T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİDE BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER

Kenan ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA - 2006

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİDE BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER

Kenan ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 24/05/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

imza	imza	imza
Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN	Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL	Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİDE BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER

Kenan ARSLAN

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

2006, Sayfa : 24+v

Bu tezin ikinci bölümünde, topolojik uzaylarda lokal kapalı [6], α-açık [19], semi açık [12], preaçık [14], β-açık [1], g-kapalı [13] ve rg-kapalı [23] küme kavramları incelenmiştir.

Bu tezin üçüncü bölümünde, slc-küme, plc-küme, βlc-küme, αglc-küme, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme, αrglc-küme, srglc-küme, prglc-küme ve βrglc-küme olarak isimlendirdiğimiz yeni genelleştirilmiş kapalı küme kavramlarını ortaya koyduk ve bu küme kavramlarının sağladığı bazı özellikleri elde ettik.

Anahtar kelimeler ve deyimler : lokal kapalı, α-açık, preaçık, semi açık ve β-açık küme.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME GENERALIZED CLOSED SETS IN TOPOLOGY

Kenan ARSLAN
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yusuf BECEREN
2006, Page : 24+v

Recall the concepts of locally closed [6] (resp. α-open [19], semi open [12], preopen [14], β-open [1], g-closed [13], rg-closed [23]) sets in topological spaces.

In 3. Section, we introduce and investigate the notions of new classes of sets, namely slc-set, plc-set, βlc-set, αglc-set, sglc-set, pglc-set, βglc-set, αrglc-set, srglc-set, prglc-set and βrglc-set, and obtain some properties of these sets in topological spaces.

Key words and phares : locally closed, α-open, preopen, semi open and β-open set.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR

Araştırma konusunun belirlenmesinde ve çalışmalarımın yürütülmesinde yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN'e teşekkürlerimi sunarım.

Kenan ARSLAN

GÖSTERİMLER

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun.

$A' = X-A$: A kümesinin tümleyeni

(A,τ_A) : (X,τ) uzayının A alt uzayı

A^- : A kümesinin (X,τ) uzayına göre kapanışı

A^o : A kümesinin (X,τ) uzayına göre içi

$(B)_A^-$: B kümesinin, (A,τ_A) alt uzayına göre kapanışı

$(B)_A^o$: B kümesinin, (A,τ_A) alt uzayına göre içi

$\alpha(X)$: (X,τ) uzayındaki bütün α-açık kümelerin ailesi

SO(X) : (X,τ) uzayındaki bütün semi açık kümelerin ailesi

PO(X) : (X,τ) uzayındaki bütün preaçık kümelerin ailesi

βO(X) : (X,τ) uzayındaki bütün β-açık kümelerin ailesi

LC(X) : (X,τ) uzayındaki bütün lokal kapalı kümelerin ailesi

$\alpha(A)$: (A,τ_A) alt uzayındaki bütün α-açık kümelerin ailesi

SO(A) : (A,τ_A) alt uzayındaki bütün semi açık kümelerin ailesi

PO(A) : (A,τ_A) alt uzayındaki bütün preaçık kümelerin ailesi

βO(A) : (A,τ_A) alt uzayındaki bütün β-açık kümelerin ailesi

1. Giriş

Bu tezin ikinci bölümünde, topolojik uzaylarda genelleştirilmiş kapalı kümeler hakkında şimdiye kadar tespit edebildiğimiz bilgiler kısaca verilmiştir:

İlk olarak 1970 yılında, N. Levine [13], genelleştirilmiş kapalı (kısaca, g-kapalı) küme tanımını vermiş ve bazı özelliklerini incelemiştir. 1993 yılında Palaniappan ve ark. [23], g-kapalı kümeden daha zayıf olan regüler genelleştirilmiş kapalı (kısaca rg-kapalı) küme kavramını vermişlerdir. Ayrıca 1966 yılında N. Bourbaki [6], lokal kapalı küme kavramını vermiştir. 1965 yılında O. Njaståd [19], α-açık kümeyi tanımlamıştır. 1963 yılında N. Levine [12], semi açık küme kavramını tanımlayıp incelemiştir. A. S. Mashhour ve ark. [14], 1982 yılında preaçık küme kavramını çalışmışlardır. 1983 yılında M. E. Abd El-Monsef ve ark. [1], β-açık küme kavramını incelemişlerdir.

Bu tezin üçüncü bölümünde, hem lokal kapalı ve hem de α-açık kümeden zayıf olan αlc-küme [18] kavramının sağladığı bazı özelliklerini inceledik. αlc-kümeden daha zayıf olan plc-küme olarak adlandırdığımız, yeni bir küme tanımı verdik ve sağladığı bazı özellikleri inceledik. Plc-küme kavramı, aynı zamanda, preaçık küme kavramından daha geneldir. Bunlardan başka, slc-küme, βlc-küme, αglc-küme, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme, αrglc-küme, srglc-küme, prglc-küme ve βrglc-küme olarak isimlendirdiğimiz yeni genelleştirilmiş kapalı küme tanımlarını verdik ve bunların sağladığı bazı özelliklerini tespit ettik ve ispatladık.

2. Bazı Genelleştirilmiş Kapalı Kümeler Hakkında Kısa Bilgi

2.1. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A\subset A^{o-o}$ oluyorsa A kümesine α-açık küme [19] denir.

2.1. Lemma [5],[19]. Her açık küme, α-açıktır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve açık bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A açık olduğundan $A = A^o$ dır. Buradan $A^o\subset A^{o-o}$ olur. O halde A kümesi, bir α-açık kümedir.

2.1. Uyarı [5]. α-açık bir kümenin, açık olması gerekmez.

2.1. Örnek [5]. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\alpha(X) = \{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ olduğu açıktır. Buradan $\{a,b\}$ kümesi, bir α-açık kümedir, fakat açık bir küme değildir.

2.2. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A\subset A^{o-}$ oluyorsa A kümesine semi açık küme [12] denir.

2.2. Lemma [5],[19]. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda $A\in\alpha(X)$ olması için gerek ve yeter şart her $B\in SO(X)$ için $A\cap B\in SO(X)$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. $A\in\alpha(X)$ olsun. Her $B\in SO(X)$, $x\in A\cap B$ noktası ve bir $U\in\tau$ $(x\in U)$ kümesi verilsin. $A\in\alpha(X)$ olduğundan, $A\subset A^{o-o}$ olur. Buradan $U\cap A^{o-o}$ kümesi, açık bir kümedir ve x noktasını içerir. $B\in SO(X)$ olduğundan, $B\subset B^{o-}$ ve $x\in B^{o-}$ olur. Kapanış noktası tanımından, $(U\cap A^{o-o})\cap B^o \neq \varnothing$ dır. $V = (U\cap A^{o-o})\cap B^o$ diyelim. $V\subset A^{o-}$ olduğundan, $\varnothing \neq V\cap A^o = U\cap(A^o\cap B^o)$ elde edilir. Buradan $x\in(A^o\cap B^o)^-$ olur. O halde $A\cap B\subset(A^o\cap B^o)^- = (A\cap B)^{o-}$ olur. Böylece $A\cap B\in SO(X)$ dir.

$\Leftarrow$. Her $B\in SO(X)$ için $A\cap B\in SO(X)$ olsun. Bu durumda $A\in SO(X)$ olur. A kümesinin α-açık olduğunu göstereceğiz. Varsayalım ki A kümesi α-açık olmasın. Bu durumda bir $x\in A\cap(X-A^{o-o})$ elemanı vardır. $B = X-A^{o-}$ diyelim. Buradan $x\in B^-$ olur. Dolayısıyla $\{x\}\cup B\in SO(X)$ olur. Böylece $A\cap(\{x\}\cup B)\in SO(X)$ elde edilir. Diğer taraftan $A\cap(\{x\}\cup B) = \{x\}$ dir. O halde $\{x\}$ kümesi açıktır. Böylece $x\in A^{o-}$ iken $x\in A^{o-o}$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $A\subset A^{o-o}$ olur. Böylece A kümesi α-açıktır.

2.3. Lemma [5],[19]. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu durumda $\alpha(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojik yapıdır.

İspat. a_1] $X,\varnothing\in\alpha(X)$ olduğu açıktır.

a_2] Her $i\in I$ için $A_i\in\alpha(X)$ olsun. Bu durumda her $i\in I$ için $A_i\subset A_i^{o-o}$ olur. Buradan $\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i^{o-o} \subset (\bigcup_{i\in I} A_i^{o})^{-o} \subset (\bigcup_{i\in I} A_i)^{o-o}$ olur. O halde $\bigcup_{i\in I} A_i \in \alpha(X)$ dir.

a_3] A_1, $A_2\in\alpha(X)$ olsun. $A_1\in\alpha(X)$ olduğundan, 2.2. Lemma gereğince, her $B\in SO(X)$ için $A_1\cap B\in SO(X)$ olur. $A_2\in\alpha(X)$ olduğundan, yine 2.2. Lemmadan, $A_1\cap A_2\cap B\in SO(X)$ elde edilir. Böylece her $B\in SO(X)$ için $(A_1\cap A_2)\cap B\in SO(X)$ olduğundan, 2.2. Lemmadan, $A_1\cap A_2\in\alpha(X)$ olur. O halde $\alpha(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojidir.

2.4. Lemma [5],[19]. Her α-açık küme semi açıktır.

İspat. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Herhangi bir $A\in\alpha(X)$ kümesi verilsin. A kümesi α-açık olduğundan, $A\subset A^{o-o}$ olur. Buradan $A\subset A^{o-}$ olur. O halde A kümesi bir semi açık kümedir.

2.2. Uyarı [5]. Semi açık bir kümenin, α-açık küme olması gerekmez.

2.2. Örnek [5]. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\alpha(X) = \{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $SO(X) = \{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}, \{a,c\},\{b,c\}\}$ olur. Buradan $\{a,c\}$ kümesi bir semi açık kümedir, fakat α-açık değildir.

2.3. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A\subset A^{-o}$ oluyorsa A kümesine preaçık küme [14] denir.

2.5. Lemma [5],[20]. Her α-açık küme, preaçıktır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\in\alpha(X)$ kümesi verilsin. $A\in\alpha(X)$ olduğundan $A\subset A^{o-o}$ olur. Buradan $A\subset A^{-o}$ olur. O halde A kümesi, bir preaçık kümedir.

2.3. Uyarı [5],[21]. Preaçık bir kümenin, α-açık olması gerekmez.

2.3. Örnek [5],[21]. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\emptyset,\{a,b\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\alpha(X) = \{X,\emptyset,\{a,b\}\}$ ve $PO(X) = \{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ olur. $\{a\}$ kümesi preaçıktır, fakat semi açık olmadığından α-açık değildir.

2.6. Lemma [5],[20]. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda A kümesinin α-açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin semi açık ve preaçık olmasıdır.

İspat. **$\Rightarrow$.** A kümesi, bir α-açık küme olsun. 2.4. Lemmadan, A kümesi semi açıktır. 2.5. Lemmadan, A kümesi preaçıktır.

$\Leftarrow$. A kümesi semi açık ve preaçık bir küme olsun. A kümesi semi açık olduğundan, $A\subset A^{o-}$ olur. Buradan $A^{-}\subset A^{o--} = A^{o-}$ ve dolayısıyla $A^{-o}\subset A^{o-o}$ elde edilir. A kümesi preaçık olduğundan $A\subset A^{-o}$ olur. O halde A kümesi α-açıktır.

2.7. Lemma [5],[24]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer A kümesi, X de α-açık ve B kümesi, X de preaçık ise $A\cap B$ kümesi, X de preaçıktır.

İspat. Eğer $S\subset X$ alt kümesi açık bir küme ise her $A\subset X$ için $S\cap A^{-} \subset(S\cap A)^{-}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $A\cap B\subset A^{o-o}\cap B^{-o}\subset(A^{o-}\cap B^{-o})^{o}\subset(A^{o}\cap B^{-})^{-o}\subset(A\cap B)^{-o}$ olur. O halde $A\cap B\in PO(X)$ dir.

2.4. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A\subset A^{-o-}$ oluyorsa A kümesine β-açık küme [1] denir.

2.8. Lemma [1]. Her semi açık küme, β-açık kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve semi açık bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, semi açık olduğundan, $A\subset A^{o-}$ dır. $A^{o-}\subset A^{-o-}$ olduğundan, A kümesi, β-açık kümedir.

2.4. Uyarı. 2.4. Örnekten, β-açık bir kümenin, semi açık olması gerekmez.

2.4. Örnek. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\{a,b\}$ kümesi β-açık kümedir, fakat semi açık değildir.

2.9. Lemma [1]. Her preaçık küme, β-açık kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve preaçık bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, semi açık olduğundan, $A\subset A^{-o}$ dır. $A^{-o}\subset A^{-o-}$ olduğundan, A kümesi, β-açık kümedir.

2.5. Uyarı. β-açık bir kümenin, preaçık olması gerekmez: Gerçekten, 2.2. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayındaki $\{b,c\}$ kümesi β-açıktır, fakat preaçık değildir.

2.5. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ ise A kümesine, lokal kapalı küme [6] denir. (X,τ) uzayındaki bütün lokal kapalı kümelerin ailesi, genellikle LC(X) ile gösterilir [8].

2.10. Lemma [5],[6]. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin lokal kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = S\cap A^{-}$ olacak şekilde bir $S\subset X$ açık alt kümesi vardır.

İspat. **⇒.** A kümesi, X de lokal kapalı olsun. Bu durumda S kümesi, X de açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ dir. $A\subset F$ olduğundan, $A^{-}\subset F^{-} = F$ olur. Dolayısıyla $A\subset S\cap A^{-}\subset S\cap F = A$ elde edilir. Böylece $A = S\cap A^{-}$ olur.

⇐. $A = S\cap A^{-}$ ∍ S kümesi, X de açık olsun. A^{-} kümesi, X de kapalı olduğundan, A kümesi bir lokal kapalı kümedir.

2.11. Lemma [9]. Her açık küme, bir lokal kapalı kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve açık bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda $A = A\cap X$ olur. X kümesi kapalı olduğundan, A kümesi, lokal kapalıdır.

2.6. Uyarı. Lokal kapalı bir kümenin açık olması gerekmez: Gerçekten, 2.1. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında $\{b,c\}$ kümesi, lokal kapalıdır, fakat β-açık olmadığından açık değildir. Ayrıca $\{a,b\}$ kümesi, α-açıktır, fakat lokal kapalı değildir. Böylece α-açık, semi açık, preaçık ve β-açık kümeler ile lokal kapalı küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

2.12. Lemma [5],[11]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de lokal kapalı ve B kümesi, X de açık ise $A\cap B$ kümesi, X de lokal kapalıdır.

İspat. A kümesi lokal kapalı ve B kümesi açık olsun. A kümesi lokal kapalı olduğundan, S kümesi, X de açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ dır. B kümesi, X de açık olduğundan, $A\cap B = S\cap F\cap B = S\cap B\cap F$ olur. $S\cap B$ kümesi, X de açık olduğundan, $A\cap B$ kümesi, X de lokal kapalıdır.

2.13. Lemma [5],[9]. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

ı) A kümesi açıktır;

ıı) A kümesi α-açık ve lokal kapalıdır;

ııı) A kümesi preaçık ve lokal kapalıdır.

İspat. (ı) $\Rightarrow$ (ıı) ve (ıı) $\Rightarrow$ (ııı) açıktır.

(ııı) $\Rightarrow$ (ı). A kümesi preaçık ve lokal kapalı olsun. Bu durumda $A\subset A^{-o}$ ve $S\subset X$ alt kümesi açık olmak üzere $A = S\cap A^{-}$ dır. Buradan $A\subset S\cap A^{-o} = (S\cap A^{-})^{o} = A^{o}$ olur ki A kümesi açıktır.

2.14. Lemma [5],[9]. (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdakiler vardır:

(ı) $\tau = \alpha(X)\cap LC(X)$.

(ıı) $\tau = PO(X)\cap LC(X)$.

İspat. 2.13. Lemmadan çıkar.

2.6. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A\subset U$ ve U kümesi, X de açık olmak üzere $A^{-}\subset U$ oluyorsa A kümesine, genelleştirilmiş kapalı küme veya kısaca g-kapalı küme [13] denir.

2.15. Lemma [22]. Her kapalı küme, bir g-kapalıdır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve kapalı bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A\subset U$ ve U kümesi, X de açık olsun. A kümesi, kapalı olduğundan $A^- = A\subset U$ olur. O halde A kümesi, g-kapalıdır.

2.7. Uyarı. g-kapalı bir kümenin kapalı olması gerekmez: Gerçekten, 2.1. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında $\{a,b\}$ kümesi, g-kapalıdır, fakat kapalı değildir.

2.16. Lemma [13]. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. A kümesinin g-kapalı olması için gerek ve yeter şart $A^- -A$ kümesinin boştan farklı hiçbir kapalı alt kümeyi kapsamamasıdır.

İspat. $\Rightarrow$. F kümesi, $A^- -A$ kümesinin boş olmayan kapalı bir alt kümesi olsun. $A\subset F' \in\tau$ dir. A kümesi g-kapalı olduğundan, $A^-\subset F'$ olur. Buradan $F\subset(A^-)'$ dir. Dolayısıyla $F\subset A^-\cap(A^-)'$ olur. Böylece $F = \varnothing$ dir.

$\Leftarrow$. $O\in\tau$ ve $A\subset O$ olsun. Eğer $A^-\not\subset O$ ise $A^-\cap O' \neq\varnothing$ kümesi, $A^- -A$ kümesinin kapalı bir alt kümesi olur ki bu hipotezle çelişir. Böylece A kümesi, g-kapalıdır.

2.1. Sonuç [13]. (X,τ) topolojik uzayı ve g-kapalı bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $A^- -A$ kümesinin kapalı olmasıdır.

İspat. A kümesi kapalı ise $A^- -A = \varnothing$ ve $\varnothing$ kapalıdır. Karşıt olarak $A^- -A$ kümesi kapalı olsun. Buradan A kümesi g-kapalı olduğundan, 2.16. Lemma gereğince, $A^- -A = \varnothing$ dir. Böylece $A^- = A$ olur.

2.17. Lemma [13]. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. A ve B kümeleri, X de g-kapalı ise $A\cup B$ kümesi, X de g-kapalıdır.

İspat. $O\in\tau$ ve $A\cup B\subset O$ olsun. A ve B kümeleri, g-kapalı olduğundan $A^-\subset O$ ve $B^-\subset O$ olur. Buradan $(A\cup B)^- = A^-\cup B^-\subset O$ dır. Böylece $A\cup B$ kümesi, X de g-kapalıdır.

2.5. Örnek [13]. İki g-kapalı kümenin kesişimi, genellikle g-kapalı değildir: Gerçekten, $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset,\{a\},X\}$ topolojisini alalım. $A = \{a,b\}$ ve $B = \{a,c\}$ kümelerinin her biri g-kapalıdır, çünkü $A^- = X$ ve $B^- = X$ dir. Fakat $A \cap B = \{a\} \subset \{a\}$ ve $\{a\}^- = X \not\subset \{a\}$ olduğundan, $A \cap B$ kümesi, X de g-kapalı değildir.

2.18. Lemma [13]. (X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subset A \subset X$ olsun. A kümesi, X de g-kapalı ve B kümesi, A da g-kapalı ise B kümesi, X de g-kapalıdır.

İspat. $B \subset O \in \tau$ olsun. $B \subset A \cap O \in \tau_A$ dır. B kümesi, A da g-kapalı olduğundan, $(B)_A^- = A \cap B^- \subset A \cap O$ ve $A \subset O \cup (B^-)' \in \tau$ dir. A kümesi, X de g-kapalı olduğundan $A^- \subset O \cup (B^-)'$ dir. Böylece $B^- \subset A^- \subset O \cup (B^-)' \in \tau$ ve $B^- \subset O$ olur.

2.2. Sonuç. [13]. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,F \subset X$ olsun. A kümesi, X de g-kapalı ve F kümesi, X de kapalı ise $A \cap F$ kümesi, X de g-kapalıdır.

İspat. $A \cap F$ kümesi, A da kapalı olduğu açıktır. 2.15. Lemmadan $A \cap F$ kümesi, A da g-kapalıdır. 2.18. Lemma gereğince, $A \cap F$ kümesi, X de g-kapalıdır.

2.19. Lemma [13]. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A,B \subset X$ olsun. A kümesi, X de g-kapalı ve $A \subset B \subset A^-$ ise B kümesi, X de g-kapalıdır.

İspat. $A \subset B \subset A^-$ ise $B^- - B \subset A^- - A$ dır. A kümesi g-kapalı olduğundan, 2.16. Lemma gereğince, $A^- - A$ kümesi boş olmayan kapalı hiçbir alt kümeyi kapsamaz. Bu durumda $B^- - B$ kümesi de boştan farklı kapalı bir alt kümeyi kapsamayacaktır. Böylece B kümesi, X de g-kapalıdır.

2.20. Lemma [13]. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $B \subset A \subset X$ ve B kümesi, X de g-kapalı ise B kümesi, A alt uzayında g-kapalıdır.

İspat. $O \in \tau$ ve $B \subset A \cap O \in \tau_A$ olsun. $B \subset O$ ve B kümesi, X de g-kapalı olduğundan, $B^- \subset O$ olur. Böylece $(B)_A^- = A \cap B^- \subset O \cap A$ ve B kümesi, A da g-kapalıdır.

2.21. Lemma [13]. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. κ, X deki bütün kapalı kümeler ailesi olmak üzere $\tau = \kappa$ olması için gerek ve yeter şart X in her alt kümesinin, g-kapalı olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$**.** $\tau = \kappa$ olsun. $A\subset X$ ve $A\subset O\in\tau$ alalım. $\tau = \kappa$ olduğundan, $A^{-}\subset O^{-} = O$ olup A kümesi, X de g-kapalıdır.

$\Leftarrow$. X in her alt kümesi, g-kapalı olsun. Bir $O\in\tau$ alalım. $O\subset O\subset X$ ve O kümesi, X de g-kapalı olduğundan, $O^{-}\subset O$ dır. $O\subset O^{-}$ olduğundan, $O^{-} = O$ ve $O\in\kappa$ dir. Buradan $\tau\subset\kappa$ elde edilir. Şimdi herhangi bir $F\in\kappa$ alalım. $F'\in\tau\subset\kappa$ olduğundan, $F'\in\kappa$ dir. Böylece $F\in\tau$ ve $\kappa\subset\tau$ olur. O halde $\tau = \kappa$ dir.

2.7. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A^{-o} = A$ ise A kümesine regüler açık küme [7] denir.

2.22. Lemma [10]. Her regüler açık küme, açıktır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve regüler açık bir $A\subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda $A^{-o} = A$ olur. Buradan $A^{o} = A^{-oo} = A^{-o} = A$ dır. O halde A kümesi, açıktır.

2.8. Uyarı. Açık bir kümenin regüler açık olması gerekmez. Gerçekten, 2.1. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında $\{a\}$ kümesi, açıktır fakat regüler açık değildir, çünkü $\{a\}^{-o} = X^{o} = X \neq \{a\}$ dır.

2.8. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A\subset U$ ve U regüler açık olmak üzere $A^{-}\subset U$ oluyorsa A kümesine, regüler genelleştirilmiş kapalı küme veya kısaca rg-kapalı küme [23] denir.

2.23. Lemma [22]. Her g-kapalı küme, rg-kapalıdır.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve g-kapalı bir $A\subset X$ alt kümesi alalım. $A\subset U$ ve U kümesi, X de regüler açık olsun. 2.22. Lemmadan, U kümesi, X de açıktır. A kümesi, X de g-kapalı olduğundan $A^{-}\subset U$ olur. O halde A kümesi, X de rg-kapalıdır.

2.9. Uyarı [22]. rg-kapalı bir kümenin, g-kapalı olması gerekmez.

2.6. Örnek [22]. X = {a,b,c} kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ topolojisini alalım. {a,b} kümesi, X de rg-kapalıdır, fakat g-kapalı değildir. Çünkü $\{a,b\}\subset\{a,b\}\in\tau$ iken $\{a,b\}^{-} = X\not\subset\{a,b\}$ dır.

2.9. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de açık ve F kümesi, X de g-kapalı iken $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de glc**-küme [4] denir.

2.24. Lemma [4]. Her lokal kapalı küme, glc**-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, X de lokal kapalı olsun. Bu durumda S kümesi, X de açık ve F kümesi, X de kapalı iken $A = S\cap F$ dır. 2.15. Lemmadan, F kümesi, X de g-kapalıdır. O halde A kümesi, X de glc**-kümedir.

2.10. Uyarı. glc**-kümenin, lokal kapalı olması gerekmez. Gerçekten, 2.4. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında {a,b} kümesi, glc**-kümedir, fakat lokal kapalı değildir.

2.10. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. $A = S\cap F$ olacak şekilde açık bir $S\subset X$ alt kümesi ve rg-kapalı bir $F\subset X$ alt kümesi varsa A kümesine, X de rglc**-küme [2] denir.

2.25. Lemma [2]. Her glc**- küme, rglc**-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, X de glc**-küme olsun. Bu durumda S kümesi, X de açık ve F kümesi, X de g-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ dır. 2.23. Lemmadan, F kümesi, X de rg-kapalıdır. Böylece A kümesi, X de rglc**-kümedir.

2.3. Sonuç [2]. Her lokal kapalı küme, rglc**-kümedir.

İspat. 2.24. ve 2.25. Lemmalardan çıkar.

2.26. Lemma [2]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de $rglc^{**}$-küme ve B kümesi, X de açık ise $A\cap B$ kümesi, X de $rglc^{**}$-kümedir.

İspat. A kümesi, $rglc^{**}$ -küme olduğundan, $A = S\cap F$ olacak şekilde açık bir $S\subset X$ alt kümesi ve rg-kapalı bir $F\subset X$ alt kümesi vardır. Buradan $A\cap B = (S\cap F)\cap B =$ $= (S\cap B)\cap F$ olur. $S\cap B$ kümesi, X de açık olduğundan, $A\cap B$ kümesi, X de $rglc^{**}$-kümedir.

2.27. Lemma [2]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, X de g-kapalı ve açık olsun. B kümesi, A alt uzayında $rglc^{**}$-küme ise B kümesi, X de $rglc^{**}$-kümedir.

İspat. B kümesi, A da $rglc^{**}$-küme olsun. Bu durumda $B = S\cap F$ olacak şekilde açık bir $S\subset A$ alt kümesi ve rg-kapalı bir $F\subset A$ alt kümesi vardır. A kümesi, X de g-kapalı ve açık olduğundan, F kümesi, X de rg-kapalıdır [23]. Böylece B kümesi, X de $rglc^{**}$-kümedir.

2.28. Lemma [2]. (X,τ) ve (Y,υ) topolojik uzayları verilsin. A kümesi, X uzayında $rglc^{**}$-küme ve B kümesi, Y uzayında $rglc^{**}$-küme ise $A\times B$ kümesi, $(X\times Y,\tau\times\upsilon)$ çarpım uzayında $rglc^{**}$-kümedir.

İspat. A kümesi, X de $rglc^{**}$-küme olduğundan, $A = V\cap W$ olacak şekilde bir $V\subset X$ açık alt kümesi ve bir $W\subset X$ rg-kapalı alt kümesi vardır. B kümesi, Y de $rglc^{**}$-küme olduğından, $B = S\cap F$ olacak şekilde bir $S\subset Y$ açık alt kümesi ve bir $F\subset Y$ rg-kapalı alt kümesi vardır. Buradan $A\times B = (V\cap W)\times(S\cap F) = (V\times S)\cap(W\times F)$ olur. Böylece $V\times S$ kümesi, $X\times Y$ de açık ve $W\times F$ kümesi, $X\times Y$ de rg-kapalı olduğundan, $A\times B$ kümesi, $(X\times Y,\tau\times\upsilon)$ çarpım uzayında $rglc^{**}$ -kümedir.

2.11. Tanım. (X,τ) uzayı bir topolojik uzay olsun. $\forall x,y\in X$ $(x\neq y)$ için, $\exists U\in\vartheta(x) \ni y\notin U$ ve $\exists V\in\vartheta(y) \ni x\notin V$ ise, yani bu noktalardan, her birinin diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, (X,τ) uzayına, T_1 –uzayı veya Fréchet uzayı [25] denir.

2.29. Lemma [25]. (X,τ) uzayının T_1 –uzayı olması için gerek ve yeter şart (X,τ) uzayının tek elemanlı her alt kümesinin kapalı olmasıdır.

2.12. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının g-kapalı her alt kümesi, kapalı ise (X,τ) uzayına $T_{1/2}$ –uzayı [13] denir.

2.30. Lemma [13]. Her T_1 –uzayı, $T_{1/2}$ –uzayıdır.

İspat. (X,τ) bir T_1 -uzayı ve g-kapalı bir $A\subset X$ alt kümesi olsun. Varsayalım ki A kümesi, X de kapalı olmasın. Bir $x\in A^- - A$ elemanı alalım. $\{x\}\subset A^- - A$ olur. X T_1 -uzayı olduğundan, 2.29. Lemma gereğince, $\{x\}$ kümesi, X de kapalıdır. 2.16. Lemma gereğince, A kümesi, X de g-kapalı değildir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde (X,τ) $T_{1/2}$ –uzayıdır.

2.11. Uyarı [13]. $T_{1/2}$ –uzayının, T_1 –uzayı olması gerekmez.

2.7. Örnek [13]. $X = \{a,b\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset,\{a\},X\}$ topolojisi verilsin. (X,τ) uzayı, bir $T_{1/2}$ –uzayıdır, fakat T_1 **-**uzayı değildir, çünkü tek elemanlı $\{a\}$ kümesi, X de kapalı değildir.

2.13. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x,y\in X$ $(x\neq y)$ için, $\exists U\in\vartheta(x) \ni y\notin U$ veya $\exists V\in\vartheta(y) \ni x\notin V$ ise, yani en az bir noktanın, diğer noktayı içermeyen bir komşuluğu varsa, (X,τ) uzayına, T_0 –uzayı veya Kolmogorov uzayı [25] denir.

2.31. Lemma [25]. (X,τ) uzayının bir T_0 –uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ noktaları için $\{x\}^- \neq \{y\}^-$ olmasıdır.

2.32. Lemma [13]. Her $T_{1/2}$ –uzayı, bir T_0 -uzayıdır.

İspat. (X,τ) $T_{1/2}$ –uzayı olsun. Varsayalım ki (X,τ) T_0 -uzayı olmasın. 2.31. Lemmadan $\{x\}^- = \{y\}^-$ olacak şekilde farklı $x,y\in X$ noktaları vardır. $A = \{x\}^- - \{x\}$ diyelim. A kümesinin, X de g-kapalı olduğunu, fakat kapalı olmadığını göstereceğiz.

$x\in U\in\tau$ ise $U\cap A\supset\{y\} \neq \varnothing$ olur. Böylece $U\cap A \neq \varnothing$ dir. Buradan $x\in A^-$ olur. $x\notin A$ olduğundan, $A^-\not\subset A$ dir. Böylece A kümesi kapalı değildir. Şimdi A kümesinin, X de g-kapalı olduğunu gösterelim. $A\subset V\in\tau$ olsun. $A^-\subset V$ olduğunu göstermek için $\{x\}^-\subset V$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\{x\}^-\cap\{x\}' = A\subset V$ olduğundan, yalnızca $x\in V$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım ki $x\in V'$ olsun. Buradan $y\in\{y\}^- = \{x\}^-\subset V'$ olur. $y\in A\subset V$ olduğundan, $y\in V\cap V' = \varnothing$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde $x\in V$ dir. Böylece A kümesi, X de g-kapalı olur. Bu ise (X,τ) uzayının, $T_{1/2}$ –uzayı olmasıyla çelişir. O halde (X,τ) T_0 –uzayıdır.

2.12. Uyarı [13]. T_0 –uzayının, $T_{1/2}$ –uzayı olması gerekmez.

2.8. Örnek [13]. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\varnothing,\{a\},\{a,b\},X\}$ olsun. (X,τ) uzayı, T_0 -uzayıdır fakat $T_{1/2}$ **-**uzayı değildir, çünkü $\{a,c\}$ kümesi, X de g-kapalıdır ancak kapalı değildir.

2.4. Sonuç [13]. T_1 -uzayı $\Rightarrow$ $T_{1/2}$ -uzayı $\Rightarrow$ T_0 -uzayıdır.

İspat. 2.30. ve 2.32. Lemmalardan çıkar.

3. Lokal Kapalı Kümelerin Bazı Yeni Genelleştirmeleri

3.1. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de αlc-küme [18] denir.

3.1. Teorem. Her lokal kapalı küme, αlc-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, lokal kapalı olsun. Bu durumda S kümesi, X de açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ dır. 2.1. Lemmadan, S kümesi, X de α-açıktır. O halde A kümesi, X de αlc-kümedir.

3.1. Uyarı. αlc-kümenin, lokal kapalı olması gerekmez. Gerçekten, 2.1. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında $\{a,b\}$ kümesi αlc-kümedir, fakat lokal kapalı değildir.

3.2. Teorem. Her α-açık küme, αlc-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, X de α-açık olsun. X kümesi kapalı ve $A = A\cap X$ olduğundan A kümesi, X de αlc-kümedir.

3.2. Uyarı. αlc-kümenin, β-açık olması gerekmez. Gerçekten, 2.1. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında $\{b,c\}$ kümesi αlc-kümedir, fakat β-açık olmadığından α-açık küme değildir.

3.2. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de preaçık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de plc-küme denir.

3.3. Teorem. Her αlc-küme, plc-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, αlc-küme olsun. Bu durumda S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere A = = $S \cap F$ dır. 2.5. Lemmadan, S kümesi, X de preaçıktır. O halde A kümesi, X de plc-kümedir.

3.3. Uyarı. plc-kümenin, αlc-küme olması gerekmez. Gerçekten, 3.1. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında $\{a,b\}$ kümesi, plc-kümedir, fakat αlc-küme değildir.

3.1. Örnek. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\}\}$ topolojisi verilsin. Bu durumda $\{a,b\}$ kümesi preaçık olduğundan, plc-kümedir, fakat αlc-küme değildir.

3.4. Teorem. Her preaçık küme, plc-kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi, X de preaçık olsun. X kümesi kapalı ve $A = A \cap X$ olduğundan A kümesi, X de plc-kümedir.

3.4. Uyarı. plc-kümenin, preaçık olması gerekmez. Gerçekten, 2.1. Örnekteki (X,τ) topolojik uzayında $\{b,c\}$ kümesi αlc-küme olduğundan plc-kümedir, fakat β-açık olmadığından preaçık küme değildir. Böylece αlc-küme ile preaçık küme birbirinden bağımsızdır.

αlc-küme ve plc-küme ile bazı kümelerin karşılaştırmalarını gösteren bir çizelgeyi verebiliriz:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Açık küme} & \Rightarrow & \alpha\text{-açık küme} & \Rightarrow & \text{preaçık küme} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{lokal kapalı küme} & \Rightarrow & \alpha\text{lc- küme} & \Rightarrow & \text{plc-küme} \end{array}$$

3.5. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de αlc-küme ve B kümesi, X de α-açık olsun. Bu durumda $A \cap B$ kümesi, X de αlc-kümedir.

İspat. A kümesi, X de αlc-küme olsun. Bu durumda S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ dır. Buradan $A \cap B = (S \cap F) \cap B = (B \cap S) \cap F$ olur. B kümesi, X de α-açık olduğundan, $B \cap S$ kümesi, X de α-açıktır. O halde $A \cap B$ kümesi, X de αlc-kümedir.

3.1. Lemma [16]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. $B \subset A$ olsun. Eğer A kümesi, X de α-açık ve B kümesi, A alt uzayında α-açık ise B kümesi, X de α-açıktır.

3.6. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. $B \subset A$ olsun. Eğer A kümesi, X de α-açık ve B kümesi, A alt uzayında αlc-küme ise B kümesi, X de αlc-kümedir.

İspat. B kümesi, A alt uzayında αlc-küme olsun. Bu durumda $B = S \cap (B)_A^-$ olacak şekilde A alt uzayında α-açık bir S alt kümesi vardır. $(B)_A^- = A \cap B^-$ olduğundan, $B = (S \cap A) \cap B^-$ olur. Burada, 3.1. Lemma gereğince, $S \cap A$ kümesi, X de α-açıktır. O halde B kümesi, X de αlc-kümedir.

3.2. Lemma [16]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer A kümesi, X de preaçık ve B kümesi, X de α-açık ise $A \cap B$ kümesi, A alt uzayında α-açıktır.

3.7. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de preaçık ve B kümesi, X de αlc-küme olsun. Bu durumda $A \cap B$ kümesi, A alt uzayında αlc-kümedir.

İspat. B kümesi, X de αlc-küme olsun. Bu durumda S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ dır. Buradan $A \cap B = A \cap S \cap F = (A \cap S) \cap (A \cap F) = (A \cap S) \cap (F)_A^-$ olur. A kümesi, X de preaçık olduğundan, 3.2. Lemma gereğince, $A \cap S$ kümesi, A alt uzayında α-açıktır. Böylece $A \cap B$ kümesi, A da αlc-kümedir.

3.3. Lemma [15]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de semi açık ve B kümesi, X de preaçık olsun. Bu durumda $A \cap B$ kümesi, A alt uzayında preaçıktır.

3.8. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de semi açık ve B kümesi, X de plc-küme olsun. Bu durumda $A \cap B$ kümesi, A alt uzayında plc-kümedir.

İspat. B kümesi, X de plc-küme olsun. Bu durumda S kümesi, X de preaçık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $B = S \cap F$ dır. Buradan $A \cap B = A \cap S \cap F = (A \cap S) \cap (F)_A^-$ olur. A kümesi, X de semi açık olduğundan, 3.3. Lemma gereğince, $A \cap S$ kümesi, A da preaçıktır. Böylece $A \cap B$ kümesi, A da plc-kümedir.

3.3. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de semi açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ oluyorsa A kümesine, X de slc-küme denir.

3.4. Lemma [15]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B \subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de preaçık ve B kümesi, X de semi açık olsun. Bu durumda $A \cap B$ kümesi, A alt uzayında semi açıktır.

3.9. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de preaçık ve B kümesi, X de slc-küme olsun. Bu durumda $A\cap B$ kümesi, A alt uzayında slc-kümedir.

İspat. B kümesi, X de slc-küme olsun. Bu durumda S kümesi, X de semi açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $B = S\cap F$ dır. Buradan $A\cap B = A\cap S\cap F = (A\cap S)\cap(A\cap F) = (A\cap S)\cap(F)_A^-$ olur. A kümesi, X de preaçık olduğundan, 3.4. Lemma gereğince, $A\cap S$ kümesi, A alt uzayında semi açıktır. Böylece $A\cap B$ kümesi, A da slc-kümedir.

3.4. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de β-açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de βlc-küme denir.

3.5. Lemma [1]. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de α-açık ve B kümesi, X de β-açık olsun. Bu durumda $A\cap B$ kümesi, A alt uzayında β-açıktır.

3.10. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı ve $A,B\subset X$ alt kümeleri verilsin. A kümesi, X de α-açık ve B kümesi, X de βlc-küme olsun. Bu durumda $A\cap B$ kümesi, A alt uzayında βlc-kümedir.

İspat. B kümesi, X de βlc-küme olsun. Bu durumda S kümesi, X de β-açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $B = S\cap F$ dır. Buradan $A\cap B = A\cap S\cap F = (A\cap S)\cap(F)_A^-$ olur. A kümesi, X de α-açık olduğundan, 3.5. Lemma gereğince, $A\cap S$ kümesi, A da β-açıktır. Böylece $A\cap B$ kümesi, A da βlc-kümedir.

3.5. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de g-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de αglc-küme denir.

3.11. Teorem. (X,τ) topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Eğer A kümesi, X de αlc-küme ve B kümesi, X de g-kapalı ise bu durumda $A\cap B$ kümesi, X de αglc-kümedir.

İspat. A kümesi, X de αlc-küme ve B kümesi, X de g-kapalı olsun. Bu durumda S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ dır. Buradan $A\cap B = (S\cap F)\cap B = S\cap(F\cap B)$ olur. B kümesi, X de g-kapalı ve F kümesi, X de kapalı olduğundan, 2.2. Sonuç gereğince, $F\cap B$ kümesi, X de g-kapalı olur. O halde $A\cap B$ kümesi, X de αglc-kümedir.

3.12. Teorem. (X,τ) topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Eğer A kümesi, X de αglc-küme ve B kümesi, X de kapalı ise bu durumda $A\cap B$ kümesi, X de αglc-kümedir.

İspat. A kümesi, X de αglc-küme ve B kümesi, X de kapalı olsun. Bu durumda S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de g-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ dır. Buradan $A\cap B = (S\cap F)\cap B = S\cap(F\cap B)$ olur. B kümesi, X de kapalı ve F kümesi, X de g-kapalı olduğundan, 2.2. Sonuç gereğince, $F\cap B$ kümesi, X de g-kapalı olur. Böylece $A\cap B$ kümesi, X de αglc-kümedir.

3.13. Teorem. (X,τ) topolojik uzay ve $A,B\subset X$ olsun. Eğer A kümesi, X de αglc-küme ve B kümesi, X de αlc-küme ise bu durumda $A\cap B$ kümesi, X de αglc-kümedir.

İspat. A kümesi, X de αglc-küme olduğundan, S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de g-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ dır. B kümesi, X de αlc-küme olduğundan, U kümesi, X de α-açık ve K kümesi, X de kapalı olmak üzere $B = U\cap K$ dır. Buradan $A\cap B = (S\cap F)\cap(U\cap K) = (S\cap U)\cap(F\cap K)$ olur. 2.3. Lemma gereğince, $S\cap U$ kümesi, X de α-açıktır. F kümesi, X de g-kapalı ve K kümesi, X de kapalı olduğundan, 2.2. Sonuç gereğince, $F\cap K$ kümesi, X de g-kapalı olur. O halde $A\cap B$ kümesi, X de αglc-kümedir.

3.14. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$ –uzayı olsun. Bu durumda X uzayının her αglc-kümesi, αlc-kümedir.

İspat. 2.12. Tanımdan çıkar.

3.6. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de semi açık ve F kümesi, X de g-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de sglc-küme denir.

3.15. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$ –uzayı olsun. Bu durumda X uzayının her sglc-kümesi, slc-kümedir.

İspat. 2.12. Tanımdan çıkar.

3.7. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de preaçık ve F kümesi, X de g-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de pglc-küme denir.

3.16. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$ –uzayı olsun. Bu durumda X uzayının her pglc-kümesi, plc-kümedir.

İspat. 2.12. Tanımdan çıkar.

3.8. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de β-açık ve F kümesi, X de g-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de βglc-küme denir.

3.17. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$ –uzayı olsun. Bu durumda X uzayının her βglc-kümesi, βlc-kümedir.

İspat. 2.12. Tanımdan çıkar.

3.9. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının rg-kapalı her alt kümesi, X de g-kapalı ise bu uzaya T_{rg} –uzayı [3] denir.

3.10. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de α-açık ve F kümesi, X de rg-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de αrglc-küme denir.

3.18. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg} –uzayı olsun. Bu durumda X uzayındaki her αrglc-küme, αglc-kümedir.

İspat. 3.9. Tanımdan çıkar.

3.11. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de semi açık ve F kümesi, X de rg-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de srglc-küme denir.

3.19. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg} –uzayı olsun. Bu durumda X uzayındaki her srglc-küme, sglc-kümedir.

İspat. 3.9. Tanımdan çıkar.

3.12. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de preaçık ve F kümesi, X de rg-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de prglc-küme denir.

3.20. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg} –uzayı olsun. Bu durumda X uzayındaki her prglc-küme, pglc-kümedir.

İspat. 3.9. Tanımdan çıkar.

3.13. Tanım. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ alt kümesi verilsin. S kümesi, X de β-açık ve F kümesi, X de rg-kapalı olmak üzere $A = S\cap F$ oluyorsa A kümesine, X de βrglc-küme denir.

3.21. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg} –uzayı olsun. Bu durumda X uzayındaki her βrglc-küme, βglc-kümedir.

İspat. 3.9. Tanımdan çıkar.

3.14. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının yoğun her alt kümesi, açık ise bu uzaya submaximal uzay [6] denir.

3.15. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının açık her alt kümesinin kapanışı açık ise bu uzaya extremally bağlantısız uzay [19] denir.

3.22. Teorem. (X,τ) topolojik uzayı submaximal ve extremally bağlantısız uzay olsun. Bu takdirde aşağıdakiler vardır.

ı) lc-küme $\Leftrightarrow$ αlc-küme $\Leftrightarrow$ slc-küme $\Leftrightarrow$ plc-küme $\Leftrightarrow$ βlc-küme.

ıı) glc^{**}-küme $\Leftrightarrow$ αglc-küme $\Leftrightarrow$ sglc-küme $\Leftrightarrow$ pglc-küme $\Leftrightarrow$ βglc-küme.

ııı) $rglc^{**}$-küme $\Leftrightarrow$ αrglc-küme $\Leftrightarrow$ srglc-küme $\Leftrightarrow$ prglc-küme $\Leftrightarrow$ βrglc-küme.

İspat. X uzayı submaximal ve extremally bağlantısız uzay ise, $\tau = \alpha(X) = SO(X) = PO(X) = \beta O(X)$ olduğundan ([10] ,[17]), ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

[1] ABD EL-MONSEF, M. E., EL-DEEB, S. N., MAHMOUD, R. A., 1983, β-open sets and β-continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. A., 12, 77-90.

[2] AROCKIARANI, I., BALACHANDRAN, K., GANSTER, M., 1997, Regular generalized locally closed sets and rgl-continuous functions, Indian J. Pure Appl. Math., 28, 661-669.

[3] AROCKIARANI, I., BALACHANDRAN, K., 1997, On regular generalized continuous maps in topological spaces, Kyungpook Math. J., 37, 305-314.

[4] BALACHANDRAN, K., SUNDARAM, P., MAKI, H., 1996, Generalized locally closed sets and glc-continuous functions, Indian J. Pure Appl. Math., 27, 235-244.

[5] BECEREN, Y., 1995, Topolojik Uzaylarda Sürekliliğin Ayrışımı, Doktora Tezi, Selçuk Üniv. Fen Bil. Enst., Konya.

[6] BOURBAKI, N., 1966, Elements of Mathematics, General Topology, Part 1, Hermann, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., Paris.

[7] DUGUNDJI, J., 1966, Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston.

[8] GANSTER, M., REILLY, I. L., 1989, Locally closed sets and lc-continuous functions, Internal J. Math. Math. Sci., 12, 417-424.

[9] GANSTER, M., REILLY, I. L., 1990, A decomposition of continuity, Acta Math. Hungar. 56, 299-301.

[10] JANKOVIC, D. S., 1983, On locally irreducible spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Ser. I, 97, 59-72.

[11] JELIC, M., 1991, On pairwise LC-continuous mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 22, 55-59.

[12] LEVINE, N., 1963, Semi open sets and semi continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70, 36-41.

[13] LEVINE, N., 1970, Generalized closed sets in topology, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 19, 89-96.

[14] MASHHOUR, A. S., ABD EL-MONSEF, M. E., EL-DEEB, S. N., 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47-53.

[15] MASHHOUR, A. S., HASANEIN I. A., EL-DEEB, S. N., 1982, A note on semi-continuity and precontinuity, Indian J. Pure Appl. Math., 13, 1119-1123.

[16] MASHHOUR, A. S., HASANEIN I. A., EL-DEEB, S. N., 1983, α-continuous and α-open mappings, Acta Math. Hungar., 41, 213-218.

[17] NASEF, A. A., NOIRI, T., 1998, Strong forms of faint continuity, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math., 19, 21-28.

[18] AL-NASHEF, B., 2002, A decomposition of α-continuity and semi- continuity, Acta Math. Hungar., 97, 115-120.

[19] NJÅSTAD, O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math., 15, 961-970.

[20] NOIRI, T., 1984, On α-continuous functions, Casopis Pest. Mat. 109, 118-126.

[21] NOIRI, T., 1988, Characterizations of extremally disconnected spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 19, 325-329.

[22] NOIRI, T., 1996, Mildly normal spaces and some functions, Kyungpook Math. J., 36, 183-190.

[23] PALANIAPPAN, N., RAO, K. C., 1993, Regular generalized closed sets, Kyungpook Math. J., 33, 211-219.

[24] POPA, V., NOIRI, T., 1992, Almost weakly continuous functions, Demonstratio Math. 25, 241-251.

[25] YÜKSEL, Ş., 2002, Genel Topoloji, Selçuk Üniv. Fen-Edebiyat Fak. Yay., Konya.