

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**$\delta^* - \beta - I$  – AÇIK KÜME VE SÜREKLİLİĞİN  
İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA  
DAĞILIMI ÜZERİNE**

Yasin YAZLIK

078202031002

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI  
EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Konya, 2009

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğini Bölümü Üyesi Prof. Dr. Eşref HATIR yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı büyük bir titizlikle ve sabırla takip ederek çalışmamın her bir safhasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm çalışmalarımın yönlendirilmesinde ve yürütülmesinde yol göstericiliğinden yararlandığım, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Eşref HATIR'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunar, ayrıca bana her zaman destek olan Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN'e ve sevgili eşim Derya Özlem YAZLIK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

**Yasin YAZLIK**

## **ÖZET**

Yüksek Lisans Tezi

**$\delta^* - \beta - I -$  AÇIK KÜME VE SÜREKLİLİĞİN  
İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA  
DAĞILIMI ÜZERİNE**

Yasin YAZLIK

Selçuk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Eşref HATIR

2009, Sayfa: 35

Jüri: Prof. Dr. Eşref HATIR

Doç. Dr. Cengiz ÇINAR

Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme,  $\delta_\beta^* - B$ -küme ve  $\delta_\beta^* - t$ -küme tanımlarını verdik ve bu kümelerin literatürde yer alan diğer kümelerle arasındaki ilişkiyi inceledik.

İkinci bölümde ise birinci bölümde tanımladığımız kümeler yardımıyla  $\delta^* - \beta$ -I-sürekli fonksiyon,  $\delta_\beta^* - B$ -sürekli fonksiyon olarak adlandırılan iki yeni sürekli fonksiyon çeşidi tanımlayıp, öncelikle bunların bazı karakterizasyonlarını elde ettik. Daha sonra diğer bazı fonksiyon çeşitleri ile karşılaştırdık.

Anahtar Kelime:  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme,  $\delta_\beta^* - B$ -küme,  $\delta_\beta^* - t$ -küme,  
 $\delta^* - \beta$ -I-sürekli fonksiyon ve  $\delta_\beta^* - B$ -sürekli fonksiyon

## **ABSTRACT**

Master Thesis

### **ON THE DISTRIBUTION**

**OF  $\delta^* - \beta - I$  - OPEN SET AND CONTINUITY**

**IN THE IDEAL TOPOLOGICAL SPACES**

Yasin YAZLIK

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Eşref HATIR

2009, Page : 35

Juri : Prof. Dr. Eşref HATIR

Doç. Dr. Cengiz ÇINAR

Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN

This study consists of two parts. In the first part, we gave definitions of  $\delta^* - \beta$ -*I*-open set,  $\delta_\beta^*$ -*B*-set and  $\delta_\beta^*$ -*t*-set, and also examined relationships between these sets and other sets given in literature.

In the second part, defining two new continuous function types called  $\delta^* - \beta$ -*I*-continuous function and  $\delta_\beta^*$ -*B*-continuous function via defined sets in first part. First of all we have obtained some their characterizations. Then, we compared these functions with several other function types.

Key Words:  $\delta^* - \beta$ -*I*-open set,  $\delta_\beta^*$ -*B*-set,  $\delta_\beta^*$ -*t*-set,  $\delta^* - \beta$ -*I*-continuous function and  $\delta_\beta^*$ -*B*-continuous function.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	vi
GÖSTERİMLER.....	vii
GİRİŞ.....	1
1.İDEAL TOPOLOJİK UZAYLarda BAZI KÜME ÇEŞİTLERİ.....	2
1.1 İdeal Topolojik Uzay.....	2
1.2 İdeal Topolojik Uzaylarda BAZI KÜME ÇEŞİTLERİ.....	5
1.3 $\delta^*$ - $\beta$ -I-Küme ve Özellikleri.....	9
1.4 $\delta_{\beta}^*$ -B-Küme, $\delta_{\beta}^*$ -t-Küme ve Özellikleri.....	16
2. SÜREKLİ FONKSİYON DAĞILIMLARI.....	24
2.1 Süreklliliğin İdeal Topolojik Uzaylarda Yeni Bir Dağılımı.....	24
3. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	33
4. KAYNAKLAR.....	34

## GÖSTERİMLER

$\forall$	Her
$\in$	Ait
$\notin$	Ait değil
$\neq$	Eşit değil
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\Leftarrow$	Yeter şart
$\emptyset$	Boş küme
$X$	Evrensel küme
$P(X)$	Kuvvetkümesi
$A \subset B$	$B, A$ kümesini kapsar
$A \not\subset B$	$B, A$ kümesini kapsamaz
$A \cap B$	$A$ kesişim $B$
$I$	İdeal
$\tau$	Topolojik yapı
$(X, \tau)$	Topolojik uzay
$(X, \tau, I)$	İdeal topolojik uzay
$\mathfrak{g}_{(x)}$	$(X, \tau)$ uzayında $x$ noktasının açık komşuluklar ailesi
$\tau_{ A}$	$A \subset X$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi
$I_{ A}$	$A \subset X$ kümesi üzerindeki ideal

$\overset{o}{A}$	$A \subset X$ kümelerinin içi
$\overset{o}{A}^{\delta I}$	$A \subset X$ kümelerinin $\delta - I -$ içî
$\overline{A}$	$A \subset X$ kümelerinin kapanışı
$\overline{A}^{\delta}$	$A \subset X$ kümelerinin $\delta -$ kapanışı
$\overline{A}^{\delta I}$	$A \subset X$ kümelerinin $\delta - I -$ kapanışı
$\overline{(X - A)}^* = \overset{o}{A}^*$	$A \subset X$ kümelerinin tümleyeninin kuratowski kapanışı
$\overset{o_U}{A}$	Alt uzayında $A$ kümelerinin içi
$\overline{A}^{\delta I_U}$	Alt uzayda $A$ kümelerinin $\delta - I$ -kapanışı
$\overline{A}^{*_U}$	Alt uzayda $A$ kümelerinin Kuratowski kapanış işlemi
$\alpha O(X)$	$(X, \tau)$ uzayındaki tüm $\alpha$ açık kümelerin ailesi
$\beta O(X)$	$(X, \tau)$ uzayındaki tüm $\beta$ açık kümelerin ailesi
$PO(X)$	$(X, \tau)$ uzayındaki tüm pre açık kümelerin ailesi
$\delta\beta O(X)$	$(X, \tau)$ uzayındaki tüm $\delta - \beta -$ açık kümelerin ailesi
$SO(X)$	$(X, \tau)$ uzayındaki tüm semi – açık kümelerin ailesi
$SIO(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm semi – $I$ – açık kümelerin ailesi
$PIO(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm pre – $I$ – açık kümelerin ailesi
$\alpha IO(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $\alpha - I -$ açık kümelerin ailesi
$\beta IO(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $\beta - I -$ açık kümelerin ailesi
$\delta^* \beta IO(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $\delta^* - \beta - I -$ açık kümelerin ailesi

$\beta^*IO(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $\beta^* - I$ – açık kümelerin ailesi
$BI(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $B - I$ – kümeler ailesi
$SBI(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm strongly – $B - I$ kümeler ailesi
$B^*I(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $B^* - I$ – kümeler ailesi
$\delta_\beta B(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $\delta_\beta - B$ – kümeler ailesi
$\delta_\beta^* B(X)$	$(X, \tau, I)$ uzayındaki tüm $\delta_\beta^* - B$ – kümeler ailesi

## GİRİŞ

İlk defa 1933 yılında Kuratowski [6] bir topolojik uzayda ideal kavramını kullanarak kümenin lokal fonksiyonu kavramını tanımladı ve bu fonksiyonun sağladığı özellikleri inceledi. Daha sonra Vaidyanathaswamy lokal fonksiyon kavramı yardımıyla bir kapanış işlemi tanımladı, bu işleminden yeni bir topoloji oluşturdu ve bu topolojinin tabanını elde etti.

1990 yılında D. Janković ve T.R. Hamlet [5] lokal fonksiyon kavramı ile ilgili o zamana kadar yapılan tüm çalışmaları ayrıntılı bir şekilde incelediler ve bu kavramla ilgili yeni özellikler buldular.

1933 yılında tanımlanmış olan lokal fonksiyon kavramı ile ilgili zamanımıza kadar bir çok araştırmalar yapılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Günümüzde de araştırmalar için önemli çalışma konusu olmaya devam etmektedir.

Bu çalışmada;  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme,  $\delta_\beta$ -B-küme,  $\delta_\beta$ -t-küme,  $\delta^* - \beta$ -I-sürekli ve  $\delta_\beta$ -B-sürekli fonksiyonları tanımlayarak bunların literatürde yer alan diğer kümelerle arasındaki ilişkiler incelenip bilgi verilecektir.

## 1.BÖLÜM

### **İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI KÜME ÇEŞİTLERİ**

Bu bölüm, iki kesimden oluşmaktadır.

Birinci kesimde, çalışmamız için gerekli olan bazı kavramları ele aldık.

İkinci kesimde ise ideal topolojik uzayda bazı küme çeşitlerini ve bu kümeler arasındaki ilişkiyi inceledik.

#### **1.1. İdeal Topolojik Uzaylar**

**Tanım 1.1.1 ([5])** Boştan farklı bir  $X$  kümesi verilsin.  $P(X)$ ,  $X$ 'in kuvvet kümesi olmak üzere; boş olmayan bir  $I \subset P(X)$  ailesi, eğer

- a)  $A \in I$  ve  $B \subset A$  iken,  $B \in I$  (kalıtımsallık özelliği)
- b)  $A, B \in I$  iken  $(A \cup B) \in I$  (sonlu toplamsallık özelliği)

şartlarını sağlıyorsa; bu takdirde  $I$  ailesine  $X$  kümesi üzerinde bir idealdir denir.

Bazı idealler; minimal ideal  $I = \{\emptyset\}$ , hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin ideali  $(I_n)$ , sonlu kümelerin ideali  $(I_f)$ , maksimal ideal  $I = P(X)$  olarak bilinir([5]).

**Tanım 1.1.2 ([5])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $A \subset X$  kümesi verilsin ve  $I$  ailesi,  $X$  kümesi üzerinde ideal olsun.  $A^*(I, \tau) = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{G}_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \notin I\}$  kümesine  $A$  kümesinin  $I$  idealı ve  $\tau$  topolojisine bağlı lokal fonksiyonu denir.

Kısaca  $A^*(I, \tau)$  yerine  $A^*$  gösterimini kullanacağız.

**Örnek 1.1.1 ([5])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $A \subset X$  kümesi verilsin ve  $I$  ailesi,  $X$  kümesi üzerinde ideal olsun. Eğer

1)  $I = \{\emptyset\}$  ise,

$$\begin{aligned} A^*(I, \tau) &= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{G}_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \notin I\} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{G}_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \notin \{\emptyset\}\} \text{ olduğundan } A^* = \overline{A} \text{ olur.} \end{aligned}$$

2)  $I = P(X)$  ise,

$$\begin{aligned} A^*(I, \tau) &= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{G}_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \notin I\} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{G}_{(x)} \text{ için}, (U \cap A) \notin P(X)\} \end{aligned}$$

olduğundan,  $A^* = \emptyset$  olur.

Tanım 1.1.1' de geçen lokal fonksiyonun literatürdeki özellikleri aşağıdaki gibidir.

**Önerme 1.1.1 ([6])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $X$  kümesi üzerinde bir  $I$  idealı ile  $A, B \subset X$  kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a)  $A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^*$
- b)  $(A^*)^* \subset A^*$
- c)  $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$
- d)  $U \in \tau \Rightarrow U \cap A^* = U \cap (U \cap A^*) \subset (U \cap A)^*$
- e)  $A^* = \overline{A^*} \subset \overline{A}$
- f)  $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$

**Tanım 1.1.3 ([7])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ile  $X$  kümesi üzerinde bir  $I$  idealı verilsin. Herhangi bir  $A \subset X$  kümesi için  $CI^*(A) = A \cup A^*$  şeklinde tanımlanan  $CI^* : P(X) \rightarrow P(X)$  fonksiyonu

a)  $CI^*(\emptyset) = \emptyset$

- b)  $A \in P(X) \Rightarrow A \subset Cl^*(A)$
- c)  $A, B \in P(X) \Rightarrow Cl^*(A \cup B) = Cl^*(A) \cup Cl^*(B)$
- d)  $A \in P(X) \Rightarrow Cl^*(Cl^*(A)) = Cl^*(A)$

şartlarını sağlıyorsa  $Cl^*$  işlemine Kuratowski kapanış işlemi denir.

Bu çalışmada  $Cl^*(A)$  gösterimi yerine  $\overline{A}^*$  gösterimini kullanacağız.

**Tanım 1.1.4 ([7])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ile  $X$  kümesi üzerinde bir  $I$  idealı verilsin. Bu takdirde,  $\tau^*(I) = \{U \subset X | \overline{(X-U)}^* = (X-U)\}$  şeklinde tanımlanan  $\tau^*(I)$  ailesi,  $X$  kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Bu topoloji  $\tau$  topolojisinden daha incedir.

1960 yılında Vaidyanathaswamy [7]  $\tau^*(I)$  topolojisinin tabanını tanımladı.

**Tanım 1.1.5 ([7])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ile  $X$  kümesi üzerinde bir  $I$  idealı verilsin. Bu takdirde;  $\beta(I, \tau) = \{U \setminus I | U \in \tau, I \in I\}$  ailesi  $\tau^*(I)$  topolojisinin tabanıdır.

Janković ve Hamlett [5], topolojik uzay ve ideal kavramlarını kullanarak, ideal topolojik uzay adında yeni bir kavram tanımladılar.

**Tanım 1.1.6 ([5])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ile  $X$  kümesi üzerinde tanımlı  $I$  idealı verilsin.  $I$  idealı ile birlikte  $(X, \tau)$  topolojik uzayına, ideal topolojik uzay denir ve  $(X, \tau, I)$  sembolü ile gösterilir.

**Tanım 1.1.7 ([5])**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  kümesi verilsin. Eğer  $A^* \subset A$  ise  $A$  kümesine  $\tau^*$  – kapalı ya da  $*$  – kapalı denir.

**Önerme 1.1.2 ([5])**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  kümesi verilsin. Eğer  $A \subset A^*$  ise  $A^* = \overline{A^*} = \overline{\overline{A}}^* = \overline{A}$  dir.

## 1.2. İdeal Topolojik Uzaylarda Bazı Küme Çeşitleri ve Özellikleri

Bu kısımda öncelikle ideal topolojik uzaylarda tanımlanan küme çeşitlerini ele alıp, bu kümeler arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. İdeal topolojik uzaylardaki bu küme çeşitlerinden yararlanarak elde ettiğimiz küme tanımını verip, bu kümenin diğer kümelerle olan ilişkisini inceleyeceğiz.

**Tanım 1.2.1**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ile herhangi bir  $A \subset X$  kümesi verilsin. Eğer,

- a)  $A \subset \overline{\overset{o}{A}}$  ise;  $A$  kümesine semi-açık küme ([13]),
- b)  $A \subset \overset{o}{\overline{A}}$  ise;  $A$  kümesine pre-açık küme ([14]),
- c)  $A \subset \overset{o}{\overline{\overset{o}{A}}}$  ise;  $A$  kümesine  $\beta$ -açık küme ([15]),
- d)  $A \subset \overset{o}{\overline{\overset{o}{A}}}$  ise;  $A$  kümesine  $\alpha$ -açık küme ([16]),

denir.

**Tanım 1.2.2**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında  $A \subset X$  kümesine,

- a)  $A \subset \overset{o}{\overline{A}}^*$  ise; pre- $I$ -açık küme ([17]),
- b)  $A \subset \overset{o}{\overline{A}}^*$  ise; semi- $I$ -açık küme ([11]),
- c)  $A \subset \overset{o}{\overline{\overset{o}{A}}}^*$  ise;  $\beta$ - $I$ -açık küme ([11]),
- d)  $A \subset \overset{o}{\overline{\overset{o}{A}}}^*$  ise;  $\alpha$ - $I$ -açık küme ([11])

denir.

**Tanım 1.2.3**  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $A \subset X$  kümesine,

- a)  $A = \overset{o}{\overline{A}}$  ise; regüler açık ([2])
- b)  $A = \overset{o}{\overline{A}}$  ise; regüler kapalı ([2])

denir.

$\delta$ -açık ve  $\delta$ -kapalı kume kavramları N. V. Veličko [3] tarafından 1968 yılında aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**Tanım 1.2.4 ([3])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $A \subset X$  kumesi verilsin.

a)  $A$ 'nın  $\delta$ -açık kume olması için gerek ve yeter şart

$$A = \overset{\circ}{A}{}^\delta = \{x \in X \mid x \in U \subset A, U = \overset{\circ}{U}, U \subset X\}$$

b)  $A$ 'nın  $\delta$ -kapalı olması için  $\Leftrightarrow A = \overline{A}{}^\delta = \{x \in X \mid A \cap \overset{\circ}{U} \neq \emptyset, U \in \tau, x \in U\}$

**Önerme 1.2.1 ([3])**  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $A, B \subset X$  kumeleri verilsin.

a)  $\overline{A} \subseteq \overline{A}{}^\delta$

b)  $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}{}^\delta$

c)  $\overline{A \cap B}{}^\delta \subseteq \overline{A}{}^\delta \cap \overline{B}{}^\delta$

d)  $\overline{A \cup B}{}^\delta = \overline{A}{}^\delta \cup \overline{B}{}^\delta$

**Önerme 1.2.2**  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $A \subset X$  kumesi verilsin.

a)  $A$  açık ise,  $\overline{A}{}^\delta = \overline{A}$  dır([3]).

b)  $A$  kapalı ise,  $\overset{\circ}{A}{}^\delta = \overset{\circ}{A}$  'dir ([21]).

N. V. Veličko [3] tarafından tanımlanan  $\delta$ -açık kümelerden daha zayıf kume çeşitleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

**Tanım 1.2.5**  $(X, \tau)$  topolojik uzayında  $A \subset X$  kumesine

a)  $A \subset \overline{A}{}^\delta$  ise;  $\delta$ -pre-açık kume ([20])

b)  $A \subset \overline{\overline{A}{}^\delta}$  ise;  $\delta$ - $\beta$ -açık kume ([10]),

- c)  $A \subset \overline{\overline{A}^{\delta}}^*$  ise;  $\beta^* - I$  -açık küme ([22]) denir.

Ş. Yüksel, A. Açıkgöz ve T. Noiri [4],  $\delta$  -açık küme tanımı ve regüler açık küme kavramlarını ideal topolojik uzaylara aşağıdaki gibi aktardılar.

**Tanım 1.2.6 ([4])**  $(X, \tau, I)$  topolojik uzayında  $A \subset X$  kümesi verilsin.  $A$  kümelerinin  $R\text{-}I$ -açık olması için  $\overline{\overline{A}^{\delta}}^* = A$  olmalıdır. Tümleyeni  $R\text{-}I$ -açık olan kümeye  $R\text{-}I$ -kapalı küme denir.

**Tanım 1.2.7 ([4])**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  kümesi ve  $x \in X$  noktası verilsin.

- a)  $A$ 'nın  $\delta\text{-}I$  -kapalı küme olması için gerek ve yeter şart  $A$ 'nın  $\delta_I$  -kapanışının  $A = \overline{A}^{\delta_I} = \{x \in X \mid A \cap \overline{U}^* \neq \emptyset, \forall U \in \tau, x \in U\}$  olmasıdır.
- b) Tümleyeni  $\delta\text{-}I$  -kapalı olan kümeye  $\delta\text{-}I$  -açık küme denir.

**Sonuç 1.2.1** Tanım 1.2.4 (b) ve Tanım 1.2.7 (a)'dan her  $\delta\text{-}I$  -kapalı kümelerin  $\delta$  -kapalı küme olduğu açıktır.

**Önerme 1.2.3**  $(X, \tau, I)$  topolojik uzayında  $A, B \subset X$  kümeleri verilsin. Bu durumda

- a)  $A \subseteq \overline{A}^{\delta_I}$  ([4])
- b)  $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A}^{\delta_I} \subseteq \overline{B}^{\delta_I}$  ([4])
- c)  $\overline{A \cup B}^{\delta_I} = \overline{A}^{\delta_I} \cup \overline{B}^{\delta_I}$
- d)  $\overline{A \cap B}^{\delta_I} \subseteq \overline{A}^{\delta_I} \cap \overline{B}^{\delta_I}$  olacaktır.

**İspat.**

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \overline{A \cup B}^{\delta I} = \{x \in X \mid (A \cup B) \cap \overset{\circ}{U}^* \neq \emptyset, U \in \tau, x \in U\} \\
& = \{x \in X \mid (A \cap \overset{\circ}{U}^*) \cup (B \cap \overset{\circ}{U}^*) \neq \emptyset, U \in \tau, x \in U\} \\
& = \{x \in X \mid A \cap \overset{\circ}{U}^* \neq \emptyset \text{ veya } B \cap \overset{\circ}{U}^* \neq \emptyset, U \in \tau, x \in U\} \\
& = \overline{A}^{\delta I} \cup \overline{B}^{\delta I}
\end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad (A \cap B) \subset A \rightarrow \overline{(A \cap B)}^{\delta I} \subset \overline{A}^{\delta I}$$

$(A \cap B) \subset B \rightarrow \overline{(A \cap B)}^{\delta I} \subset \overline{B}^{\delta I}$  olacaktır. Buradan

$\overline{(A \cap B)}^{\delta I} \subset \overline{A}^{\delta I} \cap \overline{B}^{\delta I}$  bulunur.

Önerme 1.2.3 (d) şıklının tersi genelde doğru değildir. Çünkü;  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{c\}\}$  olsun.  $A = \{a, b, d\}$  ve  $B = \{c\}$  kümelerini alalım.  $\overline{A}^{\delta I} = \{a, b, d\}$  ve  $\overline{B}^{\delta I} = \{a, c, d\}$  ise  $\overline{A}^{\delta I} \cap \overline{B}^{\delta I} = \{a, d\}$  olur. Ancak;  $A \cap B = \emptyset \rightarrow \overline{A \cap B}^{\delta I} = \emptyset$  olduğundan  $\overline{A}^{\delta I} \cap \overline{B}^{\delta I} \not\subset \overline{(A \cap B)}^{\delta I}$  elde edilir.

**Tanım 1.2.8 ([22])**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  kümesi verilsin. Eğer  $A \subset \overline{A}^{\delta I}$  ise,  $A$  kümesine  $pre^*-I$ -açık küme denir.

**Teorem 1.2.1**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında  $A \subset X$  kümesi verilsin.

- a) Her  $\alpha$ - $I$ -açık küme,  $\alpha$ -açık kümedir([11]).
- b) Her semi- $I$ -açık küme, semi-açık kümedir([11]).
- c) Her pre- $I$ -açık küme, pre-açiktır([11]).
- d) Her  $\beta$ - $I$ -açık küme,  $\beta$ -açık kümedir([11]).
- e) Her  $\alpha$ - $I$ -açık küme, pre- $I$ -açık kümedir([11]).
- f) Her  $\alpha$ - $I$ -açık küme, semi- $I$ -açık kümedir([11]).
- g) Her pre- $I$ -açık küme,  $\beta$ - $I$ -açık kümedir([11]).
- h) Her semi-açık küme,  $\beta$ - $I$ -açık kümedir ([11]).

- i) Her açık küme,  $\alpha$ - $I$ -açık kümedir([11]).
- j) Her  $\alpha$ -açık küme, pre-açık kümedir.([11]).
- k) Her  $\beta$ -açık küme,  $\delta$ - $\beta$ -açık kümedir.([18]).
- l) Her pre-açık küme,  $pre^*$ - $I$ -açık kümedir([22]).
- m) Her  $pre^*$ - $I$ -açık küme,  $\delta$ -pre açık kümedir([22]).
- n) Her  $\delta$ -pre açık küme,  $\beta^*$ - $I$ -açık kümedir([22]).

**Uyarı 1.2.1** Teorem 1.2.1 gereğince önermelerin tersleri doğru değildir.

Teorem 1.2.1' deki önermelerin terslerinin genelde doğru olmadığı ilgili makalelerde verildi.

Şimdi Tanım 1.2.1, Tanım 1.2.2, Tanım 1.2.5 ve Tanım 1.2.8 de verilen genelleştirilmiş küme kavramlarından yararlanarak tanımladığımız  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümeyi tanımını verip diğer kümelerle olan ilişkilerini inceleyelim.

### 1.3 $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -KÜME VE ÖZELLİKLERİ

**Tanım 1.3.1**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  kümesi verilsin. Eğer

$A \subset \overline{A}^{\delta^*}$  ise;  $A$ 'ya  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık küme denir.

$(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzaydaki bütün  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümelerin ailesini  $\delta^*\beta IO(X)$  olarak göstereceğiz.

**Önerme 1.3.1**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  verilsin. Eğer

- a)  $A \in SIO(X)$  ise  $A \in \delta^*\beta IO(X)$  'dir.
- b)  $A$ ,  $\delta_I$ -kapalı ve  $A \in \delta^*\beta IO(X)$  ise  $A \in SIO(X)$ 'dır.

**İspat.**

a)  $A \in SIO(X)$  ise Tanım 1.2.2 gereği  $A \subset \overline{\overline{A}^*}$  yazılır. Önerme 1.2.3 (a)

kullanılarak  $\overline{A}^* \subset \overline{\overline{A}^*}$  elde edilir. Böylece;  $A \subset \overline{\overline{A}^*}$  yani  $A \in \delta^* \beta IO(X)$  olur.

b)  $A$ ,  $\delta_I$ -kapalı ise  $A = \overline{A}^*$  ve  $A \in \delta^* \beta IO(X)$  olduğundan,  $A \subset \overline{\overline{A}^*}$  olacaktır.

Buradan  $A \subset \overline{A}^* = \overline{A}$  olur ki, bu da istenendir.

**Önerme 1.3.2**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı verilsin.

- a) Her  $pre^*$ - $I$ -açık küme,  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümedir.
- b) Her  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık küme,  $\beta^*$ - $I$ -açık kümedir.
- c) Her  $\beta^*$ - $I$ -açık küme,  $\delta$ - $\beta$ - $I$ -açık kümedir.

**İspat.**

a)  $A$ ,  $(X, \tau, I)$  uzayının alt kümesi olsun.  $A$  kümesi,  $pre^*$ - $I$ -açık küm  
 $A \subset \overline{A}^* \subset \overline{\overline{A}^*}$  olduğundan,  $A$ ,  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümedir.

b)  $A$  kümesi,  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık küme ise,  $A \subset \overline{A}^* \subset \overline{\overline{A}^*}$  olduğundan,  $A$  kümesi  
 $\beta^*$ - $I$ -açiktır.

c) İspatı (a)'da kine benzer bir şekilde yapılır.

**Uyarı 1.3.1** Önerme 1.3.2'deki önermelerin tersleri genelde doğru değildir.

**Örnek 1.3.1**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{c\}\}$  olsun.  
 $A = \{a, b, d\}$  kümesi,  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık küme iken  $pre^*$ - $I$ -açık küme değildir. Gerçekten,

$\overline{A}^{\delta_I} = \{a, b, d\} \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta_I} = \{\overline{a}, \overline{b}, d\} = \{b\} \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta_I^*} = \{b\}^* = \{a, b, d\} \rightarrow$   
 $\overline{\overline{A}}^{\delta_I^*} = \{a, b, d\} \supset A$  olduğundan  $A$ ,  $\delta^* - \beta$ -I- açık kümedir. Ancak;  
 $\overline{\overline{A}}^{\delta_I} = \{\overline{a}, \overline{b}, d\} = \{b\} \rightarrow A \not\subset \overline{\overline{A}}^{\delta_I}$  olduğundan  $A$ ,  $pre^*$ -I- açık küme değildir.

**Örnek 1.3.2**  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{a\}\}$  olsun.  $A = \{b, c\}$  kümesi,  $\beta^*$ -I- açık küme iken  $\delta^* - \beta$ -I- açık küme değildir. Gerçekten

$\overline{A}^\delta = X \rightarrow \overline{\overline{A}}^\delta = X \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta^*} = X \supset A$  olduğundan  $A$ ,  $\beta^*$ -I- açık kümedir. Ancak;  
 $\overline{A}^{\delta_I} = \{b, c\} \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta_I} = \{\overline{b}, \overline{c}\} = \overline{\emptyset}^* = \emptyset$  olduğundan  $A$ ,  $\delta^* - \beta$ -I- açık küme değildir.

**Örnek 1.3.3**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{b\}\}$  olsun.  $A = \{a, b, d\}$  kümesi,  $\delta - \beta$ - açık küme iken,  $\beta^*$ -I- açık küme değildir. Gerçekten

$\overline{A}^\delta = \{a, b, d\} \rightarrow \overline{\overline{A}}^\delta = \{\overline{a}, \overline{b}, d\} = \{b\} \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta^*} = \{\overline{b}\} = \{a, b, d\} \supset A$  olduğundan  $A$ ,  $\delta - \beta$ - açık kümedir. Ancak;  $\overline{\overline{A}}^{\delta^*} = \{b\}^* = \emptyset \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta^*} \cup \overline{\overline{A}}^{\delta^*} = \overline{\overline{A}}^{\delta^*} = \{b\} \rightarrow A \not\subset \overline{\overline{A}}^{\delta^*}$  olduğundan,  $A$  kümesi  $\beta^*$ -I- açık küme değildir.

**Uyarı 1.3.2** Her  $\delta^* - \beta$ -I- açık küme,  $\delta$ -pre-açık küme değildir. Her  $\delta$ -pre-açık kümede  $\delta^* - \beta$ -I- açık küme değildir.

**Örnek 1.3.4**  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{a\}\}$  olsun.  $A = \{b, c\}$  kümesi,  $\delta$ -pre-açık küme iken,  $\delta^* - \beta$ -I- açık değildir. Gerçekten,

$\overline{A}^\delta = X \rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}}^\delta = X \supseteq A$  olduğundan  $A$ ,  $\delta$ -pre-çökük kümedir. Ancak; Örnek 1.3.2 gereğince  $A$  kümelerinin  $\delta^*$ - $\beta$ -I-çökük kümeye olmadığını biliyoruz.

**Örnek 1.3.5**  $X=\{a,b,c,d\}$ ,  $\tau=\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{c\}\}$  olsun.  $A=\{a,b,d\}$  kümeli,  $\delta^*$ - $\beta$ -I-çökük kümeye iken,  $\delta$ -pre-çökük değildir. Gerçekten, Örnek 1.3.1 gereğince  $A$  kümeli  $\delta^*$ - $\beta$ -I-çökük kümeye olduğunu biliyoruz. Ancak;

$$\overline{A}^\delta = \{a, b, d\} \rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}}^\delta = \{b\} \rightarrow A \not\subset \overset{\circ}{\overline{A}}^\delta$$

olduğundan,  $A$   $\delta$ -pre-çökük kümeye değildir.

**Uyarı 1.3.3** Her  $\beta^*$ -I-çökük kümeye  $\beta$ -çökük kümeye değildir. Her  $\beta$ -çökük kümeye  $\beta^*$ -I-çökük kümeye değildir.

**Örnek 1.3.6**  $X=\{a,b,c,d\}$ ,  $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{c\}\}$  olsun.  $A=\{b,c\}$  kümeli,  $\beta^*$ -I-çökük kümeye iken,  $\beta$ -çökük kümeye değildir. Gerçekten,  $\overline{A}^\delta = X \rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}}^\delta = X = X \rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}}^{\delta^*} = X \supset A$  olduğundan  $A$ ,  $\beta^*$ -I-çökük kümedir.

Ancak;  $\overline{A} = \{b, c, d\} \rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = \{b, \overset{\circ}{c}, d\} = \emptyset \rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} = \emptyset \rightarrow A \not\subset \overline{\overset{\circ}{A}}$  olduğundan,  $A$   $\beta$ -çökük kümeye değildir.

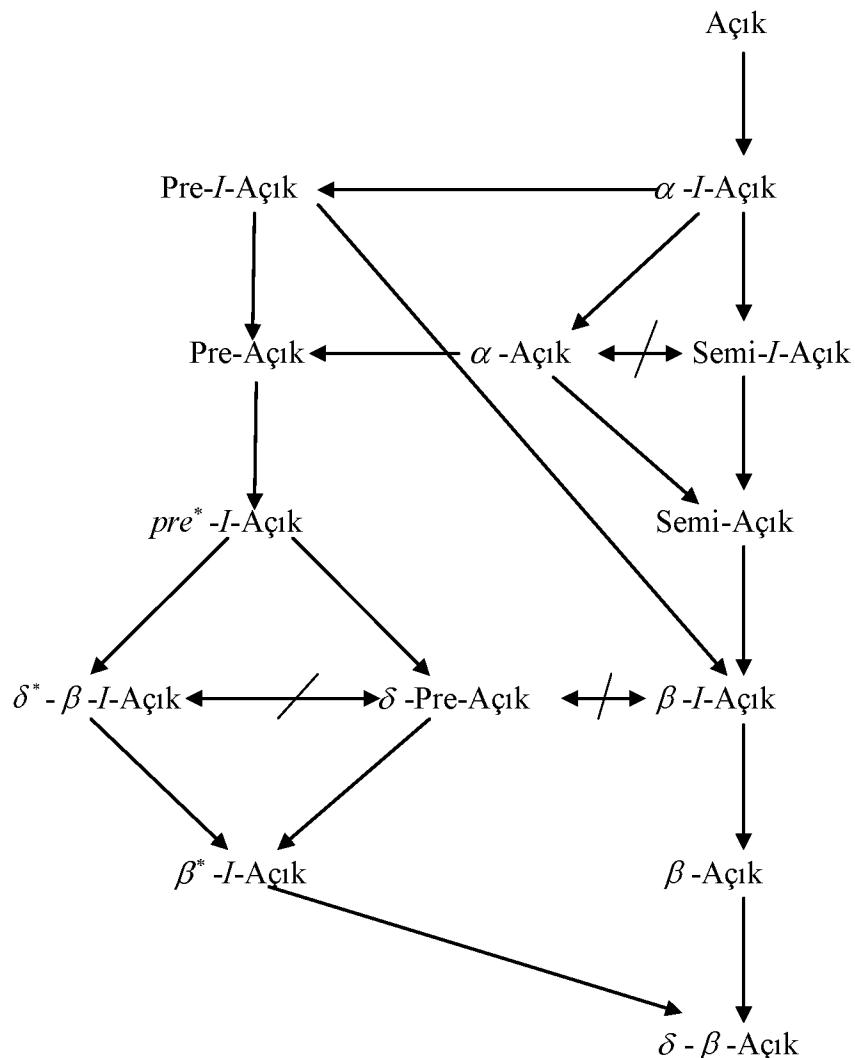
**Örnek 1.3.7**  $X=\{a,b,c,d\}$ ,  $\tau=\{\emptyset, X, \{b\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{b\}\}$  olsun.  $A=\{a,b\}$  kümeli  $\beta$ -çökük kümeye iken,  $\beta^*$ -I-çökük kümeye değildir. Gerçekten,

$$\overline{A} = \{a, b\} \rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = \{b\} \rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} = \{a, b\} \supset A$$

olduğundan,  $A$   $\beta$ -çökük kümedir. Ancak;

$$\overline{\overset{\circ}{A}}^* = \{b\} \rightarrow A \not\subset \overline{\overset{\circ}{A}}^*$$

olduğundan  $A$ ,  $\beta^*$ -I-çökük kümeye değildir.



Şekil 1.3.1

**Tanım 1.3.2**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  kümesi verilsin. Eğer  $X - A$  kümesi  $\delta^* - \beta$ - $I$ -açık ise,  $A$  kümesine  $\delta^* - \beta$ - $I$ -kapalı küme denir.

**Önerme 1.3.3**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında  $A \subset X$  kümesinin  $\delta^* - \beta$ - $I$ -kapalı olması için gerek ve yeter şart  $\overline{A^{\delta I}} \subset A$  olmalıdır.

**İspat.**  $\Rightarrow$ :  $A$  kümesi  $\delta^* - \beta$ -I-kapalı ise,  $X - A$  kümesi  $\delta^* - \beta$ -I-açık olacaktır. O

zaman  $(X - A) \subset \overline{\overline{A}^{\delta I}}^* = (X - \overline{A}^{\delta I})$  olur. Her iki tarafın tümleyenini alırsak  $\overline{A^{\delta I}} \subset A$  elde edilir.

$\Leftarrow$ :  $\overline{A^{\delta I}} \subset A$  olsun. Bu takdirde  $(X - A) \subset (X - \overline{A^{\delta I}}) = \overline{X - A}^{\delta I}$  olur ki  $X - A$  kümesi  $\delta^* - \beta$ -I-açık olduğundan,  $A$  kümesi  $\delta^* - \beta$ -I-kapalıdır.

**Teorem 1.3.1**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı ve  $A \subset X$  kümesi verilsin.  $A$  kümesinin

$\delta^* - \beta$ -I-kapalı ise,  $\overline{A^{\delta I}}^* \subset A$  olur.

**İspat.**  $\tau^*(I)$  topolojisi  $\tau$  topolojisinden daha ince olduğundan,  $\overline{A^{\delta I}}^* \subset \overline{A^{\delta I}}^* \subset \overline{A^{\delta I}}$  yazılabilir. Önerme 1.3.3 gereğince  $\overline{A^{\delta I}}^* \subset A$  bulunur.

**Önerme 1.3.4**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı ve  $A \subset X$  kümesi için

$(X - \overline{A^{\delta I}}^*) = \overline{(X - A)^{\delta I}}^*$  verilsin.  $A$  kümesinin  $\delta^* - \beta$ -I-kapalı olması için gerek ve

yeter şart  $(X - \overline{A^{\delta I}}^*) \subset A$  olmalıdır.

**İspat.** Önerme 1.3.3 gereğince ispat açıktır.

**Teorem 1.3.2**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı ve  $A, B \subset X$  kümeleri verilsin. Eğer  $A \subset B \subset \overline{A}^{\delta I}$  ve  $B$  kümesi  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme ise,  $A$  kümesi de  $\delta^* - \beta$ -I-açık kümedir.

**İspat.**  $A \subset B \subset \overline{A}^{\delta I}$   $\Rightarrow \overline{A}^{\delta I}$   $\in \delta^* - \beta - I$ -açık küme olduğundan,

$A \subset B \subset \overline{B}^{\delta I} = \overline{A}^{\delta I}$  olur. Buradan  $A$  kümesi  $\delta^* - \beta - I$ -açık kümedir.

**Theorem 1.3.3**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı ve  $A, B \subset X$  kümeleri verilsin. Eğer  $A \subset B \subset \overline{A}^*$  ve  $A$  kümesi  $\delta^* - \beta - I$ -açık küme ise,  $B$  kümesi de  $\delta^* - \beta - I$ -açık kümedir.

**İspat.**  $A \subset B \subset \overline{A}^*$  ve  $A$  kümesi  $\delta^* - \beta - I$ -açık küme olsun. Bu takdirde Tanım 1.3.1

gereğince  $A \subset \overline{A}^{\delta I}$  ’dır. Öte yandan;  $B \subset \overline{A}^*$  ve  $A, \delta^* - \beta - I$ -açık küme olduğundan,

$B \subset \overline{A}^{\delta I} = \overline{A}^* \subset \overline{B}^{\delta I}$  olur. Bu ise  $B$  kümesinin  $\delta^* - \beta - I$ -açık küme olmasıdır.

**Önerme 1.3.5**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı verilsin.  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $U_\alpha \in \delta^* \beta IO(X)$  ise  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \delta^* \beta IO(X)$  ’dir.

**İspat.**  $\forall \alpha \in \Delta$  için  $U_\alpha \in \delta^* \beta IO(X)$  gereğince  $U_\alpha \subset \overline{(U_\alpha)^{\delta I}}$  olur. Dolayısıyla

$$\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} \overline{(U_\alpha)^{\delta I}} = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \{(\overline{(U_\alpha)^{\delta I}})^*\} \subset (\bigcup_{\alpha \in \Delta} \overline{(U_\alpha)^{\delta I}})^* \cup \bigcup_{\alpha \in \Delta} \overline{(U_\alpha)^{\delta I}} = \overline{\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha}$$

yardımıyla  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha}$  bulunur. Buradan  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \delta^* \beta IO(X)$  elde edilir.

**Uyarı 1.3.4** Herhangi iki  $\delta^* - \beta - I$ -açık kümeyin kesişimi  $\delta^* - \beta - I$ -açık küme olmayabilir.

**Örnek 1.3.8**  $X = \{a, b, c, d\}, \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{d\}\}$  olsun.  $A = \{a, b, d\}$  ve  $B = \{a, c\}$  kümeleri,  $\delta^* - \beta - I$ -açık kümeler olduğu halde  $A \cap B$   $\delta^* - \beta - I$ -açık küme değildir. Gerçekten;

$\overline{A}^{\delta I} = \{a, b, d\} \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta I} = \{b\} \rightarrow \overline{\overline{\overline{A}}}^{\delta I} = \{a, b, d\} \supset A$  olduğundan,  $A$  kümesi

$\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümedir. Öte yandan,

$\overline{B}^{\delta I} = \{a, c, d\} \rightarrow \overline{\overline{B}}^{\delta I} = \{c\} \rightarrow \overline{\overline{\overline{B}}}^{\delta I} = \{a, c, d\} \supset B$  olduğundan  $B$  kümesi de  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümedir. Ancak

$A \cap B = \{a\} \rightarrow \overline{\{a\}}^{\delta I} = \{a, d\} \rightarrow \overline{\overline{\{a\}}}^{\delta I} = \emptyset \rightarrow \overline{\overline{\overline{\{a\}}}}^{\delta I}$  olup  $A \cap B$  kümesi  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık küme değildir.

**Sonuç 1.3.1** Buradan  $\delta^* \beta IO(X)$  açık kümeler ailesi topoloji oluşturmaz.

#### 1.4 $\delta_\beta^*$ -B-KÜME, $\delta_\beta^*$ -t-KÜME VE ÖZELLİKLERİ

Şimdi,  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kumesinin yeni bir karakterizasyonunu elde edebilmek için  $\delta_\beta^*$ -B-küme ve  $\delta_\beta^*$ -t-küme olarak adlandıracagımız yeni kume çeşitlerini tanımladık.  $\delta_\beta^*$ -B-küme ve  $\delta_\beta^*$ -t-küme olarak tanımladığımız kümelerin daha önce topolojik uzayda verilen  $t$ - $I$ -küme,  $B$ - $I$ -küme, strongly- $t$ - $I$ -küme, strongly- $B$ - $I$ -küme,  $\beta^*$ - $t$ - $I$ -küme,  $B^*$ - $I$ -küme,  $\delta_\beta$ -t-küme ve  $\delta_\beta$ -B-kümeleri arasındaki ilişkileri inceleyip, yorumladık.

**Tanım 1.4.1**  $(X, \tau, I)$  topolojik uzayında  $A \subset X$  kumesi verilsin. Eğer

a)  $A = U \cap V \ni U \in \tau, \overline{\overline{V}}^* = \overline{V}$  ise,  $A$  kumesine  $B$ - $I$ -küme [10]

b)  $\overline{\overline{A}}^* = \overline{A}$  ise,  $A$  kumesine  $t$ - $I$ -küme [10]

c)  $\overline{\overline{A}}^{\delta I} = \overline{A}$  ise,  $A$  kumesine strongly- $t$ - $I$ -küme [22]

d)  $A = U \cap V \ni U \in \tau, \overline{\overline{V}}^{\delta I} = \overline{V}$  ise,  $A$  kumesine strongly- $B$ - $I$ -küme [12]

- e)  $\overline{\overline{A}^{\delta}}^* = \overline{A}^{\delta}$  ise,  $A$  kümesine  $\beta^*$ - $t$ -küme [22]
- f)  $A = U \cap V \ni U \in \tau, \overline{\overline{V}^{\delta}}^* = \overline{V}^{\delta}$  ise,  $A$  kümesine  $B^*$ - $I$ -küme [22]
- g)  $\overline{\overline{A}^{\delta}}^* = \overline{A}^{\delta}$  ise,  $A$  kümesine  $\delta_{\beta}$ - $t$ -küme [10]
- h)  $A = U \cap V \ni U \in \tau, \overline{\overline{V}^{\delta}}^* = \overline{V}^{\delta}$  ise,  $A$  kümesine  $\delta_{\beta}$ - $B$ -küme [10] denir.

**Önerme 1.4.1**  $(X, \tau, I)$  topolojik uzayında

- a) Her açık küme,  $\delta_{\beta}$ - $B$ -kümedir [10].
- b) Her açık küme,  $B^*$ - $I$ -kümedir[22].
- c) Her açık küme, strongly- $B$ - $I$ -kümedir[22].

**Önerme 1.4.2**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır.

- a) Her strongly- $t$ -küme,  $t$ - $I$ -kümedir[22].
- b) Her strongly- $B$ - $I$ -küme,  $B$ - $I$ -kümedir[22].
- c) Her strongly- $t$ -küme, strongly- $B$ - $I$ -kümedir[22].
- d) Her  $\beta^*$ - $t$ -küme,  $B^*$ - $I$ -kümedir[22].
- e) Her  $\delta_{\beta}$ - $t$ -küme,  $\delta_{\beta}$ - $B$ -kümedir[10].
- f) Her  $t$ - $I$ -küme,  $B$ - $I$ -kümedir[12].

**Uyarı 1.4.1** Önerme 1.4.1 ve Önerme 1.4.2 ile verilen ifadelerin tersleri genelde doğru olmadığı [10], [12] ve [22]'de verildi.

**Örnek 1.4.1** [22]  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{b\}\}$  verilsin.  $A = \{b, c, d\}$  kümesi  $t$ - $I$ -küme, fakat strongly- $t$ - $I$ -küme değildir.

**Örnek 1.4.2 [22]**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{b\}\}$  verilsin.  $A = \{b, c, d\}$  kümesi  $B$ - $I$ -küme, fakat strongly- $B$ - $I$ -küme değildir. Ayrıca  $B = \{a, c, d\}$  kümesi  $B$ - $I$ -küme, fakat  $t$ - $I$ -küme değildir.

**Tanım 1.4.2**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı ve  $A \subset X$  kümesi verilsin.

a)  $\overline{\overset{\circ}{A}^{\delta_I}}^* = \overset{\circ}{A}$  ise,  $A$  kümesine  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme denir.

b)  $A = U \cap V \ni U \in \tau, \overline{\overset{\circ}{V}^{\delta_I}}^* = \overset{\circ}{V}$  ise,  $A$  kümesine  $\delta_\beta^*$ - $B$ -küme denir.

**Önerme 1.4.3**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında, her  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme,  $\delta_\beta^*$ - $B$ -kümedir.

**İspat.**

$X \in \tau$  olduğundan, Tanım 1.4.2 gereğince ispat açıktır.

**Önerme 1.4.4**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı verilsin.

a) Her  $\beta^*$ - $t$ - $I$ -küme, bir  $\delta_\beta^*$ - $t$ -kümedir.

b) Her  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme, bir strongly- $t$ - $I$ -kümedir.

c) Her  $\delta_\beta$ - $t$ -küme, bir  $\beta^*$ - $t$ - $I$ -kümedir.

**İspat.**  $A \subset X$  kümesi alalım.

a)  $A$ ,  $\beta^*$ - $t$ - $I$ -küme ise,  $\overline{\overset{\circ}{A}^{\delta}}^* = \overset{\circ}{A}$  olacaktır. Buradan

$\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta_I}}^* \subset \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta}}^* = \overset{\circ}{A}$  ve dolayısıyla  $\overline{\overset{\circ}{A}^{\delta_I}}^* = \overset{\circ}{A}$  olur. Bu ise  $A$  kümesinin  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme olmasıdır.

b)  $\delta_\beta^*$ -t-küme ise,  $\overline{\overline{A}^{\delta_I}}^* = \overset{\circ}{A}$  olacaktır. Buradan

$\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta_I}} \subset \overline{\overline{A}^{\delta_I}}^* = \overset{\circ}{A}$  ve dolayısıyla  $\overline{\overset{\circ}{A}^{\delta_I}} = \overset{\circ}{A}$  olur. Bu ise  $A$  kümelerinin  $\delta_\beta^*$ -t-küme olmasıdır.

c)  $A$ ,  $\delta_\beta$ -t-küme ise,  $\overline{\overset{\circ}{A}^\delta} = \overset{\circ}{A}$  olacaktır. Buradan  $\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}^\delta} \subset \overline{\overline{A}^\delta}^* = \overset{\circ}{A}$  ve dolayısıyla  $\overline{\overline{A}^\delta} = \overset{\circ}{A}$  olur. Bu ise  $A$  kümelerinin  $\beta^*$ -t-I-küme olmasıdır.

**Uyarı 1.4.2** Önerme 1.4.4 ile verilen ifadelerin tersleri genelde doğru değildir.

**Örnek 1.4.3**  $X=\{a,b,c\}$ ,  $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{a\}\}$  olsun.  $A=\{b,c\}$  kümesi,  $\delta_\beta^*$ -t-küme, fakat  $\beta^*$ -t-I-küme değildir. Gerçekten  $\overline{A}^{\delta_I} = \{b,c\} \rightarrow \overline{\overline{A}^{\delta_I}} = \{b,c\} = \emptyset = \overline{\overline{A}^{\delta_I}}^* = \overset{\circ}{A}$  olduğundan  $A$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -t-kümedir. Ancak;  $\overline{A}^\delta = X \rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}^\delta} = X \rightarrow \overline{\overline{A}^\delta}^* = X \neq \overset{\circ}{A}$  olduğundan,  $A$  kümesi  $\beta^*$ -t-I-küme değildir. Aynı zamanda,  $A$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -B-küme, fakat  $B^*$ -I-küme değildir.

**Örnek 1.4.4**  $X=\{a,b,c,d\}$ ,  $\tau=\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{d\}\}$  olsun.  $A=\{a,b,d\}$  kümesi, strongly-t-I-küme, fakat  $\delta_\beta^*$ -t-küme değildir. Gerçekten;  $\overline{A}^{\delta_I} = \{a,b,d\} \rightarrow \overline{\overline{A}^{\delta_I}} = \{b\} = \overset{\circ}{A}$  olduğundan  $A$  kümesi strongly-t-I-kümedir. Fakat;  $\overline{\overline{A}^{\delta_I}}^* = \overline{\{b\}}^* = \{a,b,d\} \neq \overset{\circ}{A}$  olduğundan,  $A$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -t-küme değildir. Aynı zamanda  $A$  kümesi strongly-B-I-küme iken  $\delta_\beta^*$ -B-küme değildir.

**Örnek 1.4.5**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{a\}\}$  verilsin.  $A = \{a, c\}$  kümesi  $\beta^*$ - $t$ - $I$ -küme, fakat  $\delta_\beta$ - $t$ -küme değildir.

Gerçekten;  $\overline{A}^\delta = \{a, c\}$  olup  $\overset{o}{\overline{A}}^\delta = \{a, c\} = \{a\}$  dır. Buradan  $\overset{o}{\overline{A}}^\delta = \overline{A}^\delta \cup \overset{o}{\overline{A}}^\delta = \{a\} = \overset{o}{A}$  olur. Bu ise  $A$  kumesinin  $\beta^*$ - $t$ - $I$ -küme olmasıdır. Ancak,  $\overset{o}{\overline{A}}^\delta = \{\overline{a, c}\} = \{a, c\} \neq \{a\} = \overset{o}{A}$  olur ki  $A$  kumesi  $\delta_\beta$ - $t$ -küme değildir. Aynı zamanda,  $A$  kumesi  $B^*$ - $I$ -küme, fakat  $\delta_\beta$ - $B$ -küme değildir.

**Önerme 1.4.5**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı verilsin.

- a) Her  $B^*$ - $I$ -küme,  $\delta_\beta^*$ - $B$ -kümedir.
- b) Her  $\delta_\beta^*$ - $B$ -küme, strongly- $B$ - $I$ -kümedir.
- c) Her  $\delta_\beta$ - $B$ -küme,  $B^*$ - $I$ -kümedir.

**İspat.** Tanım 1.4.1, Tanım 1.4.2, Önerme 1.4.2 ve Önerme 1.4.4 gereğince ispat açıklar.

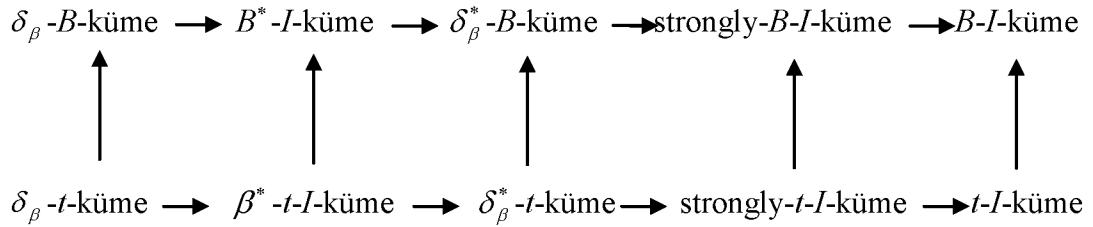
**Uyarı 1.4.3** Önerme 1.4.5 ile verilen ifadelerin terslerinin genelde doğru olmadığı

Örnek 1.4.3, Örnek 1.4.4, Örnek 1.4.5'den görülebilir.

**Önerme 1.4.6**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında her açık kume,  $\delta_\beta^*$ - $B$ -kümedir.

**İspat.** Önerme 1.4.1 ve Önerme 1.4.5 gereğince ispat açıklar.

Önerme 1.4.2, Önerme 1.4.4 ve Önerme 1.4.5 gereği, Tanım 1.4.1 ve Tanım 1.4.2'de verilen kümeler arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekilde verildi.



Şekil 1.4.1

$(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayındaki bütün  $\delta_\beta^*$ - $t$ -kümelerin ailesini  $\delta_\beta^*$ - $t$ -( $I$ ) ile gösterelim.

**Önerme 1.4.7**  $\delta_\beta^*$ - $t$ -( $I$ ) kümeler ailesi, sonlu arakesit işlemine göre kapalıdır.

**İspat.**  $A, B \in \delta_\beta^*$ - $t$ -( $I$ ) alalım. Tanımlar gereğince  $(A \overset{o}{\cap} B) \subset \overline{\overline{A \cap B}}^{\delta I}$  ....(1) olur.

Tersine

$$\overline{\overline{A \cap B}}^{\delta I} \subset \overline{\overline{A}^{\delta I} \cap \overline{B}^{\delta I}}^* = \overline{\overline{A}^{\delta I}} \cap \overline{\overline{B}^{\delta I}}^* \subset \overline{\overline{A}^{\delta I}}^* \cap \overline{\overline{B}^{\delta I}}^* = A^o \cap B^o = (A \overset{o}{\cap} B) \text{ olur ki}$$

$$\overline{\overline{A \cap B}}^{\delta I} \subset (A \overset{o}{\cap} B) \dots\dots(2) \text{ olur. (1) ve (2) gereğince } \overline{\overline{A \cap B}}^{\delta I} = (A \overset{o}{\cap} B) \text{ bulunur.}$$

**Uyarı 1.4.4**  $\delta_\beta^*$ - $t$ -kümelerin birleşimi,  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme değildir.

**Örnek 1.4.6**  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  olsun.  $A = \{a\}$  ve  $B = \{b\}$  kümeleri  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme, fakat  $A \cup B$  kümesi,  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme değildir.

Gerçekten;  $\overline{A}^{\delta I} = \{a, c\} \rightarrow \overline{\overline{A}}^{\delta I} = \{a\} \rightarrow \overline{\overline{A}^{\delta I}}^* = \overline{A}^{\delta I} = \{a\}$  ve

$\overline{B}^{\delta I} = \{b, c\} \rightarrow \overline{\overline{B}}^{\delta I} = \{b\} \rightarrow \overline{\overline{B}^{\delta I}}^* = \overline{B}^{\delta I} = \{b\}$  olduğundan  $A$  ve  $B$  kümeleri  $\delta_\beta^*$ - $t$ -

kümeleridir. Ancak;  $A \cup B = \{a, b\} \rightarrow \overline{A \cup B}^{\delta I} = X \rightarrow \overline{\overline{A \cup B}}^{\delta I} = X$

$\rightarrow \overline{\overline{A \cup B}}^{\delta I} = X \neq (A \overset{o}{\cup} B)$  olduğundan,  $A \cup B$  kümesi  $\delta_\beta^*$ - $t$ -küme değildir.

**Sonuç 1.4.1**  $\delta_\beta^* - t - (I)$  kümeler ailesi bir topoloji oluşturmaz.

**Uyarı 1.4.5**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında  $\delta_\beta^*$ -B-küme kavramı ile  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme kavramı birbirinden bağımsızdır..

**Örnek 1.4.7**  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{a\}\}$  olsun.  $A = \{b, c\}$  kümesi,  $\delta_\beta^*$ -B-küme, fakat  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme değildir. Gerçekten;  $\overline{A}^{\delta I} = \{b, c\}$   $\rightarrow \overline{\overline{A}^{\delta I}}^* = \{b, c\} = \emptyset = \overline{\overline{A}^{\delta I}}^* = \overline{A}^{\delta I}$  olduğundan  $A$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -t-kümedir. Her  $\delta_\beta^*$ -t-kümesi,  $\delta_\beta^*$ -B-küme olduğundan  $A$  kümesi de  $\delta_\beta^*$ -B-kümedir. Ancak;  $A \not\subset \overline{A}^{\delta I} = \emptyset$  olduğundan,  $A$  kümesi  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme değildir.

**Örnek 1.4.8**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{d\}\}$  olsun.  $A = \{a, b, d\}$  kümesi,  $\delta^* - \beta$ -I-açık küme, fakat  $\delta_\beta^*$ -B-küme değildir. Gerçekten;  $\overline{A}^{\delta I} = \{a, b, d\} \rightarrow \overline{\overline{A}^{\delta I}}^* = \{b\} \rightarrow \overline{\overline{A}^{\delta I}}^* = \{a, b, d\} \supset A$  olduğundan  $A$ ,  $\delta^* - \beta$ -I-açık kümedir. Ancak;  $U = X$ ,  $V = A$  alınırsa  $\overline{\overline{A}^{\delta I}}^* = \overline{\{b\}}^* = \{a, b, d\} \neq \overline{A}^{\delta I} = \{a, b, d\}$  olduğundan,  $A$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -B-küme değildir.

**Teorem 1.4.1**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında  $A \subset X$  kümesi verilsin.  $A$  kümelerinin açık olması için gerek ve yeter şart  $A$  kümelerinin hem  $\delta^* - \beta$ -I-açık hem de  $\delta_\beta^*$ -B-küme olmasıdır.

### İspat.

$\Leftarrow$ :  $A \in \delta^* \beta IO(X)$  ve  $A \in \delta_\beta^* BI(X)$  olsun. Bu durumda  $A$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -B-küme ise,  $A = U \cap V$  olmak üzere  $\overline{\overline{V}^{\delta I}}^* = \overline{V}^{\delta I}$ ,  $U \in \tau$  biçimindedir.  $A \in \delta^* \beta IO(X)$  olduğundan,  $A \subset \overline{A}^{\delta I}$  olacaktır.

$$A = U \cap A \subset U \cap \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta I}} = U \cap \overline{U \cap V}^{\delta I} \subset U \cap \overline{\overline{U}^{\delta I}}^* \cap \overline{\overline{V}^{\delta I}}^* = U \cap \overline{V}^{\delta I}$$

$= U \cap \overset{\circ}{V} = (U \cap \overset{\circ}{V}) = \overset{\circ}{A}$  olur. Bu ise  $A$  kümesinin açık olmasıdır.

$\Rightarrow$ :  $A$  kümesi açık ise,  $A$  kümesinin  $\delta^*$ - $\beta$ -I-açık ve  $\delta_\beta^*$ -B-kümesi olduğu Şekil 1.3.1 ve Şekil 1.4.1 gereğince açıktır.

**Önerme 1.4.8**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayı ve  $A \subset X$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -t-küme olsun.

a) Eğer  $I = \{\emptyset\}$  ise,  $A$  kümesi  $\delta_\beta$ -t-küme ve  $\beta^*$ -t-I-kümedir.

b) Eğer  $I = P(X)$  ise,  $A$  kümesi *strongly*-t-I-kümedir.

c) Eğer  $A \subset A^*$  ise,  $\overset{\circ}{A}^{\delta I} = \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta I}}^*$  olur.

**İspat.**

a)  $I = \{\emptyset\}$  ise  $\forall A \subset X$  için  $\overline{A}^{\delta I} = \overline{A}^\delta$  ve  $A^* = \overline{A}$  olur. Buradan,

$\overline{A}^* = A^* \cup A = \overline{A}$  ve dolayısıyla  $A^* = \overline{A} = \overline{A}^*$  elde edilir. Özel olarak  $A$  kümesi,  $\delta_\beta^*$ -t-küme olduğundan,

$\overset{\circ}{A}^{\delta I} = \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta I}}^* = \overline{\overset{\circ}{A}^\delta}^* = \overline{\overset{\circ}{A}^\delta} = \overset{\circ}{A}^{\delta I}$  olur ki,  $A$  kümesi hem  $\delta_\beta$ -t-küme hem de  $\beta^*$ -t-I-kümedir.

b)  $I = P(X)$  ise,  $\forall A \subset X$  için  $A^* = \emptyset$  olur.  $A$  kümesi  $\delta_\beta^*$ -t-küme olduğundan

$\overset{\circ}{A}^{\delta I} = \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta I}}^* = \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta I}} \cup \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta I}}^* = \overline{\overset{\circ}{A}^{\delta I}}$  olur ki,  $A$  kümesi *strongly*-t-I-kümedir.

c) Önerme 1.1.2 gereğince ispatı açıktır.

## 2.BÖLÜM

### SÜREKLİ FONKSİYON DAĞILIMLARI

#### **2.1 Sürekliliğin İdeal Topolojik Uzaylarda Yeni Bir Dağılımı**

1. bölümde incelediğimiz kümeler yardımıyla, genelleştirilmiş sürekli fonksiyonlar elde etmek mümkündür. Öncelikle literatürde çalışmamız için gerekli olan fonksiyon çeşitlerini inceledik.

**Tanım 2.1.1**  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin.  $Y$  uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsü  $X$  uzayında;

- a) açık ise,  $f$  fonksiyonuna sürekli,
- b)  $\alpha$  - açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  - sürekli([19]),
- c) Pre-açık ise,  $f$  fonksiyonuna pre-sürekli([14]),
- d) Semi açık ise,  $f$  fonksiyonuna semi-sürekli([13]),
- e)  $\beta$  - açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\beta$  - sürekli([15])
- f)  $\delta$  - pre-açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\delta$  - almost sürekli([1])
- g)  $\delta$  -  $\beta$  - açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\delta$  -  $\beta$  - sürekli([18]) denir.

Tanım 2.1.1 ile verilen kavramlar ideal topolojik uzaylarda da çalışarak aşağıdaki kavramlar verilmiştir.

**Tanım 2.1.2**  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin.  $Y$  uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsü  $X$  uzayında;

- a)  $\alpha$  -  $I$ -açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\alpha$  -  $I$ - sürekli([11]),
- b) Pre- $I$ -açık ise,  $f$  fonksiyonuna pre- $I$ -sürekli([17]),
- c) Semi- $I$ - açık ise,  $f$  fonksiyonuna semi- $I$ -sürekli([11]),
- d)  $\beta$  -  $I$ -açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\beta$  -  $I$ -açık sürekli([11]),
- e)  $\beta^*$  -  $I$ -açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\beta^*$  -  $I$ -sürekli([22])
- f)  $pre^*$  -  $I$ -açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $pre^*$  -  $I$ -sürekli ([22]) denir.

Teorem 1.2.1'deki önermeleri sürekliğa aktarmak tabiidir. Bu önermelerin sürekliğa aktarılışı Teorem 1.2.1'de belirtilen makalelerde yer almaktadır.

**Tanım 2.1.3**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin.  $Y$  uzayındaki her açık kümenin ters görüntüsü  $X$  uzayında  $\delta^* - \beta$ - $I$ -açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\delta^* - \beta$ - $I$ -sürekli denir.

**Tanım 2.1.4**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$  fonksiyonu verilsin.  $Y$  uzayındaki her  $\delta^* - \beta$ - $I$ -açık kümenin ters görüntüsü  $X$  uzayında  $\delta^* - \beta$ - $I$ -açık ise,  $f$  fonksiyonuna  $\delta^* - \beta$ - $I$ -irresolute denir.

**Önerme 2.1.1**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin.

- a) Her  $pre^*$ - $I$ -sürekli fonksiyon,  $\delta^* - \beta$ - $I$ -süreklidir.
- b) Her  $\delta^* - \beta$ - $I$ -sürekli fonksiyon,  $\beta^*$ - $I$ -süreklidir.

**İspat.** Tanım 2.1.2, Tanım 2.1.3 ve Önerme 1.3.2 gereğince ispat açıktır.

**Uyarı 2.1.1** Önerme 2.1.1 ile verilen ifadelerin tersleri genelde doğru değildir.

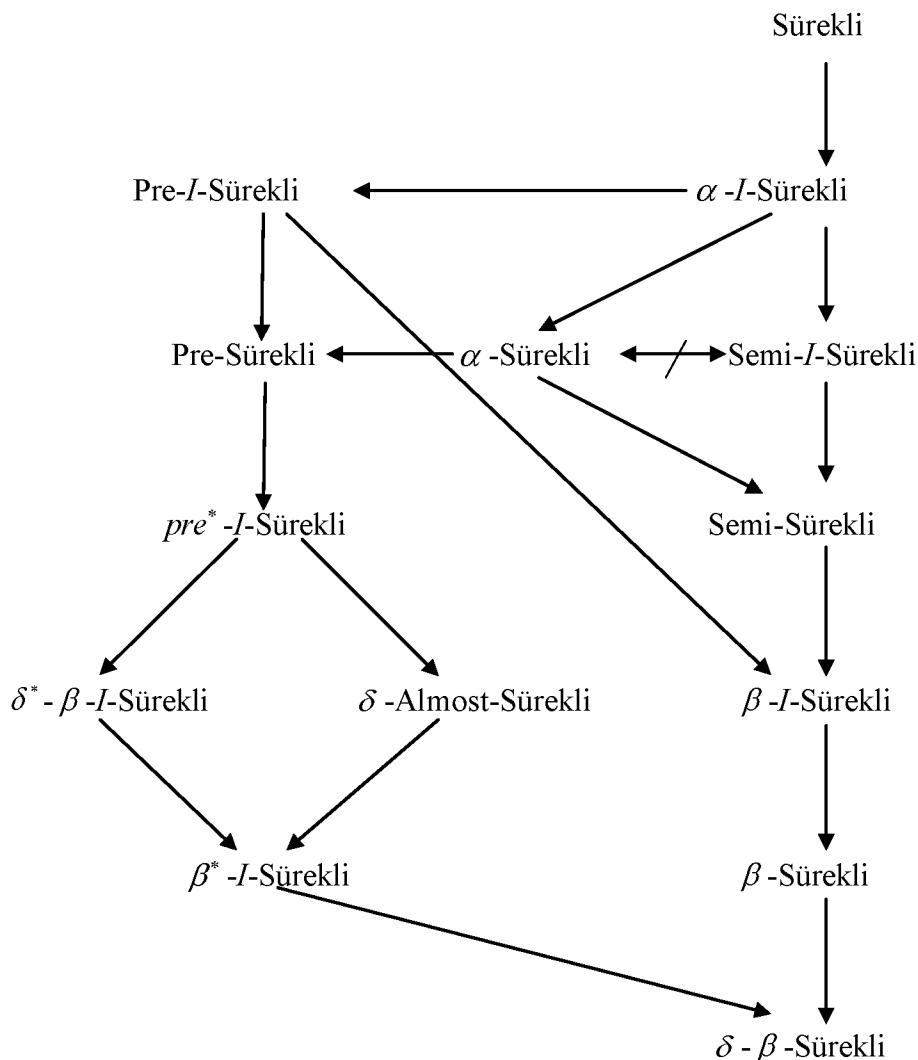
**Örnek 2.1.1**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$  ve  $I = \{\emptyset, \{c\}\}$  olsun.

$f : (X, \tau, I) \rightarrow (X, \tau)$  fonksiyonu  $f(a) = b$ ,  $f(b) = b$ ,  $f(c) = c$ ,  $f(d) = b$  olarak verilsin.  $f$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta$ - $I$ -sürekli, fakat  $pre^*$ - $I$ -sürekli ve  $\delta$ -almost sürekli değildir. Gerçekten;

$f^{-1}(b) = \{a, b, d\}$ ,  $f^{-1}(c) = \{c\}$ ,  $f^{-1}(\{b, c\}) = X$  olup Örnek 1.3.1 gereğince  $\{a, b, d\}$  kümesi  $\delta^* - \beta$ - $I$ -açık kümedir. Öte yandan  $\overline{\overline{\{c\}}^{\delta^*}}^{\beta^*} = \{c\} \supseteq \{c\}$  ve  $\overline{\overline{X}^{\delta^*}}^{\beta^*} = X \supseteq X$  olduğundan,  $f$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta$ - $I$ -süreklidir. Ancak; Örnek 1.3.1 ve Örnek 1.3.5 gereğince  $\{a, b, d\}$  kümesi  $pre^*$ - $I$ -açık ve  $\delta$ -pre açık küme olmadığından  $f$  fonksiyonu  $pre^*$ - $I$ -sürekli ve  $\delta$ -almost sürekli değildir.

**Örnek 2.1.2**  $X=\{a,b,c\}$ ,  $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{a\}\}$  olsun.  $f$  fonksiyonu  $f(a)=c, f(b)=a, f(c)=a$  şeklinde verilsin.  $f$  fonksiyonu  $\delta$ -almost sürekli ve  $\beta^* - I$ -surekli, fakat  $\delta^* - \beta - I$ -surekli değildir. Gerçekten;

$f^{-1}(X)=X, f^{-1}(a)=\{b,c\}, f^{-1}(\{a,b\})=\{b,c\}, f^{-1}(\{a,c\})=X$  olup Örnek 1.3.4 ve Örnek 1.3.2 gereğince  $\{b,c\}$  kümesinin  $\delta$ -pre açık ve  $\beta^* - I$ -açık olduğundan  $f$  fonksiyonu  $\delta$ -almost sürekli ve  $\beta^* - I$ -sureklidir. Ancak; Örnek 1.3.2 gereğince  $\{b,c\}$  kümesinin  $\delta^* - \beta - I$ -açık küme olmadığından,  $f$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta - I$ -surekli değildir.



**Şekil 2.1.1**

**Teorem 2.1.1**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler bir birine denktirler.

- a)  $f$  fonksiyonu,  $\delta^*$ - $\beta$ -I-süreklidir.
- b)  $f(x)$  in  $\forall V$  komşuluğu için  $f(U) \subset V$  olacak şekilde  $U \in \delta^*\beta IO(X)$  vardır.
- c)  $\forall F \subset Y$  kapalı alt kumesinin ters görüntüsü  $\delta^*$ - $\beta$ -I-kapalıdır.
- d)  $\overline{\overline{f^{-1}(B)}}^{\frac{o^*}{o\delta I}} \subset f^{-1}(\overline{B})$
- e)  $\overline{f(A)}^{\frac{o^*}{o\delta I}} \subset f^{-1}(\overline{A})$

### İspat.

$a \Rightarrow b$ :  $x \in X$  ve  $V \in \mathcal{G}_{f(x)}$  açığı alalım.  $U = f^{-1}(V)$  alırsak Tanım 2.1.2 gereğince  $x \in f(U) \subset V$  olur.

$b \Rightarrow c$ :  $F \subset Y$  kapalı kumesini alalım.  $V = Y - F$  alırsak  $V$ ,  $Y$  uzayında açık olacaktır. Hipotezden  $x \in U \in \delta^*\beta IO(X)$  vardır öyle ki  $f(U) \subset V$  dir. O zaman

$x \in U \subset \overline{\overline{U}}^{\frac{o^*}{o\delta I}} \subset \overline{f^{-1}(V)}^{\frac{o^*}{o\delta I}}$  ve  $f^{-1}(V) \subset \overline{f^{-1}(V)}^{\frac{o^*}{o\delta I}}$  dir. Buradan  $f^{-1}(V) \in \delta^*\beta IO(X)$  olur ki  $X$  uzayında,  $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(V)$   $\delta^*$ - $\beta$ -I-kapalıdır.

$c \Rightarrow d$ :  $B \subset Y$  alalım.  $\overline{B}$ ,  $Y$  uzayında kapalı olup hipotez gereği  $f^{-1}(\overline{B})$ ,

$\delta^*$ - $\beta$ -I-kapalı olduğunu from  $X - f^{-1}(\overline{B})$ ,  $\delta^*$ - $\beta$ -I-açiktır. Buradan

$X - f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{X - f^{-1}(\overline{B})}^{\frac{o^*}{o\delta I}} = \overline{f^{-1}(\overline{B})}^{\frac{o^*}{o\delta I}}$  olur. Böylece  $f^{-1}(\overline{B}) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$  elde edilir.

$d \Rightarrow e$ :  $A \subset X$  alalım. Hipotez gereği  $\overline{A} \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$  elde edilir.

Böylece  $\overline{f(A)}^{\frac{o^*}{o\delta I}} \subset \overline{f(A)}$  olur ki istenendir.

$e \Rightarrow a : V \subset Y$  açıgı alalım. Hipotez gereği

$$\overline{f(f^{-1}(Y-V))} \subset \overline{f(f^{-1}(Y-V))} \subset \overline{Y-V} = Y-V \text{ olur. Buradan}$$

$$\overline{f^{-1}(Y-V)} \subset f^{-1}(Y-V) \subset X - f^{-1}(V) \text{ olacaktır. Sonuç olarak } f^{-1}(V) \subset \overline{f^{-1}(V)}^* \text{ olduğundan } f^{-1}(V) \in \delta^* \beta IO(X) \text{ olur ki } f \text{ fonksiyonu } \delta^* - \beta - I\text{-sureklidir.}$$

**Teorem 2.1.2**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$  ve  $g : (Y, \sigma, J) \rightarrow (Z, \eta)$  fonksiyonları verilsin.

- a)  $f$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta - I$ -surekli ve  $g$  fonksiyonu surekli ise  $gof$  fonksiyonu,  $\delta^* - \beta - I$ -surekli.
- b)  $f$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta - I$ -irresolute ve  $g$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta - I$ -surekli ise  $gof$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta - I$ -surekli.

### İspat.

a)  $V \in \eta$  alalım.  $g$  fonksiyonu surekli olduğundan, Tanım 2.1.1 (a) gereği  $g^{-1}(V) \in \sigma$  dır.  $f$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta - I$ -surekli olduğundan, Tanım 2.1.3 gereği  $Y$  uzayından alınan  $g^{-1}(V)$  kümelerinin ters görüntüsü olan  $f^{-1}(g^{-1}(V))$  kümeli  $(X, \tau, I)$  uzayında  $\delta^* - \beta - I$ -açık olduğundan,  $gof$   $\delta^* - \beta - I$ -surekli.

b) İlgili tanımlar kullanılarak, a kısmının ispatına benzer şekilde yapılır.

**Önerme 2.1.2 [5]**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $B \subset X$  ve  $B \subset A$  verilsin. O zaman

$$B^*(\tau_{|A}, I_{|A}) = B^*(\tau, I) \cap A \text{ dır.}$$

**Teorem 2.1.3**  $(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzay  $A \subset X$  verilsin. Eğer  $A \subset U$ ,  $U \in \tau$  ve  $A \in \delta^* \beta IO(X)$  ise  $(U \cap A) \in \delta^* \beta IO(U, \tau_{|U}, I_{|U})$  ’dır.

$$\text{İspat. } U \cap A \subset U \cap \overline{A}^{\delta I} = U \cap (\overline{A}^{\delta I} \cup \overline{A}^{\delta I})^*$$

$$= (U \cap \overline{A}^{\delta I}) \cup (U \cap \overline{A}^{\delta I})^*$$

$$\subset (U \cap (U \cap \overline{A}^{\delta I}) \cup (U \cap \overline{A}^{\delta I})^*$$

$$\subset (U \cap \overline{A}^{\delta I}) \cup (U \cap (U \cap \overline{A}^{\delta I})^*$$

$$= (U \cap \overline{A}^{\delta I}) \cup ((U \cap \overline{A}^{\delta I}))^*$$

$$= (U \cap \overline{U \cap A}^{\delta I_U}) \cup (U \cap (\overline{U \cap A}^{\delta I_U}))^*$$

$$= \overline{U \cap A}^{\delta I_U} \quad \text{olur.}$$

Buradan  $A \cap U \subset \overline{U \cap A}^{\delta I_U}$  elde edilir.

**Teorem 2.1.4**  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta$ -I-sürekli ve  $U \in \tau$  verilsin.

Bu takdirde  $f|_U: (U, \tau|_U, I|_U) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu da  $\delta^* - \beta$ -I-süreklidir.

**İspat.**  $V, Y$  uzayında açık olsun.  $f$  fonksiyonu  $\delta^* - \beta$ -I-sürekli olduğundan  $f^{-1}(V) \in \delta^* \beta IO(X)$  ’dir.  $U \in \tau$  olup Teorem 2.1.3 gereği

$U \cap f^{-1}(V) \in \delta^* \beta IO(U, \tau|_U, I|_U)$  olur. Öte yandan  $(f|_U)^{-1}(V) = U \cap f^{-1}(V)$  ve  $(f|_U)^{-1}(V) \in \delta^* \beta IO(U, \tau|_U, I|_U)$  olur. Bu da  $f|_U: (U, \tau|_U, I|_U) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonunun  $\delta^* - \beta$ -I-sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi  $\delta_\beta^* - B$ -süreklliliği inceleyelim. Öncelikle literatürde yer alan strongly- $B$ -I-sürekli,  $B^*$ -I-sürekli,  $B$ -I-sürekli ve  $\delta_\beta - B$ -sürekllilik tanımlarını verelim.

**Tanım 2.1.5**  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu

- a) strongly- $B$ - $I$ -surekli olması için  $\Leftrightarrow \forall V \in \sigma$  için  $f^{-1}(V)$  kumesinin  $(X, \tau, I)$  uzayında strongly- $B$ - $I$ -küme olmasıdır([22]).
- b)  $B^*$ - $I$ -surekli olması için  $\Leftrightarrow \forall V \in \sigma$  için  $f^{-1}(V)$  kumesini  $(X, \tau, I)$  uzayında  $B^*$ - $I$ -küme olmasıdır([22]).
- c)  $B$ - $I$ -surekli olması için  $\Leftrightarrow \forall V \in \sigma$  için  $f^{-1}(V)$  kumesinin  $(X, \tau, I)$  uzayında  $B$ - $I$ -küme olmasıdır([11]).
- d)  $\delta_\beta$ - $B$ -surekli olması için  $\Leftrightarrow \forall V \in \sigma$  için  $f^{-1}(V)$  kumesinin  $(X, \tau, I)$  uzayında  $\delta_\beta$ - $B$ -küme olmasıdır([10]).

**Önerme 2.1.3**  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin.

- a) Her  $\delta_\beta$ - $B$ -surekli fonksiyon,  $B^*$ - $I$ -sureklidir.
- b) Her strongly- $B$ - $I$ -surekli fonksiyon,  $B$ - $I$ -sureklidir([22]).

**İspat.** Önerme 1.4.2, Önerme 1.4.5 ve Tanım 2.1.5 gereğince ispatı açiktır.

**Uyarı 2.1.2** Önerme 2.1.3'deki önermelerin tersleri genelde doğru değildir.

**Örnek 2.1.3 a)**  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$  ve

$I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$  verilsin.  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (X, \tau)$  fonksiyonu  $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = a, f(d) = b$  olarak verilsin.  $f$  fonksiyonu  $B^*$ - $I$ -surekli fakat  $\delta_\beta$ - $B$ -surekli değildir. Gerçekten  $f^{-1}(a) = \{a, c\}, f^{-1}(\{b, d\}) = \{b, d\}, f^{-1}(\{a, b, d\}) = X$ 'dir.

$\overline{\{a, c\}}^\delta = \{a, c\} \rightarrow \overline{\overset{o}{\{a, c\}}}^\delta = \{a\} \rightarrow \overline{\overset{o}{\{a, c\}}}^* = \{a\} = \overset{o}{\{a, c\}}$  olduğundan  $\beta^*$ - $t$ - $I$ -küme olup Önerme 1.4.2 gereğince  $B^*$ - $I$ -kümedir. Öte yandan

$\overline{\{b, d\}}^\delta = \{b, c, d\} \rightarrow \overline{\overset{o}{\{b, d\}}}^\delta = \{b, d\} \rightarrow \overline{\overset{o}{\{b, d\}}}^* = \{b, d\} = \overset{o}{\{b, d\}}$  olduğundan  $\{b, d\}$  kümesi  $B^*$ - $I$ -kümedir. Ancak  $\overline{\overset{o}{\{b, d\}}}^\delta = \{b, c, d\} \neq \overset{o}{\{b, d\}}$  olduğundan  $\delta_\beta$ - $B$ -küme değildir. Dolaysıyla,  $f$  fonksiyonu  $B^*$ - $I$ -surekli, fakat  $\delta_\beta$ - $B$ -surekli değildir.

**b)** Önermesinin ters örneği [22] numaralı makalenin 52. örneğinde yer almaktadır.

**Tanım 2.1.6**  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonun  $\delta_\beta^*$ -B-sürekli olması için  $\forall V \in \sigma$  için  $f^{-1}(V)$  kümelerinin  $(X, \tau, I)$  uzayında  $\delta_\beta^*$ -B-küme olmasıdır.

**Önerme 2.1.4**  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin.

- a) Her  $B^*$ -I-sürekli fonksiyon,  $\delta_\beta^*$ -B-süreklidir.
- b) Her  $\delta_\beta^*$ -B-sürekli fonksiyon, strongly-B-I-süreklidir.

**İspat.** Önerme 1.4.5, Tanım 2.1.5 ve Tanım 2.1.6'dan ispatı açktır.

**Uyarı 2.1.3** Önerme 2.1.3'deki önermelerin tersleri genelde doğru değildir.

**Örnek 2.1.4**  $X=\{a,b,c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{a\}\}$  olsun.

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (X, \tau)$  fonksiyonu  $f(a)=c, f(b)=a, f(c)=a$  şeklinde verilsin.  $f$  fonksiyonu  $\delta_\beta^*$ -B-sürekli iken  $B^*$ -I-sürekli değildir. Gerçekten;

$f^{-1}(X)=X, f^{-1}(a)=\{b, c\}, f^{-1}(\{a, b\})=\{b, c\}, f^{-1}(\{a, c\})=X$  olup Örnek 1.4.3 gereği  $\{b, c\}$  kümelerinin  $\delta_\beta^*$ -B-küme olduğunu ancak  $B^*$ -I-küme olmadığından  $f$  fonksiyonu  $\delta_\beta^*$ -B-sürekli iken  $B^*$ -I-sürekli değildir.

**Örnek 2.1.5**  $X=\{a,b,c,d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$  ve  $I=\{\emptyset, \{d\}\}$  olsun.

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (X, \tau)$  fonksiyonu  $f(a)=b, f(b)=b, f(c)=c, f(d)=b$  olarak verilsin.  $f$  fonksiyonu strongly-B-I-sürekli, fakat  $\delta_\beta^*$ -B-sürekli değildir. Gerçekten;  $f^{-1}(b)=\{a, b, d\}, f^{-1}(c)=\{c\}, f^{-1}(\{b, c\})=X$  olup Örnek 1.4.4 gereği  $\{a, b, d\}$  kümesi strongly-B-I-küme iken  $\delta_\beta^*$ -B-küme değildir. Ayrıca  $\overline{\{c\}}^{SI} = \{a, c, d\} \Rightarrow \overline{\{c\}}^{SI} = \{c\} = \overset{o}{\{c\}}$  olduğundan  $\{c\}$  kümesi strongly-t-I-küme olup

aynı zamanda strongly- $B$ - $I$ -kümedir. O halde  $f$  fonksiyonu strongly- $B$ - $I$ -surekli iken  $\delta_{\beta}^*$ - $B$ -surekli değildir.

Önerme 2.1.3 ve Önerme 2.1.4 kullanılarak Tanım 2.1.5 ve Tanım 2.1.6 ile verilen sureklilik çeşitleri arasındaki ilişkileri aşağıdaki şekilde gösterdik.

$$\delta_{\beta}^*-B\text{-sür.} \longrightarrow B^*-I\text{-sür.} \longrightarrow \delta_{\beta}^*-B\text{-sür.} \longrightarrow \text{strongly-}B\text{-}I\text{-sür.} \longrightarrow B\text{-}I\text{-sür.}$$

### Şekil 2.1.2

**Teorem 2.1.5**  $f : (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonu verilsin.  $f$  fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter şart  $f$  fonksiyonun  $\delta_{\beta}^*$ - $B$ -surekli ve  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -surekli olmalıdır.

**İspat.** Teorem 1.2.1, Tanım 2.1.3 ve Tanım 2.1.6 gereğince ispatı açıktır.

## SONUÇ VE ÖNERİLER

$(X, \tau, I)$  ideal topolojik uzayında bazı küme çeşitleri ve sürekli fonksiyon türleri tanımladık. Bunların genel olarak bulundukları yeri tespit edip, terslerinin doğru olmadığını dair örnekler verdik. Ayrıca tanımlanan bu kavramların sağladığı özellikleri ayrıntılı olarak inceleyip yorumladık.

Bu çalışmanın amacı  $pre^*$ - $I$ -açık kümelerinden kuvvetli,  $\beta^*$ - $I$ -açık kümelerinden zayıf olan  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümelerini tanımlayarak açık küme ve diğer küme çeşitleri arasındaki ilişkileri incelemektir. Dolayısıyla bu küme yardımıyla tanımlanan  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -sürekli fonksiyon kavramını tanımlayarak sürekliliğin yeni bir dağılımını elde etmektedir.

Bu çalışma üzerinde incelemeler yapılip gerek ayırma aksiyomları gerekse de uzay kavramları bulunarak bunların özellikleri elde edilir. Ayrıca burada tanımlanan  $\delta^*$ - $\beta$ - $I$ -açık kümeden daha zayıf olan başka kümelerde tanımlanarak sürekliliğin yeni dağılımları da bulunabilir.

## KAYNAKLAR

- [1]. Raychaudhuri S. And Mukherjee M.N., On  $\delta$ -almost continuity and  $\delta$ -preopen sets,Bulletin of the institute of mathematics academia sinica, 1993, volume 21, number 4
- [2]. Singal, M. K., Singal, A.R., Almost continuous mappings, Yokohoma Math. Journal, 1968, 16, pp. 63-73
- [3]. N. V. Veličko , NV., H-closed topological spaces, Am. Math. Soc. Transl., 1968; 2(78):103-18
- [4]. Yüksel Ş., Açıkgöz A. and Noiri T., On  $\delta$ -I-continuous Functions, Türk J Math. 29(2005),39-51
- [5]. Jankovic, D., and Hamlett, T.R., New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly, 1990, vol.97,295-310
- [6]. Kuratowski, K., Topologie I, Warszawa, 1933
- [7]. Vaidyanathaswamy, R., Set Topology, Chelsea Publishing Company, New York, 1960
- [8]. Abd El-Monsef, M.E., Lashien E. F. and Nashef A. A., 1992, On  $I$ -open sets and  $I$ -continuous functions, Kyungpook Math. J. Vol 32(1), 21-30
- [9]. Tong, J., On decomposition of continuity in topological spaces, Acta. Math. Hungar., 54 (1989), 51-55
- [10]. Hatir, E., and Noiri, T., Decomposition of continuity and complete continuity, Acta. Math. Hungar. 2006, 113, no.(4), 281-287
- [11]. Hatir, E. and Noiri, T., On decomposition of continuity via idealization,Acta. Math. Hungar., 2002, vol.96, 341-349
- [12]. Hatir, E., Keskin, A., and Noiri T., On a new decomposition of continuity via idealization, JP Jour. Geometry and Topology, 2003, 3(1), pp. 53-64

- [13]. Levine, N., Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 1963, vol.70,36-41
- [14]. Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. And El-Deeb, S. N., On pre-continuous and weak pre-continuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 1982, vol. 53,47-53
- [15]. Abd El-Monsef, M.E., El-Deeb, S.N. and Mahmoud, R. A.,  $\beta$ -open sets and  $\beta$ -continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., 1983, vol. 12, 77-90
- [16]. Njastad, O., On some nearly open sets, Pacific J.Math., 1965, vol.15, 961-970
- [17]. Dontchev J., On pre- $I$ -open sets and decomposition of  $I$ -continuity, Banyan Math., J., 1996, vol.2.
- [18]. Hatir, E., and Noiri, T., On  $\delta$ - $\beta$ -continuous functions, Chaos, Solitons & Fractals(2008), doi:10.1016/j.chaos., 2008.11.008
- [19].Mashhour, A. S., Hasanein, I. A., El-Deeb, S.N.,  $\alpha$ -continuous and  $\alpha$ -open mappings(to appear)
- [20] Raychaudhurim S., Mukherjee MN., On  $\delta$ -almost continuity and  $\delta$ -preopen sets., Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 1993;21(4)
- [21] Noiri T., Remarks on  $\delta$ -semi open sets and  $\delta$ -preopen sets., Demonstratio Math, 2003(36):1007-20
- [22] Ekici E. and Noiri T., On subsets and decompositions of continuity in ideal topological spaces,The arabian journal for science and engineering, 2009, vol(34), number 1A, 165