ile geometric dağılım birleştirilerek öne sürülmüştür.

X rasgele değişkeni EG (Exponential-Geometric) dağılımına sahip ise sırasıyla, olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu,

$$f(x) = \beta(1-p)\exp(-\beta x)\{1 - p\exp(-\beta x)\}^{-2}, \quad x > 0, \beta > 0, p \in (0,1)$$

$$F(x) = (1 - \exp(-\beta x))\{1 - p\exp(-\beta x)\}^{-2}$$

$$\bar{F}(x) = (1 - p)\exp(-\beta x)\{1 - p\exp(-\beta x)\}^{-1}$$

$$h(x) = \beta\{1 - p\exp(-\beta x)\}^{-1}$$

şeklindedir. EG dağılımının beklenen değeri $E(X) = \beta p(p-1)\ln(1-p)$, varyansı $Var(X) = (1-p)(p\beta^2)^{-1}\{2L(p|2) + (1-p^{-1})\ln^2(1-p)\}$ şeklindedir. Burada $L(p|r)$ fonksiyonuna Euler'in genelleştirilmiş dilogaritma fonksiyonu denir ve $L(p|r) = \sum_{j=1}^{\infty} p^j j^{-r}$ eşitliğiyle hesaplanır (Adamidis ve Loukas 1998).

2.5.3. ENB Dağılımı

Azalan bozulma oranına sahip bir dağılım olup üstel dağılım ile Negatif Binom dağılımı birleştirilerek öne sürülmüştür. X rasgele değişkeni ENB (Exponential-Negative Binom) dağılımına sahip ise sırasıyla, olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu,

$$f(x, z; \theta) = \beta z \exp(-\beta zx) \binom{z-1}{k-1} (1-p)^k p^{z-k}, x > 0, \beta > 0$$

$$F(x) = 1 - (1-p)^k \{\exp(\beta x - p)\}^{-k}$$

$$\bar{F}(x) = (1-p)^k \{\exp(\beta x - p)\}^{-k}$$

$$h(x; \theta) = f(x; \theta) \bar{F}^{-1}(x; \theta) = \beta k \exp(\beta x) \{\exp(\beta x) - p\}^{-1}$$

şeklindedir. (Hajebi ve ark. 2013).

ENB dağılımının beklenen değeri $E(X) = \frac{(1-p)^k}{\beta k} H_{2,1,1}\{[k,k],[k+1],p\}$, varyansı

$$Var(X) = \frac{(1-p)^k}{(\beta k)^2} \left(2H_{3,2,1}\{[k,k,k],[k+1,k+1],p\} - (1-p)^k H_{2,1,1}^2\{[k,k],[k+1],p\} \right)$$

şeklindedir.

2.5.4. WNB Dağılımı

Artan, azalan ve küvet eğrisi bozulma oranlarına bozulma oranına sahip bir dağılım olup Weibull dağılımı ile Negatif Binom dağılımı birleştirilerek öne sürülmüştür. X rasgele değişkeni WNB (Weibull-Negative Binom) dağılımına sahip ise sırasıyla, olasılık yoğunluk fonksiyonu, dağılım fonksiyonu, yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu,

$$f(x,z;\alpha,\beta) = \beta k x^{\beta-1} \alpha^\beta (1-p)^k \exp\{-\kappa(x\alpha)^\beta\} \left(1 - p \exp\{-(x\alpha)^\beta\}\right)^{-(k+1)}$$

$$x, \alpha, \beta > 0, p \in (0,1), k \in N^+$$

$$F_X(x) = 1 - (1-p)^k \exp\{-k(x\alpha)^\beta\} \left(1 - p \exp\{-(x\alpha)^\beta\}\right)^{-k}$$

$$\bar{F}(x;\theta) = (1-p)^k \exp\{-k(x\alpha)^\beta\} \left(1 - p \exp\{-(x\alpha)^\beta\}\right)^{-k}$$

$$h(x;\theta) = k\beta\alpha^\beta x^{\beta-1} \left(1 - p \exp\{-(x\alpha)^\beta\}\right)^{-1}$$

şeklindedir.

ENB dağılımının beklenen değeri

$$E(X) = k(1-p)^k \alpha^{-1} \Gamma(k+\beta^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} p^j (k+j)^{-(k+\beta^{-1})}$$

şeklindedir.

2.6. Stres-Dayanıklılık Güvenirliliği

Stres-dayanıklılık modeli, Y stresine maruz kalan ve X dayanıklılığına sahip bir bileşenin yaşamını tanımlar. Buna göre stres dayanıklılığı aşarsa ($Y > X$) bileşenin yaşaması mümkün değildir. Stres ve dayanıklılıktan oluşan tek bileşenli böyle bir sistemin güvenilirliği $R = P(Y < X)$ biçiminde ifade edilir.

Stres-dayanıklılık güvenilirliği R ile ilgili sonuç çıkarımı istatistiksel kalite kontrolü, mühendislik istatistiği, tıbbi istatistik ve biyoistatistik alanlarında ilgi çekici bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Bir bileşenin dayanıklılığının uygulanan stresten daha az olduğu durumda bileşenin başarısız olması sezgisel bir algı yaparken bu model bütünüyle stres ve dayanıklılık ile sınırlanılamaz. Rasgele değişken Y 'nin sorun altındaki bir sistemin karakteristiği ile ilişkili herhangi bir performansını ifade ettiği ve X 'in başarısızlığı belirleyen bir kriterde hizmet verdiği herhangi durum veya problemde de bu model uygulanabilir. Örneğin bir klinik çalışmasında X kontrol grubunun yanıtını, Y ise tedavi grubunun yanıtını temsil ederken R , tedavinin başarısızlığını ölçer.

Literatürde R ile ilgili sonuç çıkarımı, X ve Y 'nin dağılımlarının çeşitli varsayımları altında geniş bir şekilde incelenmiştir. Bu alanda yapılan çalışmaların çoğunda X ve Y r.d.lerinin dağılımlarının aynı aileye ait ve bağımsız oldukları kabul edilmiştir.

3. ÜSTEL-GEOMETRİK(EG) DAĞILIMI İÇİN STRES–DAYANIKLILIK GÜVENİRLİĞİNİN TAHMİNİ

Bu bölümde $R = P(Y < X)$ stres-dayanıklılık güvenilirliğinin Üstel-Geometrik dağılımı bulunması, R için en çok olabilirlik (ML) ve Thirney-Kadane Yaklaşımı kullanılarak Bayes Tahminlerinin elde edilmesi üzerinde durulmuştur. Ayrıca en çok olabilirlik tahmin edicisine dayalı asimptotik güven aralıkları R için elde edilmiştir.

3.1. R 'nin En Çok Olabilirlik Tahmini

X rasgele değişkeni, Üstel-Geometrik(EG) dağılımına sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu,

$$f(x) = \beta(1-p)\exp(-\beta x)\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-2}, \quad x > 0, \beta > 0, p \in (0,1) \quad (3.1)$$

$$F(x) = (1-\exp(-\beta x))\{1-p\exp(-\beta x)\}^{-2} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

X ve Y rasgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olmak üzere $X \sim EG(p_1, \theta)$ ve $Y \sim EG(p_2, \theta)$ olduğunda X ve Y rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları sırasıyla

$$f_X(x) = \theta(1-p_1)e^{-\theta x}(1-p_1e^{-\theta x})^{-2}$$

$$f_Y(y) = \theta(1-p_2)e^{-\theta y}(1-p_2e^{-\theta y})^{-2}$$

$$F_X(x) = (1-e^{-\theta x})(1-p_1e^{-\theta x})^{-1}$$

$$F_Y(y) = (1-e^{-\theta y})(1-p_2e^{-\theta y})^{-1}$$

şeklindedir. Bu durumda stress-dayanıklılık güvenilirliği

$$R = P(Y < X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(y)) f_Y(y) dy = \frac{(1-p_1) \left(p_2 - p_1 + (1-p_2) \ln \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right) \right)}{(p_2 - p_1)^2}$$

olarak elde edilir.

Burada görülmüyor ki R , θ parametresinden bağımsızdır. $p_1 = p_2$ olduğunda

Yani $(\lim_{P_1 \rightarrow P_2} R = \frac{1}{2})$ $R = 0.5$ olacaktır.

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1} \sim EG(p_1, \theta)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \sim EG(p_2, \theta)$ olmak üzere iki bağımsız örnekleme ilişkin ortak olabilirlik fonksiyonu $L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n_1} f_X(x_i) \prod_{i=1}^{n_2} f_Y(y_i)$

$$\begin{aligned}\ell(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \log L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n_1} \log [f_X(x_i)] + \sum_{i=1}^{n_2} \log [f_Y(y_i)] \\ \ell(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= n_1 \ln \theta + n_1 \ln \theta + n_1 \ln(1 - p_1) - \theta \sum_{i=1}^{n_1} x_i \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{n_1} \ln(1 - p_1 e^{-\theta x_i}) + n_2 \ln \theta + n_2 \ln(1 - p_2) \\ &\quad - \theta \sum_{i=1}^{n_2} y_i - 2 \sum_{i=1}^{n_2} \ln(1 - p_2 e^{-\theta y_i})\end{aligned}$$

olarak bulunan log olabilirlik fonksiyonun parametrelere göre türevi alınır;

$$\frac{\partial \ell(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial p_1} = \frac{-n_1}{1 - p_1} + \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{2e^{-\theta x_i}}{1 - p_1 e^{-\theta x_i}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \ell(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial p_2} = \frac{-n_2}{1 - p_2} + \sum_{i=1}^{n_2} \left(\frac{2e^{-\theta y_i}}{1 - p_2 e^{-\theta y_i}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \ell(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \theta} = \frac{n_1 + n_2}{\theta} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i(1 - p_1 e^{-\theta x_i})}{-1 + p_1 e^{-\theta x_i}} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{x_i(1 - p_2 e^{-\theta y_i})}{-1 + p_2 e^{-\theta y_i}} = 0$$

şeklinde elde edilen olabilirlik denklemlerinin lineer çözümü nümerik olarak elde edilmediğinden iteratif yöntemlerden Newton-Raphson yöntemi kullanılarak parametre tahminleri elde edilebilir.

Parametrelerin tahmin değerleri kullanılarak oluşturulan Hessian matrisi yardımıyla parametre tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisi ve dolayısıyla asimptotik dağılımı elde edilebilir.

Hessian matrisi

$$H_{11} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_1^2} = \frac{-n_1}{(1 - p_1)^2} + 2 \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{e^{-\theta x_i}}{1 - p_1 e^{-\theta x_i}} \right)^2$$

$$H_{22} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_2^2} = \frac{-n_2}{(1-p_2)^2} + 2 \sum_{i=1}^{n_2} \left(\frac{e^{-\theta y_i}}{1-p_2 e^{-\theta y_i}} \right)^2$$

$$H_{33} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = \frac{-n_1 - n_2}{\theta^2} + 2 \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i^2 e^{-\theta x_i}}{(1-p_1 e^{-\theta x_i})^2} + p_2 \sum_{i=1}^{n_2} \frac{y_i^2 e^{-\theta y_i}}{(1-p_2 e^{-\theta y_i})^2} \right)$$

$$H_{12} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_1 \partial p_2} = 0$$

$$H_{13} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_1 \partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i e^{-\theta x_i}}{(1-p_1 e^{-\theta x_i})^2}$$

$$H_{23} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p_2 \partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^{n_2} \frac{y_i e^{-\theta y_i}}{(1-p_2 e^{-\theta y_i})^2}$$

Şeklinde bulunabilir. Buradan p_1 , p_2 ve θ parametrelerinin beklenen Fisher bilgi matrisi

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{ij} \end{bmatrix} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} E \left[\frac{-1}{n_1 + n_2} \mathbf{H}_{n_1, n_2} \right]$$

şeklindedir. Bu simetrik matrisin I_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ elemanları

$$E(H_{11}) = \frac{-n_1}{3(1-p_1)^2}$$

$$E(H_{22}) = \frac{-n_2}{3(1-p_2)^2}$$

$$E(H_{33}) = \frac{-n_1 - n_2}{\theta^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{n_1 (-\text{dilog}(1-p_1)p_1 + \text{dilog}(1-p_1) + p_1)}{\theta^2 p_1} + \frac{n_2 (-\text{dilog}(1-p_2) + p_2)}{\theta^2 p_2} \right)$$

$$E(H_{13}) = \frac{-n_1 ((1-p_1)^2 \ln(1-p_1) + p_1)}{3(1-p_1)\theta p_1^2}$$

$$E(H_{23}) = \frac{-n_2((1-p_2)^2 \ln(1-p_2) + p_2)}{3(1-p_2)\theta p_2^2}$$

$$E(H_{12}) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{I}_{11} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \frac{n_1}{(n_1 + n_2) 3(1-p_1)^2} = \frac{1}{6(1-p_1)^2}$$

$$\mathbf{I}_{22} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \frac{n_1}{(n_1 + n_2) 3(1-p_2)^2} = \frac{1}{6(1-p_2)^2}$$

$$\mathbf{I}_{33} = \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{2}{6} \frac{p_1 + (1-p_1) \operatorname{dilog}(1-p_1)}{p_1} - \frac{2}{6} \frac{p_2 + (1-p_2) \operatorname{dilog}(1-p_2)}{p_2} \right)$$

$$\mathbf{I}_{12} = 0$$

$$\mathbf{I}_{13} = \frac{(1-p_1)^2 \ln(1-p_1) + p_1}{6(1-p_1)p_3 p_1^2}$$

$$\mathbf{I}_{23} = \frac{(1-p_2)^2 \ln(1-p_2) + p_2}{6(1-p_2)p_3 p_2^2}$$

şeklindedir. Burada $\operatorname{dilog}(z) = \int_1^z \frac{\ln t}{1-t} dt$ dir.

p_1, p_2, θ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı,

$\sqrt{n_1 + n_2} (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{\theta}) - (p_1, p_2, \theta) \xrightarrow{d} N_3(0, \mathbf{I}^{-1})$, dir. En çok olabilirlik tahmin

edicileri $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{\theta}$ 'nın varyansları

$$Var(\hat{p}_1) = \frac{\mathbf{I}_{22}\mathbf{I}_{33} - \mathbf{I}_{23}^2}{(n_1 + n_2)\Delta}$$

$$Var(\hat{p}_2) = \frac{\mathbf{I}_{11}\mathbf{I}_{33} - \mathbf{I}_{13}^2}{(n_1 + n_2)\Delta}, \quad Var(\hat{\theta}) = \frac{\mathbf{I}_{11}\mathbf{I}_{22} - \mathbf{I}_{12}^2}{(n_1 + n_2)\Delta}$$

şeklinde ve kovaryansları ise

$$\begin{aligned} Cov(\hat{p}_1, \hat{p}_2) &= \frac{\mathbf{I}_{13}\mathbf{I}_{23}}{(n_1 + n_2)\Delta}, & Cov(\hat{p}_1, \hat{\theta}) &= \frac{-\mathbf{I}_{13}\mathbf{I}_{22}}{(n_1 + n_2)\Delta}, \\ Cov(\hat{p}_2, \hat{\theta}) &= \frac{-\mathbf{I}_{11}\mathbf{I}_{23}}{(n_1 + n_2)\Delta} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmektedir.

Burada $\Delta = I_{11}I_{22}I_{33} - I_{23}^2I_{11} - I_{13}^2I_{22}$, \mathbf{I} fisher bilgi matrisinin determinantıdır.

\hat{R} 'nin asimptotik normalliği ise delta metodu kullanılarak

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{dR}{dp_1} \frac{dR}{dp_2} \frac{dR}{d\theta} \right)^T = (d_1 \ d_2 \ d_3)^T \\ d_1 &= \frac{dR}{dp_1} = \frac{(1-p_2) \left(2(p_1 - p_2) + (p_1 + p_2 - 2) \ln \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right) \right)}{(p_1 - p_2)^3} \\ d_2 &= \frac{dR}{dp_2} = \frac{-(1-p_1) \left(2(p_1 - p_2) + (p_1 + p_2 - 2) \ln \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right) \right)}{(p_1 - p_2)^3} \\ d_3 &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \sqrt{n_1 + n_2} (\hat{R} - R) &\rightarrow N(0, \mathbf{d}^T \mathbf{Id}) \text{ şeklinde elde edilir. Buradan } \hat{R} \text{ nin varyansı} \\ Var(\hat{R}) &= \frac{1}{n_1 + n_2} \mathbf{d}^T \mathbf{Id} \\ &= d_1^2 Var(\hat{p}_1) + d_2^2 Var(\hat{p}_2) + 2d_1 d_2 Cov(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \end{aligned}$$

Bu bilgiler ışığında R 'nin α anlam seviyesinde asimptotik güven aralığı

$$\hat{R} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{R})}$$

olarak elde edilir.

3.2. R' nin Bayes Tahmini (Thirney-Kadane Yaklaşımı)

$X \sim EG(p_1, \theta)$, $Y \sim EG(p_2, \theta)$ olması durumunda

$$R = \frac{(1-p_1) \left((p_2 - p_1) + (1-p_2) \log \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right) \right)}{(p_2 - p_1)^2}$$

olarak bulunmuştur. Burada R' nin Bayes tahmini konusu incelenmiştir.

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1} \sim EG(p_1, \theta)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \sim EG(p_2, \theta)$ olmak üzere bağımsız iki örnekleme ilişkin log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell(p_1, p_2, \theta) &= n_1 \ln \theta + n_1 \ln \theta + n_1 \ln(1-p_1) - \theta \sum_{i=1}^{n_1} x_i \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n_1} \log(1-p_1 e^{-\theta x_i}) + n_2 \ln \theta + n_2 \log(1-p_2) \\ &= -\theta \sum_{i=1}^{n_2} y_i - 2 \sum_{i=1}^{n_2} \log(1-p_2 e^{-\theta y_i}) \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. R' nin Bayes tahminini bulabilmek için p_1 ve p_2 için önsel dağılımlar önerilmelidir. $p_1 \in (0,1)$ için $Beta(a,b)$, $p_2 \in (0,1)$ için $Beta(c,d)$ şeklinde önsel dağılımlar önerildiğinde ortak önsel dağılım,

$$g(p_1, p_2) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p_1^{a-1} (1-p_1)^{b-1} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} p_2^{c-1} (1-p_2)^{d-1} \quad (3.3)$$

şeklinde olacaktır. Böylece $L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} (\ell(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \ln g(p_1, p_2))$ denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{1}{n} \left\{ n_1 \ln \theta + n_1 \ln \theta + n_1 \ln(1-p_1) - \theta \sum_{i=1}^{n_1} x_i \right. \\
& - 2 \sum_{i=1}^{n_1} \log(1-p_1 e^{-\theta x_i}) + n_2 \ln \theta + n_2 \log(1-p_2) \\
& - \theta \sum_{i=1}^{n_2} y_i - 2 \sum_{i=1}^{n_2} \log(1-p_2 e^{-\theta y_i}) \\
& \left. + \log \left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p_1^{a-1} (1-p_1)^{b-1} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} p_2^{c-1} (1-p_2)^{d-1} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde elde edilmektedir. Thirney-Kadane yaklaşımı için bir diğer ifade ise $L^*(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{n} \log(U(p_1, p_2))$ hesaplanmasıdır. Burada $L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})$, eşitlik (2.11) de verilmiştir. Burada $U(p_1, p_2)$ tahmin etmek istedigimiz ifadeler yani $U(p_1, p_2) = R'$ dir. Buna göre;

$$\begin{aligned}
L^*(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{1}{n} \left\{ n_1 \ln \theta + n_1 \ln \theta + n_1 \ln(1-p_1) - \theta \sum_{i=1}^{n_1} x_i \right. \\
& - 2 \sum_{i=1}^{n_1} \log(1-p_1 e^{-\theta x_i}) + n_2 \ln \theta + n_2 \log(1-p_2) \\
& - \theta \sum_{i=1}^{n_2} y_i - 2 \sum_{i=1}^{n_2} \log(1-p_2 e^{-\theta y_i}) \\
& \left. + \log \left(\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p_1^{a-1} (1-p_1)^{b-1} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} p_2^{c-1} (1-p_2)^{d-1} \right) \right\} \\
& + \frac{1}{n} \log \left(\frac{(1-p_1) \left(p_2 - p_1 + (1-p_2) \log \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right) \right)}{(p_2 - p_1)^2} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\delta^2 L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\delta p_1^2}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\delta^2 L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\delta p_1 \delta p_2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\delta^2 L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\delta p_2^2}$$

$$\sigma_{21} = \frac{\delta^2 L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\delta p_1 \delta p_2}$$

$$\hat{U}_{Bayes} \equiv \left(\frac{\det \Sigma^*}{\det \Sigma} \right)^{1/2} U(\hat{p}_1^*, \hat{p}_2^*) \frac{q(\hat{p}_1^*, \hat{p}_2^* | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{q(\hat{p}_1, \hat{p}_2 | \mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

eşitliği yardımıyla bulunabilir. Ayrıca;

$$q(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ell(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) g(p_1, p_2, \theta)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{\theta}$, $L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonunu maksimum yapan değer; $\hat{p}_1^*, \hat{p}_2^*, \hat{\theta}^*$ ise $L^*(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonunu maksimum yapan değerdir.

Ayrıca Σ , $L(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})$ 'in ikinci türevler matrisinin (-) işaretlisinin tersinin $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{\theta}$ 'daki değeri; Σ^* ise $L^*(p_1, p_2, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y})$ 'in ikinci türevler matrisinin (-) işaretlisinin tersinin $\hat{p}_1^*, \hat{p}_2^*, \hat{\theta}^*$ 'daki değeridir.

4. ÜSTEL-POISSON(EP) DAĞILIMI İÇİN STRES–DAYANIKLILIK GÜVENIRLİĞİNİN TAHMİNİ

Bu bölümde $R = P(Y < X)$ stres-dayanıklılık güvenirliğinin Üstel-Poisson dağılımı bulunması, R için en çok olabilirlik (ML) ve Thirney-Kadane Yaklaşımı kullanılarak Bayes Tahminlerinin elde edilmesi üzerinde durulmuştur. Ayrıca en çok olabilirlik tahmin edicisine dayalı asimptotik güven aralıkları R için elde edilmiştir.

4.1. R' nin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

$X \sim EP(\lambda_1, \beta)$ ve $Y \sim EP(\lambda_2, \beta)$ olduğunda X ve Y rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları sırasıyla

$$f_x(x; \lambda_1, \beta) = \frac{\beta\lambda_1}{e^{\lambda_1} - 1} \exp[-\beta x + \lambda_1 e^{-\beta x}], \quad x > 0, \lambda_1, \beta > 0,$$

$$F_x(x; \lambda_1, \beta) = \frac{1}{e^{\lambda_1} - 1} \left[-e^{\lambda_1} - \exp(\lambda_1 e^{-\beta x}) \right], \quad x > 0, \lambda_1, \beta > 0,$$

$$f_y(y; \lambda_2, \beta) = \frac{\beta\lambda_2}{e^{\lambda_2} - 1} \exp[-\beta y + \lambda_2 e^{-\beta y}], \quad y > 0, \lambda_2, \beta > 0,$$

$$F_y(y; \lambda_2, \beta) = \frac{1}{e^{\lambda_2} - 1} \left[-e^{\lambda_2} - \exp(\lambda_2 e^{-\beta y}) \right], \quad y > 0, \lambda_2, \beta > 0,$$

şeklindedir. Bu durumda stress-dayanıklılık güvenilirliği

$$R = P(Y < X) = \int_0^\infty (1 - F_x(y)) f_y(y) dy = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2} - 1} - \frac{\lambda_1}{e^{\lambda_1} - 1} \right]$$

olarak elde edilir.

Burada görülmektedir ki R , β parametresinden bağımsızdır. $\lambda_1 = \lambda_2$ olduğunda Yani ($\lim_{P_1 \rightarrow P_2} R = \frac{1}{2}$) $R = 0.5$ olacaktır.

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1} \sim EP(\lambda_1, \beta)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \sim EP(\lambda_2, \beta)$ olmak üzere iki bağımsız değişkene ait olabilirlik fonksiyonu

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \beta) = \prod_{i=1}^{n_1} f(x_i; \lambda_1, \beta) \prod_{i=1}^{n_2} f(y_i; \lambda_2, \beta)$$

$$\begin{aligned} \ell = (\lambda_1, \lambda_2, \beta) &= \sum_{i=1}^{n_1} \ln [f_x(x_i)] + \sum_{j=1}^{n_2} \ln [f_y(y_j)] \\ &= n_1 \left[\ln(\beta) + \ln(\lambda_1) - \ln(e^{\lambda_1} - 1) \right] \beta \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \lambda_1 \sum_{i=1}^{n_1} e^{-\beta x_i} \\ &\quad + n_2 \left[\ln(\beta) + \ln(\lambda_2) - \ln(e^{\lambda_2} - 1) \right] - \beta \sum_{j=1}^{n_2} y_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n_2} e^{-\beta y_j} \end{aligned}$$

olarak bulunan log olabilirlik fonksiyonun parametrelerle göre türevi alınır;

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_1} = \frac{n_1}{\lambda_1} - \frac{n_1 e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} - 1} + \sum_{i=1}^{n_1} e^{-\beta x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda_2} = \frac{n_2}{\lambda_2} - \frac{n_2 e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - 1} + \sum_{j=1}^{n_2} e^{-\beta y_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{n_1 + n_2}{\beta} - \sum_{i=1}^{n_1} x_i - \sum_{j=1}^{n_2} y_j - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i e^{-\beta x_i} - \lambda_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j e^{-\beta y_j} = 0,$$

şeklinde elde edilen olabilirlik denklemlerinin lineer çözümü nümerik olarak elde edilmediğinden iteratif yöntemlerden Newton-Raphson yöntemi kullanılarak parametre tahminleri elde edilebilir.

Parametrelerin tahmin değerleri kullanılarak oluşturulan Hessian matrisi yardımıyla parametre tahmin edicilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisi ve dolayısıyla asimptotik dağılımı elde edilebilir.

Hessian matrisi

$$H_{11} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_1^2} = \frac{-n_1}{\lambda_1^2} + \frac{n_1 e^{\lambda_1}}{(e^{\lambda_1} - 1)^2}$$

$$H_{22} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_2^2} = \frac{-n_2}{\lambda_2^2} + \frac{n_2 e^{\lambda_2}}{(e^{\lambda_2} - 1)^2}$$

$$H_{33} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} = -\frac{n_1 + n_2}{\beta^2} + \lambda_1 \sum_{j=1}^{n_1} x_j^2 e^{-\beta x_j} + \lambda_2 \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 e^{-\beta y_i}$$

$$H_{12} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = 0$$

$$H_{13} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_1 \partial \beta} = -\sum_{i=1}^{n_1} x_i e^{-\beta x_i}$$

$$H_{23} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda_2 \partial \beta} = -\sum_{j=1}^{n_2} y_j e^{-\beta y_j}$$

şeklinde bulunabilir. Buradan λ_1 , λ_2 ve β parametrelerinin beklenen Fisher bilgi matrisi

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{ij} \end{bmatrix} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} E \left[\frac{-1}{n_1 + n_2} \mathbf{H}_{n_1, n_2} \right]$$

$$\mathbf{I}_{11} = p_1 \left[\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{e^{\lambda_1}}{(e^{\lambda_1} - 1)^2} \right],$$

$$\mathbf{I}_{22} = p_2 \left[\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{e^{\lambda_2}}{(e^{\lambda_2} - 1)^2} \right],$$

$$\mathbf{I}_{33} = \frac{1}{\beta^2} \left[1 - \frac{p_1 \lambda_1^2}{(e^{\lambda_1} - 1)} \xi_2(\lambda_1) - \frac{p_2 \lambda_2^2}{e^{\lambda_2} - 1} \xi_2(\lambda_2) \right],$$

$$\mathbf{I}_{12} = 0,$$

$$\mathbf{I}_{13} = -\frac{p_1 \lambda_1}{\beta (e^{\lambda_1} - 1)} \xi_1(\lambda_1),$$

$$\mathbf{I}_{23} = -\frac{p_2 \lambda_2}{\beta (e^{\lambda_2} - 1)} \xi_1(\lambda_2),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \beta$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin asimptotik dağılımı, $\sqrt{n_1 + n_2} (\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N_3(0, \mathbf{I}^{-1})$, dir. Burada \mathbf{I} matrisinin tersi \mathbf{I}^{-1} olarak gösterilmiştir. En çok olabilirlik tahmin edicilerinin varyansını elde etmek için $\frac{1}{n_1 + n_2} \mathbf{I}^{-1}$ varyans-kovaryans matrisi kullanılarak elde edilişi

$$Var(\hat{\lambda}_1) = \frac{\mathbf{I}_{22} \mathbf{I}_{33} - \mathbf{I}_{23}^2}{(n_1 + n_2) \Delta},$$

$$Var(\hat{\lambda}_2) = \frac{\mathbf{I}_{11} \mathbf{I}_{33} - \mathbf{I}_{13}^2}{(n_1 + n_2) \Delta},$$

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\mathbf{I}_{11}\mathbf{I}_{22}}{(n_1+n_2)\Delta},$$

Yine tahmin edicilerin kovaryansı

$$Cov(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \frac{\mathbf{I}_{13}\mathbf{I}_{23}}{(n_1+n_2)\Delta}, Cov(\hat{\lambda}_1, \beta) = \frac{-\mathbf{I}_{13}\mathbf{I}_{22}}{(n_1+n_2)\Delta}, Cov(\hat{\lambda}_2, \beta) = \frac{-\mathbf{I}_{11}\mathbf{I}_{23}}{(n_1+n_2)\Delta},$$

Burada $\Delta = I_{11}I_{22}I_{33} - I_{23}^2I_{11} - I_{13}^2I_{22}$ olarak \mathbf{I} fisher bilgi matrisinin determinantıdır.

\hat{R} 'nin asimptotik normalliği ise delta metodu kullanılarak

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial R}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial R}{\partial \beta} \right)^T = (d_1, d_2, 0)^T, \\ d_1 &= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{e^{\lambda_1}(1-\lambda_1)-1}{(e^{\lambda_1}-1)^2} - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \left[\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2}-1} - \frac{\lambda_1}{e^{\lambda_1}-1} \right], \\ d_2 &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[1 + \frac{e^{\lambda_2}(1-\lambda_2)-1}{(e^{\lambda_2}-1)^2} \right] - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \left[\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2}-1} - \frac{\lambda_1}{e^{\lambda_1}-1} \right], \end{aligned}$$

R 'nin en çok olabilirlik tahmininin asimptotik dağılımı delta metodu kullanılarak

$\sqrt{n_1+n_2}(\hat{R}-R) \rightarrow N(0, \mathbf{d}^T \mathbf{Id})$ şeklinde elde edilir. Yine \hat{R} varyansı

$$\begin{aligned} Var(\hat{R}) &= \frac{1}{n_1+n_2} \mathbf{d}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{d}, \\ &= d_1^2 Var(\hat{\lambda}_1) + d_2^2 Var(\hat{\lambda}_2) + 2d_1 d_2 Cov(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2), \end{aligned}$$

Not: $Var(\hat{R})$, θ parametresine bağlı değildir.

Bu bilgiler ışığında R 'nin α anlam seviyesinde asimptotik güven aralığı

$\hat{R} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{R})}$ olarak elde edilir.

5. SİMULASYON ÇALIŞMASI

Burada $R = P(Y < X)$ stress-dayanıklılık güvenilirliğinin EG ve EP dağılımları için elde edilen tahmin edicilerinin performanslarını görebilmek amacıyla simülasyon sonuçlarına yer verilmiştir. Simülasyon sonuçları 10000 tekrar sonucunda elde edilmiştir.

5.1. EG DAĞILIMI

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1} \sim EG(p_1, \theta)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \sim EG(p_2, \theta)$ olduğu durumda $R = P(Y < X)$ ’ in çeşitli n_1, n_2, p_1, p_2 ve θ değerleri için en çok olabilirlik tahmin edicisine ilişkin ortalama yan ve ortalama hata kareler ortalaması değerleri Çizelge 1’ de verilmiştir. Ayrıca ayrı durumlar için R ’ nin en çok olabilirlik tahminine dayalı asimptotik güven aralıklarının R ’ yi kapsama olasılıkları ve ortalama aralık uzunlukları Çizelge 2 ‘ de verilmiştir.

Çizelge 1. En çok olabilirlik tahminlerinin yan ve MSE değerleri

n ₁ ,n ₂	p ₁ ;p ₂		p ₁ ;p ₂		p ₁ ;p ₂		p ₁ ;p ₂		p ₁ ;p ₂	
	0,1;0,9		0,9;0,1		0,3;0,7		0,7;0,3		0,5;0,5	
	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
10;10	0.0251	0.0067	0.0264	0.0069	0.0192	0.0119	0.0208	0.0118	0.0078	0.0119
10;20	0.0251	0.0050	0.0190	0.0052	0.0197	0.0089	0.0087	0.0092	0.0039	0.0096
10;30	0.0235	0.0043	0.0169	0.0048	0.0181	0.0077	0.0098	0.0086	0.0042	0.0087
10;40	0.0218	0.0037	0.0146	0.0044	0.0193	0.0071	0.0077	0.0080	0.0058	0.0081
10;50	0.0216	0.0035	0.0141	0.0044	0.0177	0.0067	0.0071	0.0078	0.0075	0.0082
20;10	0.0196	0.0054	0.0241	0.0050	0.0139	0.0095	0.0203	0.0090	0.0045	0.0096
20;20	0.0146	0.0032	0.0166	0.0033	0.0123	0.0064	0.0129	0.0063	0.0018	0.0069
20;30	0.0149	0.0026	0.0126	0.0027	0.0117	0.0053	0.0076	0.0055	0.0004	0.0060
20;40	0.0150	0.0023	0.0117	0.0025	0.0091	0.0045	0.0066	0.0050	0.0002	0.0054
20;50	0.0142	0.0021	0.0107	0.0024	0.0107	0.0043	0.0047	0.0048	0.0025	0.0051
30;10	0.0144	0.0046	0.0234	0.0042	0.0068	0.0084	0.0197	0.0078	0.0078	0.0087
30;20	0.0128	0.0027	0.0148	0.0026	0.0080	0.0054	0.0110	0.0052	0.0016	0.0059
30;30	0.0115	0.0021	0.0122	0.0021	0.0071	0.0043	0.0082	0.0041	0.0005	0.0049
30;40	0.0113	0.0018	0.0101	0.0018	0.0072	0.0037	0.0060	0.0039	0.0012	0.0044
30;50	0.0114	0.0016	0.0095	0.0017	0.0075	0.0034	0.0046	0.0037	0.0020	0.0041
40;10	0.0146	0.0044	0.0221	0.0037	0.0077	0.0081	0.0195	0.0071	0.0060	0.0081
40;20	0.0103	0.0024	0.0141	0.0023	0.0071	0.0039	0.0077	0.0038	0.0011	0.0054
40;30	0.0110	0.0019	0.0117	0.0018	0.0055	0.0040	0.0070	0.0037	0.0011	0.0044
40;40	0.0092	0.0015	0.0096	0.0016	0.0046	0.0033	0.0056	0.0033	0.0003	0.0039
40;50	0.0101	0.0014	0.0088	0.0014	0.0065	0.0030	0.0041	0.0030	0.0002	0.0035
50;10	0.0134	0.0042	0.0023	0.0037	0.0052	0.0077	0.0198	0.0067	0.0071	0.0080
50;20	0.0095	0.0017	0.0148	0.0021	0.0045	0.0046	0.0112	0.0043	0.0022	0.0051
50;30	0.0091	0.0017	0.0112	0.0016	0.0043	0.0036	0.0071	0.0033	0.0006	0.0040
50;40	0.0087	0.0014	0.0091	0.0014	0.0044	0.0030	0.0048	0.0029	0.0005	0.0035
50;50	0.0082	0.0012	0.0082	0.0012	0.0041	0.0027	0.0040	0.0027	0.0002	0.0032

Çizelge 2. Kapsama olasılıkları ve aralık uzunlukları

n1,n2	p1;p2		p1;p2		p1;p2		p1;p2		p1;p2	
	0,1;0,9		0,9;0,1		0,3;0,7		0,7;0,3		0,5;0,5	
	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu
10;10	0,9581	0,3463	0,9597	0,3348	0,9438	0,4933	0,9448	0,4775	0,9457	0,5061
10;20	0,9641	0,2627	0,9417	0,2406	0,6452	0,3925	0,9333	0,4032	0,9336	0,4124
10;30	0,953	0,2935	0,9114	0,1629	0,9324	0,335	0,9049	0,2727	0,9127	0,3578
10;40	0,9428	0,1388	0,8857	0,1508	0,9155	0,2907	0,8807	0,2492	0,8958	0,3006
10;50	0,9295	0,2033	0,8598	0,2117	0,9039	0,2869	0,8548	0,2865	0,8645	0,2826
20;10	0,9342	0,3394	0,9641	0,2438	0,9303	0,3989	0,9451	0,3973	0,9349	0,4127
20;20	0,9676	0,2425	0,9672	0,2089	0,9515	0,3396	0,9554	0,3193	0,951	0,3567
20;30	0,9675	0,2461	0,9559	0,157	0,9488	0,2675	0,9447	0,2516	0,9428	0,3201
20;40	0,9659	0,1511	0,9444	0,2145	0,9471	0,2757	0,9343	0,2661	0,9354	0,2917
20;50	0,9603	0,2044	0,9272	0,1344	0,9401	0,2678	0,9156	0,2606	0,9231	0,2687
30;10	0,9124	0,2563	0,9553	0,1989	0,9095	0,347	0,9343	0,2626	0,9163	0,3529
30;20	0,9594	0,2361	0,9708	0,1841	0,9474	0,3145	0,9546	0,2781	0,9448	0,3200
30;30	0,9664	0,2124	0,9686	0,1472	0,9552	0,2871	0,9519	0,2539	0,9479	0,2857
30;40	0,9703	0,1753	0,9645	0,1782	0,9543	0,2548	0,9443	0,2703	0,9447	0,2685
30;50	0,9677	0,1491	0,9531	0,1739	0,9504	0,2309	0,9394	0,2248	0,9379	0,2432
40;10	0,8844	0,2229	0,9449	0,1983	0,8825	0,3045	0,9182	0,3036	0,8963	0,3105
40;20	0,9443	0,1729	0,9649	0,2217	0,9443	0,2359	0,951	0,2634	0,9358	0,2921
40;30	0,9625	0,1679	0,9673	0,1972	0,9487	0,2475	0,9559	0,2523	0,9441	0,2629
40;40	0,9663	0,1664	0,9663	0,1685	0,952	0,238	0,9529	0,2234	0,9449	0,2499
40;50	0,9693	0,1377	0,9624	0,1699	0,9541	0,2112	0,9502	0,1967	0,9431	0,2385
50;10	0,8608	0,1631	0,9286	0,1824	0,8537	0,2193	0,9009	0,2885	0,8692	0,2643
50;20	0,9532	0,1768	0,9655	0,1563	0,919	0,0262	0,9415	0,2421	0,9232	0,2683
50;30	0,954	0,1611	0,9721	0,1582	0,9424	0,2479	0,9529	0,2247	0,6405	0,253
50;40	0,9638	0,1479	0,968	0,1376	0,9468	0,2106	0,955	0,2386	0,9429	0,2379
50;50	0,9666	0,1637	0,9666	0,1736	0,9526	0,2192	0,9519	0,2091	0,947	0,2242

Ayrıca p_1 ve p_2 için önerilen önsel dağılımların sırasıyla Beta (a,b) ve Beta (c,d) olduğu düşünüldüğünde önsel dağılım parametreleri a,b,c ve d'nin farklı değerleri için R' nin en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin tahmini risk (ER) değerleri simülasyonla elde edilmiş ve Çizelge 3 ve Çizelge 4 ' de verilmiştir.

Çizelge 3. a=5 b=3 c=2 d=2 İçin Tahmini Riskler

n	ER_{MLE}	ER_{BAYES}
10	0,0159	0,0133
20	0,0071	0,0069
50	0,0031	0,0030

Çizelge 4. a=5 b=5 c=2 d=2 İçin Tahmini Riskler

n	ER_{MLE}	ER_{BAYES}
10	0,0198	0,0140
20	0,0077	0,0070
50	0,0035	0,0032

5.2. EP DAĞILIMI

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1} \sim EP(\lambda_1, \beta)$ ve $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \sim EP(\lambda_2, \beta)$ olduğu durumda $R = P(Y < X)$ ' in çeşitli n_1, n_2, p_1, p_2 ve θ değerleri için en çok olabilirlik tahmin edicisine ilişkin ortalama yan ve ortalama hata kareler ortalaması değerleri Çizelge 5' de verilmiştir. Ayrıca ayrı durumlar için R ' nin en çok olabilirlik tahminine dayalı asimptotik güven aralıklarının R ' yi kapsama olasılıkları ve ortalama aralık uzunlukları Çizelge 6' da verilmiştir.

Çizelge 5. En çok olabilirlik tahminlerinin yan ve MSE değerleri

n_1, n_2	λ_1, λ_2		λ_1, λ_2		λ_1, λ_2		λ_1, λ_2	
	1;1		1;2		2;1		2;2	
	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE	Yan	MSE
20,20	-0.0011	0.0062	-0.0064	0.0066	0.0037	0.0066	-0.0013	0.0071
20,25	-0.0025	0.0058	-0.0073	0.0061	0.0023	0.0061	-0.0024	0.0065
20,30	-0.0035	0.0054	-0.0079	0.0057	0.0014	0.0057	-0.0031	0.0061
20,35	-0.0044	0.0051	-0.0083	0.0054	0.0005	0.0054	-0.0037	0.0058
25,20	0.0007	0.0058	-0.0043	0.0062	0.0051	0.0061	0.0005	0.0066
25,25	-0.0008	0.0052	-0.0053	0.0055	0.0037	0.0055	-0.0007	0.0059
25,30	-0.0020	0.0048	-0.0059	0.0051	0.0024	0.0051	-0.0017	0.0055
25,35	-0.0024	0.0045	-0.0061	0.0047	0.0018	0.0047	-0.0021	0.0051
30,20	0.0016	0.0053	-0.0033	0.0057	0.0059	0.0056	0.0012	0.0061
30,25	0.0000	0.0048	-0.0041	0.0050	0.0041	0.0050	-0.0001	0.0054
30,30	-0.0006	0.0044	-0.0044	0.0046	0.0033	0.0046	-0.0005	0.0049
30,35	-0.0013	0.0041	-0.0048	0.0043	0.0026	0.0043	-0.0011	0.0046

Çizelge 6. Kapsama olasılıkları ve aralık uzunlukları

n_1, n_2	λ_1, λ_2		λ_1, λ_2		λ_1, λ_2		λ_1, λ_2	
	1;1		1;2		2;1		2;2	
	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu	Kapsama Olasılığı	Aralık Uzunluğu
20,20	0.9570	0.3471	0.9531	0.3388	0.9508	0.3383	0.9405	0.3406
20,25	0.9571	0.3296	0.9522	0.3224	0.9485	0.3208	0.9386	0.3234
20,30	0.9572	0.3175	0.9532	0.3111	0.9490	0.3086	0.9398	0.3116
20,35	0.9572	0.3085	0.9528	0.3026	0.9479	0.2995	0.9395	0.3027
25,20	0.9549	0.3296	0.9474	0.3210	0.9492	0.3221	0.9376	0.3235
25,25	0.9543	0.3113	0.9490	0.3038	0.9485	0.3037	0.9382	0.3055
25,30	0.9562	0.2984	0.9497	0.2916	0.9487	0.2906	0.9381	0.2928
25,35	0.9574	0.2888	0.9531	0.2826	0.9486	0.2809	0.9395	0.2833
30,20	0.9537	0.3176	0.9469	0.3089	0.9491	0.3109	0.9357	0.3116
30,25	0.9571	0.2985	0.9494	0.2908	0.9516	0.2916	0.9398	0.2929
30,30	0.9566	0.2849	0.9531	0.2780	0.9492	0.2779	0.9413	0.2795
30,35	0.9577	0.2747	0.9523	0.2684	0.9520	0.2677	0.9417	0.2695

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, stress-dayanıklılık güvenilirliği $R=P(Y < X)$ 'nin $X \sim EG(p_1, \theta)$ ve $Y \sim EG(p_2, \theta)$ olması durumunda en çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicileri elde edilmiştir. En çok olabilirlik tahminlerinin yan ve MSE değerleri açısından performansları simülasyon çalışmasıyla incelenmiştir. Sonuçlar göstermiştir ki R 'nin en çok olabilirlik tahminleri asimptotik olarak yansız ve tutarlı tahminlerdir. Çünkü örnek hacmi büyükçe R 'nin yan ve MSE değerleri sıfıra yaklaşmaktadır. Bu durum Çizelge 1'den görülmektedir. Ayrıca, R 'nin en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri tahmini riskler açısından karşılaştırılmış ve küçük örnek hacimlerinde Bayes tahmin edicilerinin risklerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinden daha küçük olduğu dolayısıyla daha küçük örnek hacimlerinde Bayes tahmin edicilerinin tercih edilebileceğini söyleyebiliriz. Ancak büyük örnek hacimlerinde her iki tahmin edici arasında önemli bir fark görülmemektedir (Çizelge 3 ve Çizelge 4).

KAYNAKLAR

- Adamidis, K., Loukas, S., 1998. A lifetime distribution with decreasing failure rate. *Statistics & Probability Letters* 39, 35-42.
- Awad, A.M., Azzam, M.M. and Hamadan, M.A., 1981, Some inference result in $P(Y < X)$ in the bivariate exponential model, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 10, 2515-2524.
- Chankandi, M., Ganjali, M., 2009, On Some Lifetime Distribution With Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 4433-4440.
- Church, J. D. and Harris, B., 1970, The estimation of reliability from stress strength relationships, *Technometrics*, 12, 49-54.
- Constantine, K. and Karson, M., 1986, The estimation of $P(Y < X)$ in gamma case, *Communication in Statistics-Computations and Simulations*, 15, 365-388.
- Hajebi, M., D. Rezaei, S., Nadarajah, S., 2013, An exponential-negative binomial distribution, *REVSTAT*, 11, 191-210.
- Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M., 2003, The Stress-Strength Model and its Generalization: Theory and Applications, *World Scientific*, Singapore.
- Kundu, D. and Gupta, R.D., 2005, Estimation of $R=P(Y < X)$ for the generalized exponential distribution, *Metrika*, 61, 291-308.
- Kundu, D. and Gupta, R.D., 2006, Estimation of $R=P(Y < X)$ for Weibull distribution, *IEEE Trans.Reliab.*, 55, 270-280.
- Kuş, C., 2007, A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51, 4497-4509.
- Lio, Y. L. and Tsai, T.R., 2012, Estimation of $\delta=P(X < Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure censored samples, *Journal of Applied Statistics*, 39, 309-322.
- Roussas, G.G., 1973. A First Course in Mathematical Statistics. Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A.
- Saraçoğlu, B., Kınacı, İ. and Kundu, D., 2012, On estimation of $R=P(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82, 729-744.
- Tahmasbi, R., Rezaei, S., 2008, A Two Parameter Lifetime Distribution With Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, 52, 3889-3901.
- Woodward, W.A. and Kelley, G.D., 1977, Minimum variance unbiased estimation of $P(Y < X)$ in the normal case, *Technometrics*, 19, 95-98

ÖZGEÇMİŞ KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Adem YILMAZ
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : İzmir / 09.03.1986
Telefon : 05557191286
Faks :
e-mail : admylmz_35@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	Şirinyer Lisesi, Buca, İzmir	2004
Üniversite	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2009
Yüksek Lisans	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	-
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR*