T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$Ax^2 + B^m = y^n$ DIOPHANTINE DENKLEMİ VE TERAİ KONJEKTÜRÜ ÜZERİNE

Selin ÇENBERCİ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA 2009

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$AX^2 + B^m = y^n$ DIOPHANTINE DENKLEMİ VE TERAİ KONJEKTÜRÜ ÜZERİNE

Selin ÇENBERCİ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 20/01/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hasan ŞENAY	Prof. Dr. Durmuş BOZKURT	Prof. Dr. Dursun TAŞCI
(DANIŞMAN)	(JÜRİ)	(JÜRİ)

Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR	Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN
(JÜRİ)	(JÜRİ)

ÖZET

DOKTORA TEZİ

$Ax^2 + B^m = y^n$ DIOPHANTINE DENKLEMİ VE TERAİ KONJEKTÜRÜ ÜZERİNE

Selin ÇENBERCİ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Hasan ŞENAY
2009, 87 Sayfa

Jüri : Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Bu çalışmada, Sayılar Teorisinin en önemli problemlerinden biri olan, Diophantine denklemlerinin ve özel olarak da $x^2 + B^m = y^n$ denkleminin tamsayı çözümlerini araştırdık. İlk olarak Diophantine denklemlerinin özel bir formu olan $a^2 + B^2 = y^4$ Diophantine denklemini düşündük ve $x^2 + B^m = y^n$ denkleminin tamsayı çözümlerinin bulunmasına ilişkin yeni bir Tahmin verdik. Ve bundan yararlanarak, B ve y tamsayıları $q^2 + 1 = 2p^2$ eşitliğini gerçekleyen p ve q tek asalları olmak üzere, $x^2 + q^m = p^n$ Diophantine Denkleminin tek pozitif (x, m, n) çözümünün $\left((p^2 - 1), 2, 4\right)$ olduğunu gösterdik.

Anahtar Kelimeler: Diophantine Denklemleri, Cebirsel Sayılar, Tahmin, Terai Tahmini

ABSTRACT

Ph.D. THESIS

ON THE $AX^2 + B^m = y^n$ DIOPHANTINE EQUATION AND TERAİ CONJECTURE

Selin ÇENBERCİ

Selçuk University
Graduate School Of
Natural And Applied Sciences
Department Of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Hasan ŞENAY
2009, 87 Pages
Juries : Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Assist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR
Assist. Prof. Dr. Saadet ARSLAN

In this study, we focus on the search of the integer solutions of the Diophantine equations and especially the search of the integer solutions of the equation $x^2 + B^m = y^n$, which is one of the most important problems of Number Theory. First, we think a special form of the Diophantine equation $a^2 + B^2 = y^4$ and give a new conjecture about integer solutions of the equation $x^2 + B^m = y^n$. And then by using this, B and y are integers such that odd primes p, q which satisfy $q^2 + 1 = 2p^2$, we show the equation $x^2 + q^m = p^n$ has the only positive (x,m,n) integral solutions $(x,m,n) = \left(\left(p^2 - 1\right), 2, 4\right)$

Keywords: Diophantine equations, Quadratic Fields, Conjecture, Terai Conjecture.

ÖNSÖZ

Tam katsayılı ve birden fazla bilinmeyen kapsayan cebirsel denklemlerin tamsayılı çözümlerinin bulunması Sayılar Teorisi'nin en güç problemlerinden biridir. Bu problemle ilgili çalışmalara ait ilk izler M.Ö. 2000'li yıllara dayanmaktadır.

1636 yılında Fermat tarafından verilen Fermat'ın son Teoremi diye bilinen teoremin $n = 2$ özel durumunu düşünen bilim adamları için $x^2 + y^2 = z^2$ ikinci dereceden üç bilinmeyenli Diophantine denkleminin, hem geometrik açıdan, hem de tamsayılarla çözümlerinin araştırılması çok ilgi görmüş olup bu ilgi Sierpinski'yi $3^x + 4^y = 5^z$ denkleminin tamsayı çözümlerinin $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ olduğunu göstermesi problemine yöneltmiştir. W. Sierpinski'den sonra L. Jesmanowicz, N. Terai bu denklem üzerinde çalışmıştır. N. Terai'nin "eğer *a,b,c* Pisagor üçlüsü yani $a^2 + b^2 = c^2$ yi sağlayan pozitif tamsayılar ise $x^2 + b^m = c^n$ denkleminin tek (x, m, n) tamsayı çözümü $(x, m, n) = (a, 2, 2)$ dir." şeklinde ifade edilen ve Terai Tahmini olarak bilinen Tahmin üzerinde Z. Cao, X. Dong, Maohua Le, S.A. Arif, Fadwa S. Abu Muriefah gibi birçok bilim insanı, içinde Pisagor üçlüsü bulunan bu denklemin *a,b,c* ye verilen hangi değerler için Terai Tahmininü sağladığını farklı metodlar kullanarak, araştırmış ve hala da araştırmaktadır.

Üzerinde yapılan çalışmalarla hala ilk günkü önemini koruyarak, üretkenliğini her geçen gün bir kez daha kanıtlayan Diophantine denklemleriyle ilgili olarak "$Ax^2 + B^m = y^n$ Denklemi ve Terai Tahmini" konulu tezimin hazırlanmasında benden her türlü yardım ve desteklerini esirgemeyen danışman Hocam Prof. Dr. Hasan Şenay'a ve beni sabırla destekleyen eşime teşekkürlerimi sunarım.

Selin ÇENBERCİ

ARALIK 2008

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

$\Vert$	Maksimal Böler	$(a,r,t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a^t \Vert r \Leftrightarrow a^t \vert r,\ a^{t+1} \nmid r)$
$\left({}^{*}\!/_{*} \right)$	Jacobi Sembolü	
(a,b,c)	Denklemin Çözüm Üçlüsü	
B_r	Bernoulli sayısı	

1. GİRİŞ

M.Ö. 2000 li yıllarda bile $x^2+y^2=z^2$ denklemini gerçekleyen (x,y,z) sıralı tamsayı üçlülerinden bazıları Babilli Matematikçiler tarafından bilinmekteydi. Bu denklemler üzerindeki ilk sistematik çalışmaların Diophantus ile (M.S.225) başladığını biliyoruz. Bu yüzden bu denklemlere İskenderiyeli Matematikçi Diophantus'un ismi verilmiştir. Diophantus'un Mezopotamya Matematiğinden geniş ölçüde etkilenmiş olduğunu söyleyebiliriz. Bu denklemin sonsuz tane çözümünün olduğu ilk olarak Pisagor tarafından ispatlanmıştır. 1636 yılında Fermat, bilinen çok ünlü Tahmininü vermiş ve bu Tahminin ispatlanması için çok fazla sayıda matematikçi çalışmış, ancak 1995 yılında A. Wiles tarafından 108 sayfalık bir makale halinde tam olarak çözüme kavuşturulmuştur.

$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+........+a_ny^n=c$ denklemi üzerinde değişik yöntemler kullanılarak tamsayılarda çözümlerinin bulunması üzerindeki çalışmalar 1800 lü yıllarda A. Thue ile başlamış, E. Landau ile devam etmiş ve literatürden görüleceği gibi günümüze kadar gelmiştir.

1956 yılında W.Sierpinski $3^x+4^y=5^z$ denkleminin tek (x,y,z) tamsayı çözümünün $(x,y,z)=(2,2,2)$ olduğunu gösterdi. W. Jesmanowicz'de $5^x+12^y=13^z$, $7^x+24^y=25^z$, $9^x+40^y=41^z$, $11^x+60^y=61^z$ denklemlerinin tek pozitif tamsayı çözümlerinin $(x,y,z)=(2,2,2)$ olduğunu göstererek bununla ilgili "eğer a,b,c Pisagor üçlüsü yani $a^2+b^2=c^2$ yi sağlayan pozitif tamsayalar ise $a^x+b^y=c^z$ denkleminin tek (x,y,z) tamsayı çözümü $(x,y,z)=(2,2,2)$ dir. " şeklinde ifade edilen Tahmini verdi.

1993 yılında da N. Terai, bu Tahminin benzeri olan "$ebob(a,b,c)=1$ ve a çift olmak üzere, eğer a,b,c Pisagor üçlüsü yani $a^2+b^2=c^2$ yi sağlayan pozitif tamsayılar ise $x^2+b^m=c^n$ denkleminin tek $(x,m,n)\in\mathbb{Z}^3$ çözümlerinin $(x,m,n)=(a,2,2)$ dir." şeklinde ifade edilen Tahmini verdi. Daha sonrada bu Tahmindeki b ve c tamsayıları yerine $q^2+1=2p$ şartını sağlayan, p ve q tek asallarını kullanarak bu şartlar altında, $x^2+q^m=p^n$ denkleminin $(x,m,n)=(p-1,2,2)$ çözümünden başka çözümü olup olmadığını inceledi. N. Terai çalışmasında $q\equiv 1(\text{mod } 4)$ olması durumunda $x^2+q^m=p^n$ denkleminin çözümlerini buldu. Biz de $a^2+B^2=y^4$ Diophantine denklemini düşünerek, $x^2+B^m=y^n$ denkleminin tamsayı çözümlerinin bulunmasına ilişkin Terai'nin Tahmininin benzeri bir Tahmin verdik. Ve bundan yararlanarak, B ve y tamsayıları $q^2+1=2p^2$ eşitliğini gerçekleyen p ve q tek asalları olmak üzere, $x^2+q^m=p^n$ Diophantine Denkleminin tek pozitif (x,m,n) çözümünün $((p^2-1),2,4)$ olduğunu gösterdik. Burada bizim Tahminimizi ve teoremimizi içeren şartlarda $q\equiv 1(\text{mod } 4)$ durumuna ilave olarak çok farklı sonuçlar ortaya çıkartan $q\equiv 3(\text{mod } 4)$ olması durumunu da inceleyerek özgün birçok sonuç bulduk.

Hâlihazırda Terai'nin Tahmini üzerindeki çalışmalar literatürden de anlaşılacağı gibi devam etmektedir. Tezimizin konusu olan Diophantine denklemleri üzerindeki çalışmalar bugünde çok geniş bir şekilde sürdürülmekte olup bizde devam edeceği kanaatindeyiz.

1.1. Amaç ve Kapsam

Bilindiği gibi Fermat Tahmini olarak bilinen ve cebirsel sayılar teorisi gibi bugün matematiğin en aktif alanının doğmasına sebep olan "$n\geq 3$ için $x^n+y^n=z^n$ denkleminin $xyz\neq 0$ dışında hiçbir tamsayı çözümünün bulunmadığı" iddiası temelde Diophantine denklemlerinin Sayılar Teorisindeki önemini arttırmıştır. Hala bu tür denklemler üzerinde yapılan çalışmalar sürmekte olup, çok üretken bir alan olan Diophantine denklemleri, İdeal Teori vb. gibi birçok alanın ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Farklı biçimlerdeki Diophantine denklemlerinin tamsayı çözümlerinin bulunması problemiyle birçok ünlü Matematikçi çalışmış ve bunlarla ilgili çok farklı Tahminler ortaya koyup, değişik yöntemlerle ispatlar yapmışlardır.

1.2. Kaynak Araştırması

$ax^2+bx+c=dy^n$ Diophantine denklemi, a,b,c ve d tamsayı, $a\neq 0$, $b^2-4ac\neq 0$, $d\neq 0$ olmak üzere, $n\geq 3$ olduğunda sadece sonlu sayıda x ve y tamsayı çözümlerine sahiptir. Bu iddia ilk olarak A. Thue tarafından 19. yüzyılın sonlarına doğru, daha sonra da Edmund Landau ve Alexander Ostrowski (1920) tarafından 20. yüzyılın başlarında ispatlandı. $ax^2+bx+c=dy^n$ biçimindeki denklemin bütün x, y tamsayı çözümlerini veren genel bir method bilinmemektedir. Paragrafın başında $ax^2+bx+c=dy^n$ denkleminin çözümleri için ifade ettiğimiz teoremin, $n>3$ olması durumundaki ispatı yenidir. $n=3$ için ispatı ise Thue'nun teoreminin sonuçlarıyla kombinasyon yapılarak Mordell tarafından verilmiştir.

$x^2+C=y^n$ denklemi için, Fermat $C=2$, $n=3$ olması durumundaki tek çözümün $x=5$, $y=3$ ile verildiğini gösterdi ve ispatı 1770 yılında Euler tarafından yayınlandı. $x^2+C=y^n$ denkleminde $C=1$ yazmakla elde edilen, $x^2+1=y^n$ denkleminin çözümlerinin tamamı V.A. Lebesque (1850) tarafından verildi. C. Störmer (1899), $x^2+1=2y^{2m+1}$ denkleminin $y>1$ olduğunda çözümünün bulunmadığını ispatladı.

S. Ramanujan (1927), $x^2+C=y^n$ denklemi için C=7, y=2 olması durumunu içeren, $x^2+7=2^n$ Diophantine denkleminin çözümlerinin sadece $n=3,4,5,7$ ve 15 olması durumunda varolduğunu Tahmine etti.

W. Ljunggren (1944) $x^2+C=y^n$ denklemi için Fermat'ın sonucunu genelleştirerek $C=2$ için $x=5$ y=3 den başka çözümünün bulunmadığını ispatladı. W.Ljunggren (1945), $x^2+p^{2k+1}=4y^n$ denklemi için n=3 olduğunda tek çözümünün y=1 ve y=7 olduğunu ispatladı.

T. Nagell (1948), yaptığı çalışmasında Ramanujan'ın Tahmininü sağlattı. Ayrıca T. Nagell (1955), bir diğer çalışmasında $(D,2)=1$ olmak üzere $x^2+8D=y^n$ denklemiyle ilgili pek çok ilginç sonuç verdi.

$Cx^2+D=y^n$ denklemi y tek olması, C keyfi bir tamsayı ve $D=1,2$ veya 4 olması durumunda tam olarak T. Nagell (1955) tarafından çözüldü.

Th. Skolem, S. Chowla ve D.J. Lewis (1959), $2^{n+2}-7=x^2$ denkleminin $n=1,2,3,5$ ve 13 değerlerini aldığında rasyonel tamsayı çözümlerinin bulunduğunu ispatladılar.

D.J. Lewis (1961), $x^2+7M^2=y^n$ denkleminin ilkel bölenlerinin sayısı üzerine, n ve M nin terimlerinde bir üst sınır tanımladı. W. Ljunggren (1963), $y^2-k=x^3$ denklemini ele alarak $k\neq 0$ rasyonel sayısı için bu denklemin (x,y) tamsayı çözümlerini buldu.

W. Ljunggren (1964), C , D ve n, $D>1$ ve $CD>1$ kare çarpanı bulunmayan tek pozitif tamsayılar olmak üzere, ayrıca h, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-CD}\right)$ cisminin ideallerinin sınıf sayısı olduğunda tek y ler için $Cx^2+4D=y^n$ ve $x^2+4D=y^n$ denklemlerinin çözümlerinin bulunduğunun ispatını verdi.

W. Ljunggren (1966), bir diğer çalışmasında, yine C , D ve n, $D>1$ ve $CD>1$ kare çarpanı bulunmayan tek pozitif tamsayılar ve ayrıca h, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-CD}\right)$ cisminin ideallerinin sınıf sayısı olmak üzere, bu defa $Cx^2+D=2y^n$ denklemi üzerinde çalışarak, bu denkleme yüklenen farklı koşullar altında çözümlerinin bulunup bulunmadığını araştırdı.

J.H.E. Cohn (1966), x ve y tek olmak üzere $x^2+Dy^2=-4$ denkleminin farklı D değerleri için pozitif tamsayı çözümlerini buldu.

W. Ljunggren (1971), $x^2+D=4y^q$ denklemini düşündü ve bu denklem için, $D\equiv 7$ (mod 8) durumunu inceledi.

W. Ljunggren (1972), $x^2+D=4y^q$ genel denklemi üzerinde çalıştı ve D üzerindeki gerek şart altında bir çözüm bulunduğunu ispatladılar.

$x^2+C=y^n$ denklemi üzerine Ramanujan Tahmininden beri çok fazla sayıda çalışma yapıldı. J. Blass (1974), $y^2+K=x^5$ denkleminin tamsayı çözümleri üzerinde uğraştı ve K bir kare çarpansız tamsayı olmak üzere $K=19,341$ değerleri için hiçbir tamsayı çözümünün bulunmadığını ispatladı.

R. Alter ve K.K. Kubato (1975) çalışmalarında $x \geq 0$ olmak üzere $x^2 + 11 = 3^n$ denkleminin tek çözümünün $(x, n) = (4, 3)$ olduğunu gösterdiler. Bu ispatın en önemli özelliği Skolem, Chowla ve Lewis'in, bazı düşüncelerinin, T. Nagell'in methodu ile kombine edilerek yapılmasıydı.

E. Brown (1975), yaptığı çalışmasında $n > 2$ için $x^2 + 3 = y^n$ ve $n > 2$ ile verilen bir *p* asalı için ise $x^2 + 5 = p^n$ denklemlerinin çözümlerinin bulunmadığını gösterdi.

E. Brown (1977), a, b ve D tamsayılar ve p bir tek asal olmak üzere $ax^2 + Db^2 = p^n$ denklemi üzerinde çalıştı. Özel olarak da $D = 2, 3$ ve $b = 2^m, 3^m$ durumlarını inceledi.

Daha sonrada K. Tananashi (1977), M. Toyoizumi tarafından çözülen $y^2 + 7^m = 2^n$ Diophantine denkleminin (y, m, n) tamsayı çözümlerinin bulunduğunu farklı bir yolla ispat etti.

Birçok yazar *C* yi, $C = D^m$ şeklinde alıp, bununla ilgili birçok farklı durumu incelediler. M. Toyoizumi (1978), çalışmasında $y^2 + D^m = 2^n$ Diophantine denklemini düşündü ve öncelikle bazı rasyonel *a* tamsayıları için $2^{a+2} = a^2 + D$ olduğunu varsaydığımız da eğer $D \neq 7$ ise bu denklemde *m*=1 olması gerektiğini ispatladı. S. Rabinowitz (1978), $2^n + px^2 = y^p$ denkleminin $p = 3$ için bütün (x, y, z) tamsayı çözümlerini buldu.

M. Toyoizumi (1983), sabit bazı *D* ve *p* ler için $y^2 + D^m = p^n$ denkleminin tamsayı çözümlerini düşündü.

M. Le (1989), *D* kare çarpansız pozitif bir tamsayı ve *p* bir asal olduğunda, eğer $D > \exp 64$ ve $p = 2$ ise $x^{2p} - Dy^2 = 1$ denkleminin en fazla bir adet (x, y) pozitif tamsayı çözümünün bulunduğunu ispatladı.

M. Le (1989), Max $(D, p) > M$ ve $p \equiv 3$ (mod 4) ise $x^2 + D^m = p^n$ denkleminin en fazla bir (x, m, n) çözümünün bulunduğunu gösterdi.

q bir asal ve $m, n, x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x^2 + q^m = y^n$ denkleminin birçok özel durumu çalışıldı. $q = 2$ ve m bir tek tamsayı olduğunda J.H.E. Cohn (1992), bu denklemin tam 3 tane çözümünün bulunduğunu ispatladı.

J.H.E. Cohn (1992), $C = 19$ için $n \geq 3$ olması durumunda $x^2 + C = y^n$ denkleminin tam iki tane çözümünün bulunduğunu ispatladı.

J.H.E. Cohn (1993), Nagell in ispatından farklı bir ispat yaparak genel n ler için yaptığı çalışmasında n nin çift olması durumunda C nin iki tamkarenin farkı şekline gelmesinden açık bir şekilde incelenebileceğini gördü. Tek n ler için genelliği kaybetmeden tek p asalını düşündü. $C < 100$ olacak şekildeki C değerlerini inceleyerek bir takım genellemeler yaptı. J.H.E. Cohn, bu çalışmasında öncelikle bu denklemi çözmenin ancak $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-C}\right)$ cisminde tek çarpanlamanın mümkün olması durumunda yapılabileceğini belirterek; $ebob\left(x + \sqrt{-C}, x - \sqrt{-C}\right) = 1$ olduğundan bu denklemin $\left(x + \sqrt{-C}\right)\left(x - \sqrt{-C}\right) = y^p$ şeklinde çarpanlara ayrılabileceğinden hareketle herhangi a ve b tamsayıları için $\mp x + \sqrt{-C} = \left(a + b\sqrt{-C}\right)^p$ olacağından bunun çözümünün aşağıdaki şartlar sağlandığında bulunabileceğini belirtti.

1. $C \not\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$
2. Tersinir elemanlardan bir problem ortaya çıkmamalı.
3. Çalıştığımız $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-C}\right)$ cismi tek çarpanlanabilir olmalı.
4. C kare çarpansız pozitif tamsayı olmalı.
5. $\mp x + \sqrt{-C}$ terimlerinin ortak bir çarpanı olmamalı.

Buna ilave olarak $C \equiv 3$ (mod 4) olması durumunda çözüm için gerekli şartları vererek bunların ispatını yaptı.

$0 < C < 100$ şartını sağlayan pozitif tamsayılar için $n \geq 2$ koşulunu da dikkate aldı. $x^2 + C = y^n$ denklemini bu değerler için inceleyerek 77 adet C değeri için çözüme ulaşabildi. Fakat C=74 ve C=86 olacak şekildeki iki değer için çözümü tamamlayamadı. Cohn un metodunun bu durumlarda başarısız olmasının sebebi, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-C}\right)$

cisminin sınıf sayısının 5 in birer katı olmasıdır. C=74 ve C=86 durumları daha sonra M. Mignotte ve B.M.M. De Weger (1996) tarafından çalışılıp, Eliptic Curve yöntemi kullanılarak sonuca ulaştırıldı.

M. Le (1993), $D_1x^2+D_2=2^{n+2}$ denklemi için eğer $\min(D_1,D_2)>1$ ve $(D_1,D_2)\neq(3,5)$ ise $N(D_1,D_2)\leq 2$ olduğunu ispatladı.

M. Le (1993), m ve n, $m\geq 0$, $n>1$ ve h, sınıf sayısı olduğunda $(n,2h)=1$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere $n\geq 8.5.10^6$ ise $d_1x^2+2^{2m}d_2=y^n$ $(2|y)$ ve $d_1x^2+d_2=4y^n$ denklemlerinin hiçbir (x,y) pozitif tamsayı çözümlerinin bulunmadığını ispatladı.

M. Le (1993), D bir pozitif tamsayı ve verilen bir p tek asalı için $p|D$ olduğunda eğer $\max(D,p)\geq 10^{10^{193}}$ ve $(D,p)\neq(3s^2+1,\ 4s^2+1)$ ise $x^2+D=p^n$ denkleminin en fazla bir adet (x,n) pozitif tamsayı çözümünün bulunduğunu gösterdi.

M. Le (1993), yaptığı çalışmasında h, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-D}\right)$ cisminin sınıf sayısı olmak üzere, $p|h$ şartını sağlayan p tek asalı için $p\in\{5,7\}$veya $p>3.10^6$ ise $x^2+4D=y^p$ denkleminin hiçbir (x,y) tamsayı çözümünün olmadığını ispatladı.

R. Scott (1993), $b>1$ ve c pozitif tamsayılar ve p bir asal olduğunda $p^x-b^y=c$ denkleminin, 5 özel durumu hariç, y si tek olan en fazla bir (x,y) çözümünün bulunduğunu, bunun gibi y si çift olan yine en fazla bir (x,y) çözümünün bulunduğunu ispatladı.

K. Takakuwa ve Y. Aseada (1993), aynı yıl yaptıkları 3 farklı çalışmalarında $a,y\in\mathbb{N}$ ve $\ell,m,n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(4a^2-y^2,4ay,4a^2+y^2\right)$ Pisagor üçlüsünden faydalanarak $\left(4a^2-y^2\right)^\ell+(4ay)^m=\left(4a^2+y^2\right)^n$ Diophantine denklemini düşündüler ve bu denklemin tamsayı çözümlerinin bulunabilmesinin ℓ,m,n nin hangi değerleri için gerçeklendiğini ispatladılar.

N. Terai (1993), eğer (a,b,c) bir ilkel Pisagor üçlüsü, yani $a^2+b^2=c^2$, $ebob(a,b,c)=1$ ve $2|a$ olacak biçimde ise $x^2+b^y=c^z$ denkleminin tek çözümünün $(x,y,z)=(a,2,2)$ olduğunu ifade eden bir Tahmin verdi.

Ve Terai eğer *b* ve *c* (*i*) $b^2+1=2c$ olacak biçimde asallar (*ii*) *d*, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{b}\right)$ nin *b* ideal sınıf grubunda *c* nin asal böleninin mertebesi olduğunda *d*=1 veya çifttir eğer $b\equiv 1$ (mod 4) ise, Terai Tahmininin sağlandığını ispatladı. Ayrıca bu denklemde *b* ve *c* ler yerine, $q^2+1=2p$ eşitliğini sağlayan *p* ve *q* tek asallarını kullanarak, bu şartlar altında, $x^2+q^m=p^n$ denkleminin $(x,m,n)=(p-1,2,2)$ çözümünden başka çözümünün olup olmadığını inceledi. Daha sonraları Terai Tahmini ile ilgili pek çok çalışma yapıldı.

N. Terai (1994), *b* bir asal ve çift *m* tamsayısı için $a=m\left(m^2-3\right)$, $b=3m^2-1$, $c=m^2+1$ olmak üzere ayrıca e, ℓ modülünde 2 nin mertebesi olduğunda, ℓ asalının $m^2-3\equiv 0$ (mod ℓ) ve $e\equiv 0$ (mod 3) olduğunu varsayarak bu şartlarda $a^x+b^y=c^z$ Diophantine denkleminin tek çözümünün $(x,y,z)=(2,2,3)$ olduğunu gösterdi.

M. Le (1994), eğer $D\geq e^{e^{447}}$ ise $x^2+D^m=2^{n+2}$ denkleminin $x>1$ için en fazla bir adet (x,m,n) pozitif tamsayı çözümü olduğunu ispatladı.

M. Le (1995), ise $p>3$ bir asal ve $p\not\equiv 7$ (mod 8) gibi iki durumun şartlarının ayrı ayrı saglanması durumunda $2^n+px^2=y^p$ denkleminin hiç pozitif tamsayı çözümünün bulunmadığını ispatladı.

M. Le (1995), eğer $b\equiv\mp 3$ (mod 8), $b>8.10^6$ ve *c* bir tek asal ise, Terai Tahmininin sağlandığını ispat etti.

M. Le (1995) ve M. Mignotte (1997) yıllarında yaptıkları çalışmalarında $D_1x^2+D_2^m=4y^n$ denkleminin, *m* ve *n* için verilen şartlar altında sonlu sayıda çözüme sahip olduğunu ispatladılar.

P.M. Voutier (1995), Tazanakis ve Weger'in metodunu kullanarak Thue denklemini çözdü ve $n\leq 30$ için bazı diziler tanımladı. Ayrıca bilgisayarla yapılan çalışmalarda onları $n<30$ için bu tanımlanan dizilerin *n*. terimlerinin her zaman bir ilkel böleni bulunduğu gerçeğine götürdü.

N. Terai (1995), çalışmasında bu defa da eğer, *b* bir asal, *m* çift ve e, ℓ modülüne göre *c* nin mertebesi olduğunda, $e \equiv 0$ (mod 5) ve $ab \equiv 0$ (mod ℓ) olacak şekilde bir asal olmak üzere, $a = m\left(m^4 - 10m^2 + 5\right)$, $b = 5m^4 - 10m^2 + 1$, $c = m^2 + 1$ ise, $a^x + b^y = c^z$ denkleminin tek çözümünün $\left(x, y, z\right) = \left(2, 2, 5\right)$ olduğunu ispatladı.

Y. Guo ve M. Le (1995), $r \in \mathbb{N}$ ve $2 \| r$, $r \geq 6000$ olduğunda, $\left(r^2 - 9\right)^x + \left(6r\right)^y = \left(r^2 + 9\right)^z$ denkleminin tek pozitif tamsayı çözümlerinin $\left(x, y, z\right) = \left(2, 2, 2\right)$ olduğunu ispatladılar.

N. Terai (1996), $a^x + b^y = c^z$ denklemini ele alarak $x = y = 2$ ve *z* bir tek asal olduğunda Thue denklemi ve Baker'in sonuçlarını kullanarak, eğer *c* ve *z* yeterince büyük ise *a,b,c* nin mümkün olan durumları sağladığını gösterdi.

Jesmanowicz Tahmininin farklı şartlar altında sağlandığı yapılan çalışmalarla gösterilmiştir. Şimdi biraz bunlardan bahsedelim. M. Le (1996), eğer $2 \| s$, $t \equiv 3$ (mod 4) ve $s \geq 81t$ ise Jesmanowicz Tahmininin sağlandığını gösterdi. K. Takakuwa (1996), yaptığı çalışmasında Le nin koyduğu $s \geq 81t$ şartını $t = 3, 7, 11, 15$ için eleyerek ispatını verdi.

M. Le (1997), $x, y, n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ olmak üzere, $2 | y$ durumunda $x^2 + 7 = y^n$ denkleminin hiçbir $\left(x, y, n\right)$ çözümünün bulunmadığını ispatladı. İlaveten, $2 | y$ durumunda bu denklemin bütün çözümlerinin $n < 5.10^6$ ve $y < \exp\exp\exp 30$ u sağladığını gösterdi.

Y. Bugeaud (1997), $x^2 \mp y^n = p^m$ denklemi üzerinde çalışıp bu denklem için bazı çok kısıtlanmamış durumları ele alarak sadece *p* ye bağlı *n* için küçük bir üst sınır buldu.

J.H.E. Cohn (1997), $x^n = Dy^2 + 1$ denkleminin $n = 4$ olması durumunda, açık olarak 4 ile bölünen bütün *n* leri içeren pozitif tamsayı çözümlerinin cümlesini buldu $4 | n$ olması durumunda ise $n \geq 3$'ün *p* tek asalının bir çarpanı olmak zorunda olduğunu gösterdi.

M. Le (1997), r=3 olması durumunda Lucas dizileriyle ilgili bölünebilme özelliğinden de yararlanarak; eğer $2\|m$ ve b bir tek asal ise $a^x+b^y=c^z$ denkleminin tek pozitif (x,y,z) tamsayı çözümünün $(x,y,z)=(2,2,3)$ olduğunu ispatladı.

Maohua Le'nin metoduna benzer bir metod kullanarak N. Terai ve K. Takakuwa (1997) çalışmalarında, r nin tek olması durumunda, M. Le'nin bir sonucunu genelleştirdiler.

F. Rubin (1998), $x^a+y^b=c^z$ denkleminin tamsayı çözümlerini inceledi.

S.A. Arif ve Fadwa S.A. Muriefah (1998), $q=3$ ve m bir tek tamsayı olması durumunda $x^2+3^m=y^n$ denkleminin $n\geq 3$ için bir tek çözüm ailesinin bulunduğunu gösterdi.

Cao ve Dong (1998), eğer (i) b bir asalın kuvveti, $c\equiv 5\,(\text{mod } 8)$ ise veya (ii) $c\equiv 5\,(\text{mod } 8)$ bir asalın kuvveti ise, Terai Tahmininin sağlandığını ispat ettiler.

P. Yuan and J. Wang (1998), $b\equiv \pm 3\,(\text{mod } 8)$ ve c bir asalın kuvveti ise Terai Tahmininin sağlandığını ispat ettiler.

L. Chen ve M. Le (1998), $b^2+1=2c$ koşulunu gerçekleyen b ve c tek asalları için $b\not\equiv 1$ (mod 16) durumunda $x^2+b^y=c^z$ eşitliğinin tek çözümünün $(x,y,z)=(2,2,2)$ ile verildiğini ispat ettiler.

M. Le (1999), $(x^3-1)/(x-1)=(y^n-1)/(y-1)$ denkleminin çözümlerinin var olduğunun ispatını yaptı. M. Le'nin bu ispatı genelleştirilmiş Ramanujan – Nagell denkleminin çözümlerinin sayısı için üst sınırla ilgili yeni sonuçlara dayanır.

Fadwa S.A. Muriefah ve S.Akhtar Arif (1999), Cohn'nun metodunu kullanarak $x^2+5^{2k+1}=y^n$ denkleminin; $n\geq 3$ ve $k\geq 0$ için hiçbir x, y tamsayı çözümünün olmadığını ispatladı.

Z.F. Cao (1999), çalışmasında eğer $p=q=2$, $2|r$, $c\equiv 5$ (mod 8), $b\equiv 3$ (mod 4) ise Terai-Jesmanowicz Tahmininin sağlandığını ispat etti.

M. Le (1999), $w(c)$, c'nin farklı asal çarpanlarının sayısı olmak üzere, eğer $2|c$ ise $a^x+b^y=c^z$ denkleminin en fazla $2^{w(c)+1}$ pozitif tamsayı çözümü bulunduğunu gösterdi. Buna ek olarak bütün (x,y,z) çözümlerinin $z<2ab\log(2eab)/\pi$ eşitliğini sağladığını ispat etti.

F. Luca (2000), ise $q=3$ ve m çift tamsayı olduğunda $x^2+3^m=y^n$ denklemi için tek bir çözüm ailesinin bulunduğunu farklı bir yöntem kullanarak gösterdi.

B. Sury (2000), yaptığı çalışmasında $x^2+2=y^n$ denkleminin $n>1$ için tek çözümünün $(x,y,n)=(\mp 5,3,3)$ olduğunu basit bir ispatla verdi. Daha sonralarda bu denklemin birçok farklı durumu ele alınarak çözümlerin varlığı incelenmeye başlandı.

Fadwa S.A. Muriefah (2000), $px^2+3^n=y^p$ denklemini ele alarak bu denklemin (*i*) (3,*y*)=1 ve $p \not\equiv 7 \pmod 8$ (*ii*) $3|y$ ve *p*=3 (*iii*) $p \not\equiv 5$ (mod 8) durumlarında çözümlerinin olup olmadığını araştırdı.

Z. Cao (2000), kendisinin ve Adachi'nin bazı teoremlerini kullanarak, eğer $p\equiv 1$ (mod 4) ve $B_{(p-1)/2}$ Bernoulli sayısı olmak üzere $p|B_{(p-1)/2}$ ise $y\neq 0$ $x^p+1=py^2$ denkleminin ayrıca $m\in\mathbb{N}$, $ebob\,(x,y)=1$, $p|y$ olmak üzere $x^p+2^{2m}=py^2$ denkleminin hiç tamsayı çözümünün bulunmadığını gösterdi.

Fadwa S.A. Muriefah (2001), $AX^2+2^{2m}=y^n$ Diophantine denkleminin, *n* nin 4 modülüne göre 1 e kongrüent bir asal çarpanı olduğunda hiçbir pozitif tamsayı çözümünün bulunmadığını, eğer *n* nin hiç çarpanı yoksa *x* ve *y* tek olmak üzere en fazla bir çözümünün bulunduğunu ispatladı.

Fadwa S.A. Muriefah ve S. Akhtar Arif (2001), $p\geq 3$, $k>0$ ve q bir tek asalı temsil etmek üzere $x^2+q^{2k}=y^p$ Diophantine denklemiyle ilgili bazı teoremler ispatladılar.

Y. Bilu, G. Hanrot ve P.M. Voutier (2001), yaptıkları çalışmalarında birçok bilim adamının ispatlarını yaparken kullandığı $n>30$ için, her *n*. Lucas ve Lehmer sayılarının ilkel bölene sahip olduğu sonucunu ispatladılar.

Bugeaud (2001) ise Bilu, Hanrot ve Voutier'in metodunu kullanarak $D_1x^2+D_2=\lambda^2y^p$ biçimindeki genelleştirilmiş Diophantine denklemlerinin tamsayı çözümleri için yeni güzel bir sonuç verdi.

N. Terai (2001), eğer $a\equiv -1$ (mod b^2) ve $b\equiv 3$ (mod 4) bir tek asal ve $a^2+b=c$ ise $a^x+b^y=c^z$ denkleminin tek pozitif tamsayı çözümünün $(x,y,z)=(2,1,1)$ olduğunu gösterdi.

Z.F. Cao ve X. Dong (2001) çalışmalarında *p*=*q*=2, $2|r$, $r>1$ ve *b* bir tek asal olması durumunda; U_r, V_r tamsayılarını da $\left(m+\sqrt{-1}\right)^r=\left(V_r+U_r\sqrt{-1}\right)$ ile tanımlayarak $a=|V_r|$, $b=|U_r|$, $c=m^2+1$, $b>8.10^6$, $b\equiv 3$ (mod 4) ise $x^2+b^y=c^z$ denkleminin tek pozitif tamsayı çözümünün $(x,y,z)=(a,2,r)$ olduğunu ispat ettiler.

M. Le (2001), eğer $b\equiv 7$ (mod 8) veya *b* bir asal yada *c* bir asalın kuvveti ise $x^2+b^y=c^z$ denkleminin tek çözümünün $(x,y,z)=(a,2,2)$ olduğunu ispat etti.

Z.F. Cao, X. Dong, X. Li (2002), Bilu, Hanrot ve Voutier'in ilkel bölenler üzerine yaptıkları çalışmalarını kullanarak Terai Tahmininin benzeri, yeni bir Tahmin verdiler. U_r, V_r tamsayıları $\left(m+\sqrt{-1}\right)^r=\left(V_r+U_r\sqrt{-1}\right)$ şeklinde tanımlanmak üzere $a=|V_r|$, $b=|U_r|$, $c=m^2+1$ ve $b\equiv 3$ (mod 4) bir asalın kuvveti ise, $r>1$ bir tek tamsayıları için $x^2+b^y=c^z$ denkleminin tek (x,y,z) pozitif tamsayı çözümünün $(x,y,z)=(a,2,2)$ olduğunu ispat ettiler.

S. Siksek (2002), ise $x^2=y^p+2^kz^p$ denklemini Frey Curve metodunu kullanarak çözdü.

Y. Bilu (2002), genelleştirilmiş Ramanujan – Nagell denklemi üzerinde, Le, Mignotte ve Bugeaud'un çalışmalarındaki etkilerini araştırdı.

M. Le (2002), $x^2+2^m=y^n$ Diophantine denklemi için Nesterenko, Mignotte ve Laurent'in kullandıkları metottan faydalanarak iki cebirsel sayının logaritmasındaki lineer formlar üzerine buldukları sonuçlarında, Cohn'nun Tahmininü sağlattı. Ve

$x^2+2^m=y^n$ denkleminin bilinen (*x,m,y,n*)=(5,3,1,3), (7,3,5,4) ve (11,5,2,3) çözümlerini buldu.

1977 yılından yakın geçmişe kadar birçok yazar bu *C* değerini iki asalın kuvvetlerinin çarpımı şeklinde düşünerek oluşan yeni Diophantine denkleminin çözümleri üzerinde çalıştılar. Bu cümleden olmak üzere F. Luca (2002), $n\geq 3$ için aralarında asal *x*, *y* tamsayıları ile $x^2+2^a3^b=y^n$ denkleminin tüm (x,y,a,b,n) pozitif tamsayı çözümlerini buldu.

S.A. Arif ve Fadwa S.A. Muriefah (2002), $x^2+q^{2k+1}=y^p$ denkleminin; $q\not\equiv 7$ (mod 8) bir tek asal ve $n\geq 5$ için 3 ün katı olmayan bir tek tamsayı olması durumunda tam iki adet (q,n,k,x,y) çözüm ailesinin bulunduğunu ispatladı.

S.Akhtar Arif ve Amal S.Al-Ali (2002), eğer *q* bir tek asal, $y>1$, $k\geq 3$, $n\geq 4$ olmak üzere, *h*, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-q}\right)$ cisminin sınıf sayısı olduğunda $(n,3h)=1$ ise $x^2+q^{2k+1}=4y^n$ denkleminin tam 5 çözüm ailesi olduğunu ispatladılar. S.A. Arif ve A.S. Al-Ali (2002), Lucas ve Lehmer dizilerini kullanarak $ax^2+b^m=4y^n$ Diophantine denkleminin çözümlerini buldular.

J.H.E. Cohn (2002), $\frac{1}{2}\left(u+v\sqrt{p}\right)$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{p}\right)$ cisminin temel tersiniri olduğunda, *p* tek asalı, $p|u$ şartını sağlıyor ise $x^p+1=py^2$ denkleminin hiçbir (x,y) pozitif tamsayı çözümünün bulunmadığını gösterdi. Bir yıl sonra yaptığı çalışmasında ise $x^n=Dy^2+1$ denkleminin $D\leq 100$ olması durumlarını inceledi.

M. Le (2003), çalışmasında, *a,b,c* pozitif tamsayıları $2|a$, $2|b$, $r>1$ ve $2|r$ olmak üzere, $a^2+b^2=c^r$ denklemini sağlayan pozitif tamsayılar olduğunda, eğer $a>b$, $a\equiv 3$ (mod 4) $b\equiv 2$ (mod 4) ve $a/b>\left(e^{r/1586}-1\right)^{-1/2}$ ise $a^x+b^y=c^z$ denkleminin tek çözümünün $(x,y,z)=(2,2,r)$ olduğunu gösterdi.

J.H.E. Cohn (2003), yaptığı tüm bu çalışmaları değerlendirerek, *C* nin alacağı değerleri genelleyecek şekilde $n\geq 3$ ve *n*=*p* nin bazı özel durumlarını da içeren bir takım genel sonuçlar verdi.

Z.F. Cao ve X. Dong (2003), çalışmalarında $2|m\in\mathbb{N}$ için $a=m^3-3m$, $b=3m^2-1$, $c=m^2+1$ olduğunu varsayarak, Terai-Jesmanowicz Tahmininin sağlandığı durumları vererek ispatını yaptılar.

S. Siksek ve J.E. Cremona (2003), $x^2+7=y^m$ Diophantine denkleminin çözümlerini Frey Curve ve Kraus metodunu kullanarak inceledi.

Sz. Tengely (2004), yaptığı çalışmasında $p>2$ ve verilen sabit bir a için $x^2+a^2=2y^p$ denkleminin çözümlerinin bulunması için yeni bir metod vererek $3\le a\le 501$ olan tek a değerleri için bu denklemin bütün çözümlerini buldu.

M. Le (2004) çalışmasında logaritmada lineer formların teorisini kullanarak, eğer $b\equiv 3$ (mod 4) bir asal, $a\equiv -1$ (mod $b^{2\ell}$), $a^2+b^{2\ell-1}=c$ ve c tek, $\ell\in\{1,2\}$ ise, $a^x+b^y=c^z$ denkleminin tek çözümünün $(x,y,z)=(2,2\ell-1,1)$ olduğunu gösterdi.

İlerleyen yıllarda birçok bilim adamı W. Ljunggren'in $Cx^2+4D=y^n$ ve $x^2+4D=y^n$ denklemleri üzerinde yaptıkları çalışmaları dikkate alarak bu denklemlerin birçok farklı durumunu ele alıp çalıştılar. P. Yuan (2005), yaptığı çalışmasında $ax^2+by^2=ck^n$ denkleminin çözümlerini inceledi ve özel olarak $2|n$ olması durumunda $(a\mp 1)x^2+(3a\mp 1)=4a^n$ denkleminin çözümlerini buldu.

M. Le (2005), eğer $a\equiv 2$ (mod 4), $b\equiv 3$ (mod 4), $c>3.10^{37}$ ve $r>7200$ ise $a^x+b^y=c^z$ denkleminin tek çözümünün $(x,y,z)=(2,2,r)$ olduğunu ispat etti.

M. Le (2006), a,b,c,r; $\min(a,b,c,r)>1$ $ebob(a,b)=1$, a çift ve r tek olduğunda $a^2+b^2=c^r$ şartını sağlayan pozitif tamsayılar olmak üzere, eğer $b\equiv 3$ (mod 4) ve b veya c bir tek asalın kuvvet ise $x^2+b^y=c^z$ denkleminin tek pozitif (x,y,z) tamsayı çözümünün $(x,y,z)=(a,2,r)$ olduğunu gösterdi.

Y. Bugeaud, M. Mignotte ve S. Siksek (2006), $x^2+D=y^n$ Lebesque – Nagell Denklemini $1\le D\le 100$ ve $n\ge 3$ için klasik ve modüler metodlarla çözüme kavuşturdular.

Fadwa S.A. Muriefah (2006), 2001 yılında yaptığı çalışmasındaki denklemi özelleştirerek $k \geq 0$ ve $n \geq 3$ olmak üzere; *p*, *n* i bölen bir tek asal $p|k$ ve $5|x$ ise Bilu, Hanrot ve Voutier'in eski sonuçlarını kullanarak $x^2+5^{2k}=y^n$ denkleminin çözümlerinin ispatını verdi.

Fadwa S.A. Muriefah, F. Luca, S. Siksek ve Sz. Tengely (2007), $n \geq 3$ ve C pozitif bir tamsayı olmak üzere $x^2+C=2y^n$ denklemini inceleyerek, $C \equiv 1$ (mod 4) ve $C \not\equiv 1$ (mod 4) gibi iki farklı durumunu ele alıp, değişik metodlar kullanarak denklemin çözümlerini buldular.

Sz. Tengely (2007), hazırladığı doktora tezinden çıkardığı makalesinde $m>0$, *p* ve *q* tek asallar ve $ebob\left(x,y\right)=1$ olduğunda *y*, iki ardışık karelerin toplamı olmamak üzere, $x^2+q^{2m}=2y^p$ denkleminin yalnızca sonlu sayıda $\left(m,p,q,x,y\right)$ çözümünün olduğunu ispatladı.

Fadwa S.A. Muriefah, F. Luca ve A. Togbe (2008), $ebob\left(x,y\right)=1$ ve $n \geq 3$ ve x,y,a,b pozitif tamsayılar olmak üzere $x^2+5^a13^b=y^n$ Diophantine denkleminin çözümlerini araştırdılar.

Fadwa S.A. Muriefah (2008), çalışmasında p ve q, $p>3$ şeklinde asallar olmak üzere, $ebob\left(x,y\right)=1$ şartını sağlayan x,m,y pozitif tamsayılarını alarak $x^2+p^{2m}=y^p$ denkleminin çözümlerinin varlığını ispatladı.

E. Demirpolat, S.İ. Çenberci ve H. Şenay (2009), $n \geq 3$ tek tamsayı olmak üzere $x^2+11^{2k+1}=y^n$ denkleminin pozitif $\left(n,k,x,y\right)$ tamsayı çözümünün varlığını ispat ettiler.

2. CEBİRSEL SAYILAR VE İDEAL TEORİ

2.1. Cebirsel Sayılar

Tanım 2.1.1. Katsayılarının hepsi birden sıfır olmayan rasyonel sayılar olan

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

biçimindeki bir polinomu sağlayan bir gerçek veya karmaşık sayıya *cebirsel sayı* denir.

Bu tanımda katsayıların paydalarının eşitlenerek sözkonusu polinomun tamsayı katsayılı bir polinoma dönüştürülmesi kavramı genelliğini bozmaz.

Tanım 2.1.2. Bir α cebirsel sayısının sağladığı en küçük dereceli $p(x)$ polinomuna α *nın minimal polinomu*, bu polinomun derecesine de α cebirsel sayısının *derecesi* denir.

Teorem 2.1.1. Eğer monik $p(x)$ polinomu α cebirsel sayısının minimal polinomu ise, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde indirgenemez bir polinomdur (Şenay 2007).

Tanım 2.1.3. $F \subseteq K$ koşulunu sağlayan *K* cismine, *F* cisminin bir *genişlemesi* denir ve *K:F* veya *K/F* şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.4. Eğer *K:F* bir cisim genişlemesi ise, *K* yı *F* üzerinde bir vektör uzayı kabul etmek doğal olacaktır. Bu vektör uzayının boyutuna, *K* nın *F* cismi üzerindeki *derecesi* denir ve $[K:F]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.2. $F \subseteq K \subseteq L$ koşulunu gerçekleyen, herhangi *F, K* ve *L* cisimleri için

$$[L:F]=[L:K][K:F]$$

dır.

Tanım 2.1.5. Eğer $[K:F]$ sonlu ise K ya F nin *sonlu genişlemesi* denir.

Teorem 2.1.3. $K:\mathbb{Q}$ bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in K$ olsun. α nın $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel olmasının gerek ve yeter koşulu $\mathbb{Q}(\alpha)$ nın $\mathbb{Q}$ nun sonlu bir genişlemesi olmasıdır. Bu durumda $p(x)$, $\mathbb{Q}$ üzerinde α nın minimal polinomu olmak üzere $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=d[p(x)]$ dir.

İspat. Eğer $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=n<\infty$ ise, α nın $1=\alpha^0,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^n$ kuvvetleri tanım gereği $\mathbb{Q}$ üzerinde doğrusal bağımlı olacaktır. Bu durumda bütün $a_i \in \mathbb{Q}$ katsayıları sıfırdan farklı olan tamsayılar olmak üzere,

$$p(\alpha)=1\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+...+a_{n-1}\alpha+a_n=0 \qquad (2.1.1)$$

yazılabileceğinden α , tanım gereği $\mathbb{Q}$, üzerinde cebirseldir.

Karşıt olarak, α nın $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel ve sağladığı $p(x)$ minimal polinomunun derecesinin m olduğunu varsayalım. Artık $\mathbb{Q}(\alpha)$ nın $\mathbb{Q}$ üzerinde $1=\alpha^0,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{m-1}$ elemanlarınca gerildiğini göstermeliyiz. Bunun için α^{m+1} veya daha genel olarak $\ell \geq 0$ için, α^{m+1} in ne anlama geldiğini belirtmeliyiz. Buna göre (2.1.1) den elde edilen

$$\alpha^m=-a_1\alpha^{m-1}-a_2\alpha^{m-2}...-a_m,$$

değerini

$$\alpha^m\alpha=\alpha^{m+1}=-a_1\alpha^m-a_2\alpha^{m-1}...-a_n\alpha,$$

eşitliğinde kullanırsak, sonuçta α^{m+1} i $\mathbb{Q}$ üzerinde $1,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{m-1}$ lerin bir doğrusal birleşimi olarak göstermiş oluruz. Böylece indüktif olarak $\ell \geq 0$ için α^{m+1} i de $\mathbb{Q}$ üzerinde $1,\alpha,\alpha^2,....,\alpha^{m-1}$ lerin bir doğrusal bileşimi olarak yazmış oluruz. Şimdi;

$$V = \left\{a_{m-1}\alpha^{m-1} + ... + a_1\alpha + a_0 : \quad a_0, a_1, ...a_{m-1} \in \mathbb{Q}\right\}$$

cümlesini göz önüne alalım. Açık olarak, V toplamaya göre kapalı olup önceki paragrafta yapılan uyarılar nedeniyle, aynı zamanda çarpmaya göre de kapalıdır. Ayrıca, V, hem $\mathbb{Q}$ ve hem de α yı kapsamaktadır. Sonuçta V nin bir halka olduğu kolayca gösterilir. O halde V nin cisim olduğunu gösterirsek teoremi ispatlamış oluruz. Bunun için;

$$0 \neq v = a_0 + a_1\alpha + ... + a_{m-1}\alpha^{m-1} \in V$$

ve

$$q(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{m-1}x^{m-1} \in \mathbb{Q}[x]$$

elemanlarını alalım. $0 \neq v = q(x)$ olduğundan $p(x)|q(x)$ ve $p(x)$ in indirgenemez oluşu sebebiyle de $p(x)$ ve $q(x)$ in aralarında asal olacağı görülür. Buna göre $\mathbb{Q}[x]$ de $p(x)r(x)+q(x)s(x)=1$ olacak biçimde $r(x)$ ve $s(x)$ polinomlarını bulabiliriz. Bu eşitlikte $x=\alpha$ için $p(\alpha)=0$ olduğunu düşünürsek

$$p(\alpha)r(\alpha)+q(\alpha)s(\alpha)=1,$$

buradan $q(\alpha)s(\alpha)=1$ veya $v=q(\alpha)=1/s$ elde edilir ki, bu v nin tersinin $s(\alpha)$ olduğunu gösterir. Artık $s(\alpha)$nın V nin bir elemanı olduğunu; $s(\alpha)$ da eğer varsa α nın *m-1* den büyük kuvvetlerini $\mathbb{Q}$ üzerinde $1,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{m-1}$ lerin bir doğrusal birleşimleri ile değiştirmek suretiyle görebiliriz. O halde $s(\alpha)\in V$ dir. Böylece sonuç olarak V bir cisimdir. Bundan başka, $V \subset \mathbb{Q}(x)$ olup aynı zamanda $\mathbb{Q}$, hem α ve hem de V yi de kapsadığından $V=\mathbb{Q}(\alpha)$ olur.

Artık V nin $\mathbb{Q}$ üzerinde $1,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{m-1}$ ile gerilmesinin sonucu olarak $[V:\mathbb{Q}] \leq m$ yazabiliriz. Şimdi bu $\left\{1,\alpha,\alpha^2,...,\alpha^{m-1}\right\}$ cümlesinin $\mathbb{Q}$ üzerinde doğrusal bağımsız olduğunu görelim. Gerçekten böyle olmasaydı, $c_i \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $t(x) = c_0 + c_1 + ... + c_{m-1}x^{m-1} \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun varlığı, bizi α nın $\mathbb{Q}$ üzerinde $d[p(x)] < m$ eşitsizliğini gerçekleyen bir polinomu sağladığı sonucuna götürür ki, bu çelişki $\{1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{m-1}\}$ cümlesinin doğrusal bağımsız olduğunu gösterir. Böylece $\{1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{m-1}\}$ cümlesinin $\mathbb{Q}$ üzerinde V nin bir tabanı olduğu anlaşılır ki, bu $[V:\mathbb{Q}] = m$ olmasını gerektirir. Artık $V = \mathbb{Q}(\alpha)$ olduğunu göz önüne olarak $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = boy_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\alpha) = m$ elde edilir (Şenay 2007).

Sonuç 2.1.1. Bütün cebirsel sayıların k cümlesi karmaşık sayılarda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Q}$ üzerinde derecesi $[k:\mathbb{Q}] = n$ olan bir cisimdir.

Örnek 2.1.1. Sonuç 2.1.1 e göre, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cümleleri birer sayı cismidir. Böylece $(\mathbb{Q}, +, .)$ cisminin bütün sayı cisimlerinde kapsandığı açıktır.

Tanım 2.1.6. Bir α cebirsel sayısına, katsayıları tamsayı olan

$$p(x) = x^n + x^{n-1}a_{n-1} + ... + a_o$$

monik polinomunun kökü olması durumunda *cebirsel tamsayı* denir. Başka bir deyişle; eğer $p(\alpha) = 0$ olacak şekilde tamkatsayılı bir *p(x)* monik polinomu varsa α cebirsel sayısı bir *cebirsel tamsayıdır* (Şenay 2007).

Tüm cebirsel tamsayıların cümlesini R_k ile göstereceğiz. Cebirsel tamsayıların R_k cümlesi, *k* cebirsel sayı cisminin bir alt halkasını oluşturur.

Teorem 2.1.4. Herhangi bir α cebirsel sayısı için $c\alpha$ bir cebirsel tamsayı olacak biçimde bir $c \in N$ vardır (Şenay 2007).

Teorem 2.1.5. Eğer $\alpha, \beta \in R_k$ ise $\alpha + \beta$ ve $\alpha\beta$ cebirsel sayıları da cebirsel tamsayıdır.

İspat. Bakınız (Şenay 2007).

Tanım 2.1.7. Eğer $\alpha, \beta \in R_k$ olmak üzere $\alpha = \beta \cdot \Upsilon$ eşitliğini gerçekleyen bir $\Upsilon \in R_k$ cebirsel tamsayısı varsa β cebirsel tamsayısına α cebirsel tamsayısını *böler* denir ve bu durum alışılagelen bir biçimde $\beta|\alpha$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8. Bir $\varepsilon \in R_k$ tamsayısı için $1/\varepsilon$ da keza bir cebirsel tamsayı ise ε *tersinir eleman* adını alır. Bir ε tersinir elemanı ve $\alpha \in R_k$ için $\beta = \varepsilon\alpha$ ise α ve β tamsayılarına aralarında *ilgili tamsayılar* denir. $\alpha \in R_k$ elemanına, eğer α nın R_k daki her böleni ya kendisinin bir ilgilisi veya bir tersinir eleman ise *indirgenemez* denir (Şenay 2007).

2.2. İdeal Teori

Diophantine denklemlerinden bahsederken, E. Kummer'in, Fermat'ın Tahmini üzerindeki çalışmaları sırasında, ispatı bulduğunu zannettiğinde, tamsayılar için doğru olan bu ispatın, Fermat'ın araştırmalarında rastlanılan bazı sayı tipleri için yanlış olduğunu keşfettiğinden bahsetmiştik. Daha açık olarak sözgelişi 6 tamsayısının $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ cisminde $6 = 2.3 = \left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)$ şeklinde birden fazla çarpanlara ayrılışı bulunmaktadır. Kummer, işte bunun farkına vardığı zaman, Fermat'ın Tahmini ile ilgili vermiş olduğu ispatın yanlış olduğunu anlamıştı. Bu amaçla asal çarpanlara ayrılı şın tek olmayışından doğan güçlükleri yenmek üzere “ideal teori” adı verilen teori kendisi ve R. Dedekind tarafından geliştirilmiştir. Şimdi cebir ve sayılar teorisinde büyük rol oynayan bu teori hakkında kısaca bilgi verelim. Bu bölüm boyunca R_k ; mertebesi n olan k sayı cisminin tamsayılarının halkasını belirtecektir.

Tanım 2.2.1. R bir halka, U da R nin boş olmayan herhangi bir alt cümlesi olsun. Eğer,

(i) $\quad (U,+) \leq (R,+)$

(ii) $\quad \forall u \in U$ ve $r \in R$ için $ur \in U$ ve $ru \in U$ oluyorsa U ya R halkasının *iki yanlı ideali* kısaca *ideali* denir.

Tanım 2.2.2. R_k nın, yalnızca bir elemanı tarafından üretilen başka bir deyişle bir elemanın katlarından oluşan idealine *esas ideal* denir.

Örnek 2.2.1. R_k nın α gibi bir sabit elemanı için, $\mathfrak{a} = (\alpha) = \{\alpha\xi : \ \xi \in R_k\}$, cümlesi bir esas idealdir.

Yukarıdaki tanımdan hemen $(a)(b) = (ab)$ olduğunu gözlemleyebiliriz. Böylece R_k nın elemanlarının çarpımı, onların ürettiği R_k nın esas ideallerinin çarpımına karşılık gelir.

Tanım 2.2.3. Eğer bir halkanın her ideali esas ideal ise, bu halkaya *esas ideal bölgesi* denir.

Tanım 2.2.4. R bir halka olsun. R nin bir ideali, kendisi ve birim idealinden farklı ise o ideale *has ideal* denir.

Tanım 2.2.5. R bir halka ve $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$; R nin iki ideali olsun. $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\beta \in \mathfrak{b}$ olmak üzere $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{\alpha + \beta\}$ cümlesine *ideallerin toplamı* denir.

Tanım 2.2.6. $\mathfrak{b}$ ve $\mathfrak{c}$, R nin idealleri olmak üzere, eğer $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$ olması ya $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$ yada $\mathfrak{b} \subseteq a$ olmasını gerektiriyorsa R nin, $\mathfrak{a} \neq R$ idealine *asal ideal* denir.

Önerme 2.2.1. $\mathfrak{a}$ ve $\mathfrak{b}$, R_k nin idealleri olmak üzere $\mathfrak{a}|\mathfrak{b}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ olmasıdır.

Bu Önerme bize, R_k daki $\mathfrak{b}$ idealinin çarpanlarının tam olarak $\mathfrak{b}$ yi içeren ideaaller olduğunu anlatır. Böylece $\mathfrak{p}$ asal idealinin tanımı hemen bir asal elemanın benzerine dönüşür ki; bunu ‘ $\mathfrak{p}|\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ olması $\mathfrak{p}|\mathfrak{a}$ veya $\mathfrak{p}|\mathfrak{b}$ olmasını gerektirir’ şeklinde ifade edebiliriz.

Ayrıca R bir tamlık bölgesi ise sıfır idealinin asal ideal olduğunu belirtmeliyiz. Buna bağlı olarak da (p) nin asal olması için gerek ve yeter şartın p nin bir asal veya sıfır ideali olması gerektiğini söyleyelim.

Tanım 2.2.7. R bir halka olsun. $\mathfrak{a}$, R nin kendisi ve birim idealinin dışında bir ideali olmak üzere $\mathfrak{a}$ ile R arasında R nin başka hiçbir ideali yoksa $\mathfrak{a}$ idealine *maksimal ideal* denir (Tall ve Stewart 1987).

Burada yeri gelmişken, tamsayılar halkasında bütün maximal idealleri asalların ürettiğini söylemeliyiz.

Lemma 2.1.1. R bir halka ve $\mathfrak{a}$, R nin bir ideali olsun. O halde;

(1) $\mathfrak{a}$ nın maximal olması için gerek ve yeter şart $R/\mathfrak{a}$ nın bir cisim olmasıdır.

(2) $\mathfrak{a}$ nın asal olması için gerek ve yeter şart $R/\mathfrak{a}$ nın bir tamlık bölgesi olmasıdır (Tall ve Stewart 1987).

Tanım 2.2.8. R_k halkasının ideallerinin $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \ldots$ azalan bir zinciri sonlu ise, R_k halkasına *noetherian halka* denir.

Teorem 2.2.1. k sayı cisminin, R_k tamsayılar halkası;

(1) Kesirler cismi k olan bir bölgedir.

(2) Noetheriandır.

(3) $\alpha \in k$, katsayıları R_k tamsayılar halkasında olan bir monik polinom denklemini sağlıyor ise $\alpha \in R_k$ dır.

(4) R_k nin sıfırdan farklı her asal ideali maximaldir,

özelliklerini sağlar (Tall&Stewart 1987).

Tanım 2.2.9. Teorem 2.2.1. deki (1) den (4) e kadar olan özellikleri sağlayan halkaya *Dedekind Bölgesi* denir.

İdeallerin çarpanlanışının tekliğini ispatlarken, R_k nin sıfırdan farklı idealleriyle ilgili aritmetiğe ve özel olarak çarpma işlemiyle ilgili özelliklere ihtiyacımız olacak. Açık olarak R_k nın kendisi özdeş eleman olmak üzere, bu çarpma işleminin değişme ve birleşme özellikleri vardır. Fakat çarpma işleminde bir elemanın tersi olmadığından dolayı grup yapısı mevcut değildir. Bu nedenle alt-modül kavramına ihtiyaç olacaktır.

Bir ideali, R_k nın R_k-altmodülü olarak tanımlamak mümkündür. Alt modüllerin, grup yapısında olduğu bilinen verilen kesirsel ideallerle ilgili olduğunu belirtelim ve biraz da kesirsel ideallerden bahsedelim.

Tanım 2.2.10. Eğer $c\mathfrak{a} \subset R_k$ olacak şekilde sıfır olmayan bir $c \in R_k$ mevcut ise k nın $\mathfrak{a}$ gibi bir R_k-altmodülüne, R_k nin *kesirsel ideali* denir.

Örnek 2.2.2. $r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ nin kesirsel idealleri $r\mathbb{Z}$ biçimindeki idealleridir.

Not 2.2.1. Bir $\mathfrak{a}$ kesirsel idealinin ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{a} \subseteq R_k$ olmasıdır.

Teorem 2.2.2. R_k nın sıfırdan farklı kesirsel idealleri çarpma işlemi altında abelyen bir gruptur.

Teorem 2.2.3. R_k nın sıfırdan farklı bir kesirsel idealinin, çarpanların sırasının değişikliği dışında asal ideallerin çapımı şeklinde bir tek türlü gösterimi vardır.

İspat. Bu son iki teoremin ispatı basamaklar halinde yapılır (Tall&Stewart 1987) , (Hecke 1981), (Lang 1970) .

İdeallerin çarpanlanışının tekliği bütün Dedekind bölgelerinde sağlanır. Bu tek çarpanlamanın ispatı hem Dedekind bölgeleri kullanılarak, hem de farklı yollarla yapılabilir. Ancak bütün Dedekind bölgelerinde bu özelliğin kendiliğinden sağlandığına ilgi çekilmelidir.

Tanım 2.2.11. Eğer R_k halkasında $(\alpha)\mathfrak{a} = (\beta)\mathfrak{b}$ olacak biçimde $\alpha, \beta \neq O \in R_k$ mevcut ise $\mathfrak{a}$ ile $\mathfrak{b}$ ideallerine birbirlerine *denktir* denir ve $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ biçiminde gösterilir. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gerçeklenebilir. Bu bağıntı ile elde edilen denklik sınıflarına *ideal sınıfları* ve bu ideal sınıflarının sayısına da k cisminin *sınıf sayısı* denir ve h_k ile gösterilir (Ireland ve Rosen 1990).

Teorem 2.2.4. $h_k = 1$ olması için gerek ve yeter şart R_k nın esas ideal bölgesi olmasıdır.

İspat. $\mathfrak{a}$ bir ideal olsun ve öncelikle $h_k = 1$ olduğunu varsayalım. $\mathfrak{a} \sim R_k$ olduğundan, orada $(\alpha)\mathfrak{a} = (\beta)R_k = (\beta)$ olacak şekilde sıfırdan farklı $\alpha, \beta \in R_k$ elemanlarının bulunduğunu biliyoruz. Böylece $\beta/\alpha \in \mathfrak{a}$ ve $\mathfrak{a} = (\beta/\alpha)$ olur. Yani her ideal esas idealdir. Karşıt olarak, eğer R_k esas ideal ise $h_k = 1$ olduğu açıktır.

Teorem 2.2.5. k cisminin sınıf sayısı sonludur.

İspat. Bakınız (Ireland&Rosen 1990).

Önerme 2.2.2. k, sınıf sayısı h_k olan bir sayı cismi ve $\mathfrak{a}$ da R_k nın tamsayılar halkasının bir ideali olsun. O halde;

(a) $\mathfrak{a}^{h_k}$ bir esas idealdir.

(b) Eğer $q \mid h_k$ ve $\mathfrak{a}^q$ esas ideal ise $\mathfrak{a}$ da esas idealdir.

3. KUADRATİK CİSİM VE DIOPHANTINE DENKLEMLERİ

3.1. Kuadratik Cisim

Bir kuadratik cisim $[k:\mathbb{Q}]=2$ olan bir k sayı cismidir. Bu durumda θ, $x^2-ax+b=0$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ denkleminin bir kökü olmak üzere bu cisim $k=\mathbb{Q}(\theta)$ şeklindedir. Gerçekten $k=\mathbb{Q}(\theta)$ sayı cisminin $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ ile aynı olduğunu basit olarak görebiliriz. Eğer $x^2-ax+b=0$ in bir kökü θ ise bu durumda $\Delta=a^2-4b$ bir tam kareden farklı olmak üzere θ kuadratik irrasyonel sayısı

$$\theta=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

biçiminde olacaktır. Böylece $c\in\mathbb{Z}$, $d\neq 1$ ve bir tam kare çarpanı bulunmayan bir tamsayı olmak üzere $\Delta=a^2-4b=c^2d$ biçiminde yazılabileceğini göz önüne alarak

$$\theta=\frac{a\mp c\sqrt{d}}{2}$$

ve sonuçta θ irrasyonel olduğunda $\mathbb{Q}(\theta)=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ elde edilir ki, bu aşağıdaki sonucun iddiasıdır.

Sonuç 3.1.1. Bütün kuadratik cisimler bir tam kare çarpanı bulunmayan $d\in\mathbb{Z}$ için $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ biçimindedir.

Böylece $u,v\in\mathbb{Q}$, d bir tam kare çarpanı bulunmayan rasyonel tamsayı olmak üzere bir kuadratik irrasyonel sayının $u+v\sqrt{d}$ biçiminde olacağını söyleyebiliriz. Bu durumda $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cismi

$$k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)=\left\{x\in\mathbb{C}:\ x=u+v\sqrt{d},\quad u,v\in\mathbb{Q}\right\}$$

cümlesidir.

Teorem 3.1.1. $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ sayı cismi $\mathbb{Q}$ cismini kapsayan $\mathbb{C}$ nin bir alt cismidir. Bundan başka $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, $\mathbb{Q}$ üzerinde tabanı $\left\{1,\sqrt{d}\right\}$ ve sonuçta boyutu 2 olan bir vektör uzayıdır.

Tanım 3.1.1. Herhangi bir $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ sayı cismine;

(i) Eğer $d>0$ ise $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ ye bir *gerçek sayı cismi*

(ii) Eğer $d<0$ ise $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ ye *sanal sayı cismi*

denir (Şenay 2007) .

Aşağıdaki teorem tam kareden farklı olan bir *d* doğal sayısı için $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin tamsayılar halkasını *d* ye bağlı olarak belirler.

Teorem 3.1.2. Bir tam kare çarpanı bulunmayan bir $d\in\mathbb{N}$ sayısı için $k=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ nin tamsayılar halkası;

(1) $d\not\equiv 1$ (mod 4) ise

$$R_k=\left\{x\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right):\ x=a+b\sqrt{d},\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$$

(2) $d\equiv 1$ (mod 4) ise

$$R_k=\left\{x\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right):\ x=\frac{a+b\sqrt{d}}{2},\ a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ a\equiv b\ (\text{Mod } 2)\right\}=\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$$

dir (Şenay 2007) .

Not 3.1.1. Eğer $d \not\equiv 1$ (mod 4) ise, Teorem 3.1.2 e göre $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin $\mathbb{Q}$ üzerinde bir tabanın $\left\{1, \sqrt{d}\right\}$, $d \equiv 1$(mod 4) durumunda ise, bir tabanının $\left\{1, \left(1+\sqrt{d}\right)/2\right\}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Not 3.1.2. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ halkasının önemli bir özel durumunun Gauss tamsayıları olduğunu belirtelim. Gerçekten $-1 \not\equiv 1$ (mod 4) olduğunu gözönüne alarak, Teorem 3.1.2 (1) e göre alışılagelen biçimde $\mathbb{Z}[i]$ ile gösterilen bu halka, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-1}\right)$ cisminin tamsayılar halkasıdır.

Daha önce genel olarak cebirsel tamsayılar için Tanım 2.1.7 ve Tanım 2.1.8 ile verilen bölünebilme, tersinir eleman ve ilgililik kavramlarının doğal olarak $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin $R_k = \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ halkası için geçerli olduğuna ilgi çekilmelidir.

Tanım 3.1.2. $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ sayısının eşleniği $a - b\sqrt{d}$ şeklinde tanımlanan cebirsel sayı olup, $\bar{\alpha}$ ile gösterilir. Bir $\alpha = a + b\sqrt{d}$ sayısının normu $N\left(a + b\sqrt{d}\right) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 - db^2 \in \mathbb{Q}$ dur.

Teorem 3.1.3. Herhangi iki $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cebirsel sayıları için;

(1) α nın tersinir olmasının gerek ve yeter koşulu $N(\alpha) = \mp 1$ olmasıdır.

(2) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$,

(3) $\alpha | \beta$ ise, $N(\alpha) | N(\beta)$ ve özel olarak α, β ilgili ise $N(\alpha) = \mp N(\beta)$,

(4) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$,

(5) $\left(\overline{\alpha + \beta}\right) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

dır (Şenay 2007) .

Şimdi vereceğimiz Teorem $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin tersinir elemanlarının varlığını, $d<0$ olması durumunda $u^2+|d|v^2=1$ veya 4 Diophantine denkleminin çözümlerinin bulunmasına dayandırır. Bu durumda çözümleri kolaylıkla elde edilmesine rağmen, $d>0$ durumu oldukça zor olup bu büyük teorem Dirichlet tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.4. Herhangi bir negatif ve kare çarpanı bulunmayan $d\in\mathbb{Z}$ için $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin tersinir elemanlarının U grubu:

(1) $d=-1$ ise, $U=\{\mp 1,\mp i\}$,

(2) $d=-3$ ise, $\omega=e^{2\pi i/3}$ olmak üzere $U=\{\mp 1,\mp\omega,\mp\omega^2\}$,

(3) Diğer bütün $d<0$ tamsayıları için, $U=\{\mp 1\}$,

şeklindedir.

Tanım 3.1.3. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ nin tersinir olmayan sıfırdan farklı bir π tamsayısına; herhangi $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ tamsayıları için, $\pi|\alpha\beta$ olması ya $\pi|\alpha$ veya $\pi|\beta$ olmasını gerektiriyorsa *asal* denir.

Daha önce indirgemezlik tanımı vermiştik. O halde asal ve indirgenemez elemanlar arasındaki ilişkiyi ifade edelim ve buna ait bir örnek yapalım.

Bir asal her zaman indirgenemezdir. Ancak tersi doğru değildir.

Örnek 3.1.1. 3, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-6}\right)$ cisminde indirgenemez olup ancak asal değildir.

Çözüm. Gerçekten, herhangi $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ için, $3=\alpha\beta$ olduğunu varsayalım. Normlarını alırsak $N(\alpha)$ veya $N(\beta)$ nın $N(\alpha)=N\left(a+b\sqrt{d}\right)=a^2-db^2\Rightarrow a^2+6b^2=\mp 3$ olması gerekir. Buradan $a\neq 0$ ve $b=1$ için $\left|a^2+6b^2\right|\geq 6$ ve $b=0$ için $a^2=\mp 3$ olduğundan dolayı bu denklemin açık olarak hiçbir tamsayı çözümü bulunmayacaktır ve sonuçta $N(\alpha)=\mp 1$ veya $N(\beta)=\mp 1$ elde edilir ki, Teorem 3.1.3 (1) gereği $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ tamsayılarının tersinir olduğu görülür. Yani 3, $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ da indirgenemez bir elemandır.

Şimdi 3 ün $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ da asal olamayacağını gösterelim. $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ da $15=3.5=\left(3+\sqrt{-6}\right)\left(3-\sqrt{-6}\right)$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır. $3|15$ olmasına rağmen $3|3+\sqrt{-6}$ veya $3|3-\sqrt{-6}$ olduğu açıktır. Ayrıca $N\left(3+\sqrt{-6}\right)=N\left(3-\sqrt{-6}\right)=9+6=15\neq 1$ olduğundan $\left(3\mp\sqrt{-6}\right)$ sayıları $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right]$ nın tersinir elemanı değildir.

Teorem 3.1.5. Eğer p rasyonel bir asal olmak üzere bir $\pi\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ tamsayısı için $N(\pi)=\mp p$ ise π, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ nin bir asal elemanıdır (Şenay 2007).

Teorem 3.1.6. R_k nın, 0 ve tersinir olmayan her elemanı sonlu sayıda indirgenemez elemanların çarpımı şeklindedir.

İspat. Eğer α, R_k nın indirgenemez bir elemanı değilse R_k nın tersinir olmayan herhangi β,Υ tamsayıları için $\alpha=\beta\,\Upsilon$ yazılabilecektir. Şimdi aynı düşünceyi β,Υ tamsayıları için tekrarlayalım ve böyle devam edelim. Ancak bu işlemi sonlu sayıda tekrarlayabiliriz. Aksi halde istenildiği kadar büyük bir n indisi için $\alpha=\beta_1...\,\beta_n$ buluruz. Ancak kabulümüz gereği her i indisi için $\left|N(\beta_i)\right|\geq 2$ olup, sonuçta $\left|N(\alpha)\right|\geq 2^n$, yani $\left|N(\alpha)\right|$ istediğimiz kadar büyük yapılabilecektir. Bu $\alpha\in R_k$ nın normunun belli bir pozitif tamsayı oluşu ile çelişir (Şenay 2007).

Tanım 3.1.4. Bir R_k halkasına, her $\alpha \in R_k$ tamsayısının sonlu sayıda indirgenemez elemanlarının çarpımı olarak temsili, çarpanlarının sırasının ve indirgenemez elemanlarının ilgilileri ile değişimi dışında tek türlü ise, *tek çarpanlama bölgesi* denir.

Sayılar Teorisinin temel problemlerinin başında hangi bölgelerin tek çarpanlama bölgesi olduğunu belirlemek geldiğini, bu tanıma dayanarak söyleyebiliriz. Burada asal elemanların doğal olarak önemli bir kavram olduğunu zaten biliyoruz. Bu yüzden R_k da her indirgenemez elemanın aynı zamanda R_k nın asal bir elemanı ve tersine R_k nın her asal elemanının R_k da indirgenemez olduğunu göstermeliyiz. Vereceğimiz teorem tek çarpanlama bölgesi olmayan her bölgede asal olmayan indirgenemez elemanların varlığını vurgular.

Teorem 3.1.7. Bir bölgede çarpanlara ayrılışın tek olmasının gerek ve yeter koşulu her indirgenemez elemanın asal olmasıdır (Şenay 2007).

Tanım 3.1.5. İkisi birden sıfır olmayan $\alpha, \beta \in R_k$ elemanları için aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir $\delta \in R_k$ tamsayısına, α, β tamsayılarının *en büyük ortak böleni* denir.

(1) $\delta | \alpha$ ve $\delta | \beta$

(2) α, β nın her δ_1 ortak böleni için $\delta_1 | \delta$.

Tanım 3.1.6. Eğer $R_k = \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ halkasının $\alpha \neq 0$ ve β gibi herhangi elemanları için $\beta = \alpha\kappa + p$ ve $0 \leq N(p) < N(\alpha)$ olacak biçimde $\kappa, p \in R_k$ tamsayıları varsa $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cismine bir *Öklid bölgesi* veya tam olarak *norm için Öklid bölgesi* denir.

Teorem 3.1.8. Her Öklid bölgesi tek çarpanlama bölgesidir.

İspat. Teorem 3.1.7 ye göre R_k nın her indirgenemez elemanının bir asal eleman olduğunu kanıtlamamız yeterlidir. Buna göre π, R_k nın indirgenemez bir elemanı olmak üzere herhangi $\alpha, \beta \in R_k$ için $\pi | \alpha\beta$ ancak $\pi | \alpha$ olduğunu varsayalım. O zaman $(\alpha, \pi) = 1$ ise $\lambda\alpha + \mu\pi = 1$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in R_k$ tamsayıları vardır. Şimdi bu eşitliğin her iki yanını β ile çarparsak, $\lambda\alpha\beta + \mu\beta\pi = \beta$ bulunur. Kabulümüz gereği $\pi | \alpha\beta$ ve açık olarak $\pi | \mu\beta\pi$ olduğundan bölünebilmenin lineerlik özelliğine göre $\pi | \beta$ olur ki, bu da istenendir (Şenay 2007).

Teorem 3.1.9. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin $R_k = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ halkası $d = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 13,$ değerleri için Öklid bölgesidir (Şenay 2007).

Öncelikle L.E. Dickson $d = 2, 3, 5, 13$ değerleri için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ nin Öklid bölgesi olduğuna ve hatalı olarak bunlardan başka böyle cisimlerin bulunmadığını iddia etmiş olmasına rağmen Peron bunlara *d* nin 6,7,11,17,21,29 değerlerinin eklenmesi gerektiğini ispat etti. Daha sonra Oppenheimer, Remak ve Redei bu listeyi *d* için 19,33,37,41,55,73 değerlerini katmak suretiyle genişlettiler. Ancak tek çarpanlama bölgesi olan bütün gerçek $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik cisimlerin bulunması henüz çözüme kavuşturulmamış bir problemdir. Genelde böyle cisimlerin sonsuz sayıda olacağı tahmin edilmekte olup, bu da şimdiye kadar ispat edilememiştir.

Ayrıca tek çarpanlamanın mümkün olmadığı zamanlarda cebirsel denklemlerle Diophantine denklemlerinin çözülemeyeceğini belirtmeliyiz.

3.2. Diophantine Denklemleri

Bu kesimde Diophantine denklemlerini genel anlamda ele alacağız. Bilindiği gibi katsayıları tamsayı olan birtakım polinom denklemlerin tamsayı çözümlerinin bulunması problemi Diophantine denklemlerinin konusunu oluşturmaktadır.

3.2.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

İkinci dereceden, iki bilinmeyenli bir denklemin ya hiç tamsayı çözümü yoktur ya sonlu sayıda tamsayı çözümü vardır ya da sonsuz sayıda tamsayı çözümü vardır.

Bu tür denklemlerin en tipik örneği Pell denklemi olarak bilinen, $D>0$, tam kare çarpansız ve N tamsayı olmak üzere,

$$x^2 - Dy^2 = N \tag{3.2.1.1}$$

şeklindedir. $N=\pm 1$ için bu denklemin sonsuz sayıda $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ çözüm ikilisi vardır. Bundan başka $N\neq 0$ tamsayı, D negatif ise $|x|\leq N$ ve $|y|\leq \frac{N}{D}$ olduğundan (3.2.1.1) denkleminin yalnızca sonlu sayıda çözümü bulunacaktır. Açık olarak, $D=m^2$ şeklinde ise aritmetiğin temel teoremi gereği yalnızca sonlu sayıda çarpanlara ayrılış şekli bulunacağından bu durumda da (3.2.1.1) denklemimizin sonlu sayıda çözümleri bulunacaktır. Ayrıca $x^2-3y^2=-1$ örneğinde olduğu gibi bu denklemi sağlayan hiçbir (x,y) çözüm ikilisinin mevcut olmadığı kolaylıkla görülebilir (İçen 1962).

Genel olarak D ve N keyfi olduklarında bu denklemin hiçbir $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ çözüm ikilisi mevcut değildir. Bu bakımdan bazı kısıtlamalar yapılarak (3.2.1.1) denkleminin köklerinin sürekli kesir açılımına dayanan bir yöntemle sonsuz sayıda çözümünün bulunduğu bilinmektedir (Şenay 2007).

İkinci dereceden iki bilinmeyenli en genel Diophantine Denklemi $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ tamsayılar olmak üzere

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \tag{3.2.1.2}$$

biçimindedir. Bu denklemin değişken dönüşümü yardımıyla yine (3.2.1.1) şeklinde bir denkleme dönüştürülerek çözüleceği bilinmektedir (Şenay 2007), (İçen 1962).

Bu nedenle çözümün mevcut olması durumunda (3.2.1.2) denkleminin çözümleri (3.2.1.1) denkleminin çözümlerine benzer tipte olacaktır.

3.2.2. İkinci Dereceden Üç Bilinmeyenli Denklemler

Tanım 3.2.2.1. $x^2+y^2=z^2$ denklemini gerçekleyen bir pozitif $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ sıralı üçlüsüne *Pisagor üçlüsü* denir. Ayrıca 1 den başka ortak çarpanları bulunmayan yani $\text{ebob}(x,y,z)=1$ olan $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ üçlüsünü de *İlkel Pisagor üçlüsü* denir (Şenay 2007).

Teroem 3.2.2.1. (x,y,z) bir ilkel Pisagor üçlüsü olduğunda, m ve n tamsayıları pozitif, aralarında asal, $m>n$ ve biri tek diğeri çift tamsayılar olmak üzere $x^2+y^2=z^2$ Diophantine denkleminin çözümleri

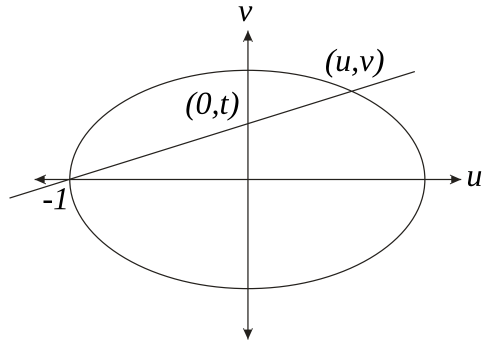
$$x=m^2-n^2,\qquad y=2mn,\qquad z=m^2+n^2$$

ile verilir (Şenay 2007).

İspat. Bu Teoremin ispatı bölünebilme özellikleri kullanılarak kolaylıkla yapılabilir.

Pisagor üçgenleriyle ilgili Sayılar Teorisi açısından ilgi çekici birçok geometrik sonuç vardır. Sözgelişi bir dik üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapının daima bir tamsayı olması bunlardan biridir. Ayrıca çözümleri Pisagor üçlüsüne getirilen ilginç bazı Diophantine denklemi sınıfları da vardır. Özellikle ikinci dereceden üç bilinmeyenli Diophantine denklemlerinin çözümünde Diophantus'a ait olan geometrik tabanlı düşüncenin bu konuda ne kadar etkin olduğunu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek 3.2.2.1. $x^2+2y^2=z^2$ denkleminin her iki yanını z^2 ile bölerek $u=x/z$, $v=y/z$ için yan eksen uzunlukları $a=\mp 1$, $b=\mp\sqrt{2}/2$ ve $c=\mp\sqrt{2}/2$ olan $u^2+2v^2=1$ elipsi elde edilir. Bu şekilde elde edilen elips üzerindeki (u,v) noktasının rasyonel bir nokta olduğu açıktır. Öte yandan şekile göre $(-1,0)$ dan geçen ve eğimi t olan;



doğrunun denklemi $v=t(u+1)$ olup bununla $u^2+2v^2=1$ ortak çözülürse

$$\left(1+2t^2\right)u^2+4t^2u+2t^2-1=0$$

bulunur. Bu denklemin bir kökü şekle göre $u_1=-1$ olup, diğer kök $u_1+u_2=\dfrac{-4t^2}{1+2t^2}$ eşitliğinden $u_2=\dfrac{1-2t^2}{1+2t^2}$ olur. Şimdi u_2 de $(m,n)=1$ olmak üzere $t=(n/m)$ yazalım. O zaman

$$u=\frac{x}{z}=\frac{m^2-2n^2}{m^2+2n^2}$$

ve bunu da $u^2+2v^2=1$ eşitliğinde kullanarak

$$v=\frac{y}{z}=\frac{2mn}{m^2+2n^2}$$

buluruz. Burada x/z ve y/z kısaltılamayan kesirler olduğundan, bu

$$kx=m^2-2n^2,\ ky=2mn,\ kz=m^2+2n^2$$

olacak biçimde bir pozitif k tamsayısının varlığını gerektirir. Burada $k=1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böylece $x^2+2y^2=z^2$ denkleminin bütün pozitif $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$ çözümlerinin; m,n pozitif $(m,n)=1$ ve farklı sınıftan olmak üzere

$$x = m^2 - 2n^2 ,\ y = 2mn ,\ z = m^2 + 2n^2$$

eşitlikleri ile verildiğini söyleyebiliriz (Şenay 2007).

Şimdi; ileriki bölümlerde Tahminimüzün ispatını verirken kullanacağımız, bilinen bazı lemmaları verelim.

Lemma 3.2.2.1. $a^2 + b^2 = c^4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri u ile v aralarında asal ve biri çift olmak üzere; $a = 4uv\left(u^2 - v^2\right),\ b = \mp\left(u^4 + v^4 - 6u^2v^2\right),\ c = u^2 + v^2$ ile verilir (Dickson 1971).

Lemma 3.2.2.2. Eğer p bir tek asal ve $\left(x, y\right) \in \mathbb{Z}^2$, $x^p + 1 = 2y^2$ Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri ise $2p\,|\,y$ dir (Cao 1986).

Lemma 3.2.2.3. $x^2 + 1 = 2y^n$ Diophantine denkleminin $x > 1,\ n > 2$ olmak üzere, tek pozitif tamsayı çözümü $\left(x, y, n\right) = \left(239,13,4\right)$ dür (Ljunggren 1942).

Lemma 3.2.2.4. $x > 1,\ y \geq 1$ ve $n \geq 3$ tek olmak üzere,

$$x^2 + 1 = 2y^n \qquad (3.2.2.1)$$

Diophantine denkleminin tamsayılarda hiçbir çözümü yoktur (Störmer 1899).

3.2.3. Üç ve Daha Yüksek Dereceli ve İki Bilinmeyenli Denklemler

İkinci dereceden daha yüksek dereceli ve iki bilinmeyenli denklemlerin bazı özel durumlar dışında ancak sonlu sayıda çözümünün bulunduğu 20. Yüzyılın başlarında A. Thue tarafından ispat edilmiştir. $a_i,\ \left(i = 0,1,2,...,n\right),\ c$ tamsayılar ve $n > 2$ doğal sayı olmak üzere

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = c \qquad (3.2.3.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin 19. yüzyılın sonlarına doğru A. Thue tarafından daha sonrada 20. yüzyılın başlarında E. Landau ve A. Ostrowski (1920) tarafından sonlu sayıda tamsayı çözümü olduğu gösterilmiştir. Ancak özel olarak homojen olan sol tarafın birinci dereceden bir homojen iki terimlinin veya ikinci dereceden bir homojen üç terimlinin bir kuvveti olması hallerinde bu denklemin çözümlerinden sözedebiliriz. Gerçekten (3.2.3.1) denklemi bu durumlarda

$$\left(ax+by\right)^{n}=c_0$$

veya

$$\left(ax^2+bxy+cy^2\right)^{n}=c_0$$

şeklinde olacaktır ki, sonuçta kolaylıkla birinci ve ikinci dereceden bir denkleme dönüştürülebilmiş olur. Çünkü çözümün mevcut olabilmesi için c_0 katsayısının bir tamsayının n-inci kuvveti olması gerekir. A. Thue, kendine özgü metoduyla bunun ispatını vermiştir.

Şimdi burada ayrıntılara geçmeden zor olan bu ispatı ana hatlarıyla verip (3.2.3.1) denkleminin sonlu sayıda çözümlerinin bulunduğunu göstereceğiz.

(3.2.3.1) denkleminin her iki yanını y^n ile bölerek,

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^{n}+a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\frac{x}{y}+a_n=\frac{c}{y^n} \qquad (3.2.3.2)$$

ve hesapları basitleştirmek amacıyla $\frac{x}{y}=z$ değişken dönüşümü ile

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0 \qquad (3.2.3.3)$$

denklemine varılır. Bu denklemin bütün köklerinin birbirinden farklı olduğunu ve $a_0a_n\neq 0$ olduğunu varsaymakla, ayrıca bu denklemin köklerinin daha küçük dereceli tamkatsayılı bir denklemin kökleri olamayacağını da kabul etmekle genelliğin bozulmamış olacağı açıktır.

Cebirin esas teoremine göre (3.2.3.3) denkleminin kökleri $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ olmak üzere, bu denklem için

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=a_0\left(z-\alpha_1\right)\left(z-\alpha_2\right)\ldots\left(z-\alpha_n\right) \qquad (3.2.3.4)$$

gösterimi bulunur. Şimdi (3.2.3.4) polinomunun çarpım şeklindeki bu gösterilişini kullanarak (3.2.3.2) i

$$a_0\left(\frac{x}{y}-\alpha_1\right).\left(\frac{x}{y}-\alpha_2\right)...\left(\frac{x}{y}-\alpha_n\right)=\frac{c}{y^n} \qquad (3.2.3.5)$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi (3.2.3.5) denkleminin sonsuz sayıda $(x_k, y_k)\in\mathbb{Z}^2$ çözümlerinin bulunduğunu kabul edelim. Bu kabulle mutlak değerleri istenildiği kadar büyük olan çözümlerin de bulunacağı açıktır. Eğer y_k ları sınırlı ve x_k ları istenildiği kadar büyük olan sonsuz sayıda (x_k, y_k) sıralı ikilileri mevcut olsaydı, bu x_k lar için (3.2.3.5) ün sol tarafı istenildiği kadar büyük, buna karşılık da sağ yanı sınırlı kalırdı ki, bu doğal olarak mümkün değildir. Artık, y_k yı çok büyük varsayabiliriz. Bu durumda (3.2.3.5) denkleminin sağ tarafı dolayısıyla da sol tarafı küçük olacaktır. Oysa sol tarafın $\frac{x_k}{y_k}$ ları içeren n tane çarpan ile 1 den küçük olmayan a_0 tamsayısının çarpımı biçiminde olduğu göz önüne alınırsa, buda sol tarafın ancak $\frac{x_k}{y_k}-\alpha_m$ farklarından herhangi birinin mutlak değerce küçük olması ile mümkün olacaktır.

Açık olarak, sözkonusu bu fark ancak α_m in reel olmasıyla, yani $b\neq 0$ olmak üzere $\alpha_m = a+bi$ biçiminde olmadığı zaman küçük olabilecektir. Aksi halde;

$$\left|\frac{x_k}{y_k}-a-bi\right|=\sqrt{\left(\frac{x_k}{y_k}-a\right)^2+b^2}>|b| \qquad (3.2.3.6)$$

eşitsizliği nedeniyle bu farkın mutlak değeri istenidiği kadar küçük yapılamaz. Bu tespitten sonra bu farkların herhangi iki tanesinin ki bunlar ((3.2.3.6) denkleminin sol tarafındaki herhangi iki çarpandır) aynı zamanda küçük olan birer mutlak değerinin bulunamayacağını da söyleyebiliriz. Çünkü bütün kökleri birbirinden farklı kabul ettiğimizden

$$\left|\left(\frac{x_k}{y_k}-\alpha_m\right)-\left(\frac{x_k}{y_k}-\alpha_s\right)\right|=|\alpha_m-\alpha_s|\neq 0 \qquad (3.2.3.7)$$

elde edilecektir. Burada üçgen eşitsizliğini de göz önüne alarak farklardan birinin mutlak değeri $\frac{1}{2}|\alpha_m - \alpha_s|$ den daha küçük ise (3.2.3.7) den diğer farkların her birinin $\frac{1}{2}|\alpha_m - \alpha_s|$ den büyük olmaları gerektiğini söyleyebiliriz. Bütün α_m kökleri birbirinden farklı olduğundan $|\alpha_m - \alpha_s| > 0, \quad (m \neq s)$ olacaktır. Bu değeri $2d$ ile gösterirsek yeteri kadar büyük bir y_k lar için (ki y_k sonsuz arttığı kabülümüzden böyle bir y_k her zaman mevcuttur.)

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| < d$$

ve

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| > d \quad , \qquad s = 1,2,3,...,n, \qquad s \neq m \tag{3.2.3.8}$$

elde ederiz. Öte yandan (3.2.3.6) denkleminden

$$|a_0|\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_1\right| ... \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_{m-1}\right|\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right|\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_{m+1}\right| ... \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_n\right| = \frac{|c|}{|y_k|^n} \tag{3.2.3.9}$$

bulunur. Bu son eşitlikte

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_s\right| \quad , \quad s \neq m$$

farklarının her biri yerine daha küçük olan d ve $|a_0|$ yerine 1 (a_0 tamsayısı 1 den küçük olamaz) değerlerini yazarsak (3.2.3.9) un sol tarafı sağ tarafından daha küçük olur ve sonuçta

$$d^{n-1}\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| < \frac{|c|}{|y_k|^n}$$

veya

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| < \frac{c_1}{|y_k|^n}, \qquad c_1 = \frac{|c|}{d^{n-1}} \tag{3.2.3.10}$$

eşitsizliğini elde ederiz ki, burada $c_1$in x_n ve y_n lere bağlı olmadığı açıktır. α_m sayıları cebirin esas teoremine göre n taneden fazla olamaz. Ancak, herhangi bir m

indisi için (3.2.3.10) eşitsizliğinin doğru olması, $\left(x_k, y_k\right)$ sıralı ikilisinin sonsuz sayıda olmasını gerektirecektir. Başka bir deyişle, eğer (3.2.3.1) denkleminin sonsuz sayıda $\left(x_k, y_k\right)$ çözüm ikilileri varsa, tam katsayılı (3.2.3.3) cebirsel denkleminin öyle bir kökü vardır ki, bu kök için

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{A}{q^n} \qquad (3.2.3.11)$$

eşitsizliği istenildiği kadar büyük q lar için gerçeklenir. Burada A, p ve q dan bağımsız sabit bir sayı n , α nın gerçeklediği denklemin derecesidir. α keyfi bir sayı olsaydı onu öyle seçebilirdik ki, (3.2.3.10) eşitsizliğini p ve q tamsayılar olmak üzere, sonsuz sayıda (p, q) çözüm ikilisi mevcut olurdu. Oysa, α tamkatsayılı cebirsel bir denklemin köküdür.

Şimdi, Norveçli Matematikçi A.Thue (1863-1922) tarafından ispat edilen ‘ n. dereceden bir α cebirsel sayısı için

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{(n/2)+1}}, \quad n \geq 3 \qquad (3.2.3.12)$$

eşitsizliğinin, p ve q tamsayıları cinsinden ancak sonlu sayıda çözümü vardır.’ Teoremini göz önüne alalım. Eğer $n \geq 3$ ise (3.2.3.11) eşitsizliğinin sağ tarafı yeteri kadar büyük q lar için (3.2.3.12) eşitsizliğinin sağ tarafından $n > \frac{n}{2} + 1$ olduğundan küçük olur. Dolayısıyla eğer (3.2.3.12) eşitsizliği ancak sonlu sayıda p ve q tamsayıları için gerçeklenirse, (3.2.3.11) eşitsizliği de ancak sonlu sayıda p, q tamsayıları için gerçeklenecektir. Bu da (3.2.3.3) denkleminin bütün kökleri n den daha aşağı dereceden tam katsayılı bir denklemin kökleri olmaması durumunda (3.2.3.1) denkleminin ancak sonlu sayıda tamsayılı çözümün olmasını gerektirecektir.

Kolayca görülebileceği gibi n=2 için (3.2.3.11) eşitsizliği belli bir A pozitif sabiti ve sonsuz sayıda p ve q tamsayıları için gerçeklenir. Sözgelişi $x^2 - 2y^2 = 1$ Pell denkleminin sonsuz sayıda çözümü bulunduğu bilinmektedir. Bundan başka bu teoremin ispatındaki metodun, çözümlerin mutlak değerleri için bir üst sınır tespitine prensip olarak imkan vermediğine ilgi çekmeliyiz. Her ne kadar A. Thue'nun metodu, çözümlerin mutlak değerlerini üstten sınırlamaya imkân veremiyorsa da $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0$ denkleminin çözümlerinin sayısı için bir üst sınır vermektedir. Zaten bu problem en genel anlamıyla bugün bile bir çözüme kavuşturulamamıştır.

İki bilinmeyenli denklemler için sonlu veya sonsuz sayıda çözümün olup olmadığı problemini kısaca verdik. Şimdi ikinci dereceden daha yüksek dereceli ve ikiden fazla bilinmeyenli denklemlerde benzer soruyu çok özel denklem sınıfları için cevaplayabiliriz.

3.2.4. Üç ve Daha Yüksek Dereceden Üç Bilinmeyenli Cebirsel Denklemlerle Bazı Üstel Denklemler

Büyük Fransız Matematikçi Pierre Fermat (1601-1665)

$$x^n + y^n = z^n$$

denkleminin $n \geq 3$ için x, y, z cinsinden hiçbir pozitif tamsayılı çözüme haiz olmadığı iddiasını ortaya attı. Her ne kadar Fermat kendisinin buluşu olan sonsuz iniş metodunu kullanarak bir ispat yaptığını iddia etmişse de, 1995 yılına kadar bu denklemin çözümü için hiçbir ispat bulunamamıştır. Alman Matematikçi E. Kummer (1810-1893) bir ispat bulmaya çalıştığı ve bir gün onu bulduğunu zannettiği zaman, adi tamsayılar için doğru olan bu ispatın, Fermat'ın problemine ait araştırmalarda rastlanan karmaşık bazı sayı tipleri için yanlış olduğunu keşfetti. Kummer Fermat Tahmininü tamamıyla ispat edememiştir. Bu Tahmini sadece "düzgün" denilen asal sayılardan en aşağı birisi ile bölünebilen n ler için ispat etmiştir.

Fermat'ın teoreminin $n = 4$ için ispatı sonsuz iniş metodu ile yapılmıştır. Bu ispat metodu; tek bir çözümden, z si sürekli azalan sonsuz bir çözüm dizisi elde etmekten ibarettir.

Şimdi Fermat denklemlerinden birinin ispatını sonsuz iniş metodunun enterasanlığını belirtmek amacıyla aşağıda yapalım.

Teorem 3.2.4.1. $x^4 + y^4 = z^2$ Fermat denkleminin $xyz \neq 0$ olan hiçbir tamsayı (x, y, z) çözümü yoktur.

İspat. Bu denklemin $x_0 y_0 z_0 \neq 0$ olan bir çözümünün bulunduğunu varsayalım. Böyle bir $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ çözümünde x , y veya z nin işaretinin değişimi yeni bir çözüm üreteceğinden *x,y,z* bileşenlerinin pozitif olduğunu varsayabiliriz. Şimdi z_0 bileşenini denklemin diğer (x, y, z) çözümlerinin z leri arasında en küçük olacak şekilde seçelim. Ayrıca bu sayıların karşılıklı olarak aralarında asal olduğunu da kabul edebiliriz. Gerçekten bir (x, y, z) pozitif çözümünde $ebob\,(x, y) > 1$ olsaydı, Aritmetiğin Temel Teoremi gereği x ve y nin ikisini de bölen p gibi bir asal sayı bulunacaktı. Bu durumda $p^4 \,|\, x^4 + y^4$ den, $p^4 \,|\, z^2$ ve sonuçta $p^2 \,|\, z$ olduğundan,

$$(x/p)^4 + (y/p)^4 = (z/p)^2$$

bulunur. Şimdi bu elde edilen yeni $\left(x/p, y/p, z/p^2\right)$ çözüm üçlüsünün üçüncü bileşeni için $z/p^2 < z$ olduğundan, bu sonuç (x, y, z) çözümünde z nin en küçük seçilmesiyle çelişir ki, bu da $ebob\,(x, y) = 1$ olmasını gerektirir. Böylece $\left(x_0^{\,2}\right)^2 + \left(y_0^{\,2}\right)^2 = \left(z_0\right)^2$ eşitliğinden $\left(x_0^{\,2}, y_0^{\,2}, z_0\right)$ ilkel Pisagor üçlüsünün $x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin bir çözümü olduğunu söyleyebiliriz. O halde $x_0^{\,2}$ ve $y_0^{\,2}$ aynı anda tek ve aynı anda çift olamazlar. Buna göre $x_0^{\,2}$ nin tek ve $y_0^{\,2}$ nin çift olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 3.2.2.1. e göre $x_0^{\,2} = a^2 - b^2$, $y_0^{\,2} = 2ab$, $z_0 = a^2 + b^2$ olacak biçimde a ve b gibi aralarında asal (a>b) ve her ikisi tek veya çift olmayan tamsayılar vardır. Böylece $x_0^{\,2} = a^2 - b^2$ den $\left(x_0, b, a\right)$ nın x_0 tek olmak üzere bir ilkel pisagor üçlüsü olduğu sonucuna varılır. O zaman yine aynı sebeple

$$x_0^{\,2} = r^2 - s^2, \quad b^2 = 2rs, \quad a = r^2 + s^2$$

olacak şekilde *ebob* $\left(r, s\right) = 1$ olan *r, s* tamsayıları vardır. Şimdi *r,s* ve *a* karşılıklı aralarında asal olduğundan $y^2 = 2ab = 4ars$ eşitliği ancak ve ancak *r,s* ve *a* nın kendilerinin bir tamkare olmaları durumunda mümkündür. O halde $r = m^2$, $s = n^2$ ve $a = t^2$ olacak biçimde *m, n* ve *t* tamsayıları vardır. Öte yandan $a = r^2 + s^2$ eşitliğinden, $m^4 + n^4 = t^2$ bulunur.

$$z_0 = a^2 + b^2 > a^2 = t^4$$

olup buradan da

$$0 < t = \sqrt{a} < \sqrt[4]{z_0} < z_0$$

elde edilir. Öte yandan $m^4 + n^4 = t^2$ eşitliği $\left(m, n, t\right)$ üçlüsünün **:** $x^4 + y^4 = z^2$ nin $t < z_0$ olan bir çözümü olduğunu gösterir.

Oysa biz $\left(x, y, z\right)$ çözümünde $z_0 \in \mathbb{Z}^+$ *yı* en küçük seçtiğimizden bu çelişkidir. Bu çelişki teoremi ispatlar (Şenay 2007).

3.2.5. $y^2 = x^3 + d$ Mordell denklemi

Önerme 3.2.5.1. d kare çarpansız, $d < -1$ ve $d \equiv 2$ veya 3 (mod 4) olsun. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ nin sınıf sayısı h_k nın 3 ile bölünmediğini varsayalım. O taktirde $y^2 = x^3 + d$ denkleminin tamsayılı çözümünün bulunması için gerek ve yeter koşul d nin $d = \mp 1 - 3a^2$ olmasıdır. Bu durumda çözümler $x = a^2 - d$, $y = \pm a\left(a^2 - 3d\right)$ dir.

İspat. Öncelikle, x ve y nin aralarında asal olduğuna ilgi çekilmelidir; gerçekten p asalı, x ve y yi bölen bir asal olsaydı, buradan $p^2 \mid d$ elde edilir ki, bu d nin kare çarpansız oluşu hipotezi ile çelişirdi. Dolayısıyla x ve y aralarında asaldır. Ayrıca, x tek olmak zorundadır. Gerçekten eğer böyle olmasaydı $y^2 \equiv d$ (mod 4) elde edilirdi ki, bu 4 modülünde karelerin 0 ve 1 oluşu gerçeği ile çelişirdi. Artık denklemimizi

$$x^3 = \left(y+\sqrt{d}\right)\left(y-\sqrt{d}\right)$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi, $k = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ sanal kuadratik cismindeki aritmetiği kullanarak $y^2 = x^3 + d$ denklemini,

$$(y+\sqrt{d})(y-\sqrt{d}) = (x)^3 \qquad (3.2.5.1)$$

şeklinde çarpanlara ayırabiliriz. $\mathfrak{p}$, $(y+\sqrt{d})$ ve $(y-\sqrt{d})$ yi bölen asal ideal olsun. O zaman, $y+\sqrt{d} \in \mathfrak{p}$ ve $y-\sqrt{d} \in \mathfrak{p}$ ve dolayısıyla $2y \in \mathfrak{p}$ olur. Şu halde $(x)^3$ idealinin asal ideallerin çarpımı şeklinde yazılışı gereği $\mathfrak{p} \mid (2y)$ ve $\mathfrak{p} \mid (x)$ olmalıdır.

Norm almak suretiyle, $N(\mathfrak{p}) \mid N(2y) = 4y^2$ ve $N(\mathfrak{p}) \mid N(x) = x^2$ olur. x tek olduğundan $N(\mathfrak{p})$ tektir. Buradan $N(\mathfrak{p}) \mid y^2$, $N(\mathfrak{p}) \mid x^2$ ve $\mathfrak{p} \neq (1)$ olduğundan bu durumda $N(\mathfrak{p}) \neq 1$ ve x, y nin ortak asal çarpanı vardır. Bu ise baştaki tespitimizle çelişir. Böylece $(y+\sqrt{d})$ ve $(y-\sqrt{d})$ idealleri aralarında asaldır.

Teorem 2.2.3 e göre (3.2.5.1) denklemi

$$(y+\sqrt{d}) = \mathrm{A}^3 \qquad \mathrm{A} \in \mathrm{I}(R_k)$$

şekline dönüşür. Şu halde , A^3 esas idealdir. Ayrıca $3 \mid h_k$ olduğundan Önerme 2.2.2 (b) gereği A esas idealdir. O halde; $\mathrm{A} = (a+b\sqrt{d})$ ve $(y+\sqrt{d}) = (\left(a+b\sqrt{d}\right)^3)$ olacak biçimde $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ vardır. Fakat bütün sayı cisimleri için $(\alpha,\beta) \in {R_k}^2$ $(\alpha) = (\beta) \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in {R_k}^{x}$ olmak üzere $\alpha = \varepsilon\beta$ eşitliğinin gerçeklenmesidir. Burada özel olarak Teorem 3.1.4 ü göz önüne alarak

$$y+\sqrt{d}=\pm\left(a+b\sqrt{d}\right)^3$$

elde edilir. Bu da

$$\begin{aligned} y &= \pm a\left(a^2+3db^2\right) \\ 1 &= \pm b\left(3a^2+db^2\right) \end{aligned}.$$

olmasını gerektirir ki, açık olarak $b=\pm 1$, $d=\pm 1-3a^2$ ve $y=\pm a\left(a^2+3d\right)$ bulunur. Ana denklemde yerine yazarsak

$$x^3=a^6+6a^4d+9a^2d^2-d \qquad (3.2.5.2)$$

veya $\left(d+3a^2\right)^2=1$ eşitliğini açıp d ile çarptıktan sonra d yi çekerek bulduğumuz $d=d^3+6a^2d^2+9a^4d$ değerini (3.2.5.2) denkleminde yazarsak $x^3=a^6-3a^4d+3a^2d^2-d^3$ sonuç olarak da $x=a^2-d$ elde edilir ki, ispat biter (Duverney 1998) .

4. TERAİ TAHMİNİ VE GENELLEŞTİRİLMESİ

L. Jesmanowicz (1956), $5^x + 12^y = 13^z$, $7^x + 24^y = 25^z$, $9^x + 40^y = 41^z$, $11^x + 60^y = 61^z$ denklemlerinin tek pozitif tamsayı çözümlerinin (*x, y, z*) = (2, 2, 2) ile verildiğini ispatladı ve eğer *a, b, c* Pisagor üçlüsü, yani $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlayan pozitif tamsayılar ise, o zaman $a^x + b^y = c^z$ denkleminin tek çözümünün (*x, y, z*) = (2, 2, 2) olduğunu Tahmine etti. Jesmanowicz'in Tahmininü kaynak araştırmasında da bahsettiğimiz gibi Nobuhiro Terai aşağıdaki gibi ele aldı.

Tahmin 4.1. Eğer *ebob* (*a,b,c*)=1 ve *a* çift, $a^2 + b^2 = c^2$ ise

$$x^2 + b^m = c^n \tag{4.1}$$

denkleminin tek pozitif tamsayı çözümleri (*x,m,n*) = (*a*, 2, 2) dir.

Nobuhiro Terai, 1993 yılındaki çalışmasında yukarıdaki Tahminin koşulları sağlayan *b* ve *c* tamsayıları, $q^2 + 1 = 2p$ eşitliğini gerçekleyen, *p* ve *q* asalları olmak üzere $x^2 + q^m = p^n$ denkleminin (*p*–1, 2, 2) den başka (*x, m, n*) pozitif tamsayı çözümünün olup olmadığını araştırarak bazı yeni sonuçlar verdi. Bizde tezimizin bu bölümünde $Ax^2 + B^m = y^n$ genel denkleminden $A = 1$ için elde edilen $x^2 + B^m = y^n$ denkleminin öncelikle verilen *B* ve *y* tamsayıları için çözümlerini içeren bir Tahmin verdik. Daha sonra da Tahminimizdeki koşulları sağlayan *B* ve *y* tamsayılarının sırasıyla *p* ve *q* gibi $q^2 + 1 = 2p^2$ koşulunu gerçekleyen tek asallar olduklarını düşünerek elde ettiğimiz $x^2 + q^m = p^n$ Diophantine denkleminin çözümlerinin bulunması üzerinde çalıştık. Şimdi çalışmamızın temeli olan $x^2 + B^m = y^n$ denklemini göz önüne alarak Tahminimüzü verelim.

Tahmin 4.2. Eğer $ebob(a, B, y) = 1$, $2|a$ ve (a, B, y^2) bir pisagor üçlüsü olmak üzere $a^2 + B^2 = y^4$ ise,

$$x^2 + B^m = y^n \tag{4.2}$$

Diophantine denkleminin tek pozitif tamsayı çözümü $(x, m, n) = (a, 2, 4)$ dür.

Çalışmamız boyunca; Tahmin 4.2 deki koşulları sağlayan B ve y tamsayıları, $q^2 + 1 = 2p^2$ eşitliğini gerçekleyen, p ve q asalları olmak üzere,

$$x^2 + q^m = p^n$$

Diophantine denkleminin $((p^2 - 1), 2, 4)$ den başka (x, m, n) pozitif tamsayı çözümünün olup olmadığını araştırarak ilgili sonuçlarımızı vereceğiz.

Teorem 4.1. *d*, $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ cisminin ideal sınıf grubunda, (p) idealinin asal böleninin mertebesi olmak üzere, p ve q asalları,

(i) $q^2 + 1 = 2p^2$

(ii) eğer $q \equiv 1$ veya 3 (mod 4) ise $d=1$ veya çift

şartlarını sağlayacak şekilde olsun, o zaman

$$x^2 + q^m = p^n \tag{4.3}$$

denkleminin tek pozitif tamsayı çözümü $(x, m, n) = ((p^2 - 1), 2, 4)$ olur.

Teoremin ispatını yapmak için **a)** n çift **b)** m ve n tek olması durumlarını ve en genel olarak da m çift ve $n=2k$ çift (k tek) durumunu inceleyeceğiz.

a) n nin çift olması durumunda $x^2 + q^m = p^n$ denklemini inceleyelim ve bununla ilgili bir önerme verelim.

Önerme 4.1. p ve q, $q^2+1=2p^2$ eşitliğini gerçekleyen tek asallar olsun. Eğer n çift ise,

$$x^2+q^m=p^n$$

denkleminin tek pozitif tamsayı çözümü $(x,m,n)=\left(\left(p^2-1\right),2,4\right)$ dür.

İspat. n=2k olsun. Eğer

$$x^2+q^m=p^n$$

denkleminde $n=2k$ yazarsak, o zaman;

$$q^m=p^{2k}-x^2$$
$$q^m=\left(p^k-x\right)\left(p^k+x\right)$$

elde ederiz. Asal çarpanlara ayrılışın tekliğinden $\left(p^k-x,\ p^k+x\right)=1$ olup, q nun tek asal olduğunu da göz önüne alarak ;

$$q^m=p^k+x\ ,$$
$$1=p^k-x$$

ve böylece

$$q^m+1=2p^k \tag{4.4}$$

denklemini elde ederiz.

Şimdi m nin çift olduğunu göstermeliyiz. $q^2+1=2p^2$ eşitliğinden $q^2\equiv-1$ (mod p) ve böylece p modülüne göre q nun mertebesi 4 dür. (4.4) denkleminden $q^m\equiv-1$ (mod p) olduğunu söyleyebiliriz. Bu iki kongrüanslığı dikkate alırsak $q^{2m}\equiv1$ (mod p) yi elde ederiz. Böylece $2m\equiv0$ (mod 4) olur ki, bu da m nin çift olmasını gerektirir.

Eğer $k\geq3$ ise, o zaman Lemma 3.2.2.3 ve Lemma 3.2.2.4 e dayanarak (4.4) denkleminin çözümünün olmadığını söyleyebiliriz.

Eğer k=2 veya 1 ise, (4.4) denklemini ve $q^2+1=2p^2$ eşitliğini dikkate alarak $q^m+1=2p^2=q^2+1$ elde edilir. Yani m=2 bulunur ki, bu durumda (4.4) denkleminin tek tamsayı çözümünün (m, k) = (2, 2) olduğunu söyleyebiliriz.

b) İkinci olarak $x^2 + q^m = p^n$ denkleminde m ve n nin tek olması durumunu inceleyelim. Bu durumu kendi içinde ikiye ayıracağız. Öncelikle $q \equiv 1$ (mod 4) olması durumuna kısıtlanacağız. Daha sonra da $q \equiv 3$ (mod 4) durumunu inceleyeceğiz.

Önerme 4.2. $q \equiv 1$ (mod 4) için, p ve q farklı asallar ve $m = 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda;

$$x^2 + q = p^n \tag{4.5}$$

denkleminin (x, n) pozitif tamsayı çözümlerinin mevcut olması için gerek ve yeter şart d; $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-q}\right)$ nin ideal sınıf grubunda (p) idealinin bir asal böleninin mertebesi olmak üzere $p^d - q$ nun bir kare olmasıdır (Terai 1993).

Önerme 4.2 yi de dikkate alarak Tahminimüzle ilgili olarak bir sonuç verelim.

Sonuç 4.1. d, Önerme 4.2 de belirtildiği gibi ayrıca p ve q aşağıdaki

(i) $q^2 + 1 = 2p^2$

(ii) $q \equiv 1$ (mod 4) ve $p \equiv 1$ (mod 4)

(iii) $d = 1$ veya çift

koşullarını sağlayan farklı asallar olmak üzere

$$x^2 + q = p^n$$

denkleminin (x, n) pozitif tamsayı çözümü yoktur.

İspat. Önerme 4.2 den, öncelikle $p^d - q$ nın bir kare olmadığını göstermemiz gerektiğini söyleyebiliriz.

Şimdi tam aksine, bazı c tamsayılar için $p^d - q$ nun bir kare yani $p^d - q = c^2$ olduğunu varsayalım. Öncelikle $d = 1$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
p = c^2 + q \quad \Rightarrow \quad p^2 &= \left(c^2 + q\right)^2 \\
p^2 &= c^4 + 2c^2 q + q^2 \\
2p^2 &= 2c^4 + 4c^2 q + 2q^2
\end{aligned}
$$

olur. Kabulümüze göre $q^2 + 1 = 2p^2$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
2p^2 = 2c^4 + 4c^2 q + 2q^2 &= q^2 + 1 \\
2c^4 + 4c^2 q + q^2 &= 1
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu sonuç denklemin çözümünün bulunmadığını gösterir.

$d = 2$ olması durumunda ise;

$$p^2 = c^2 + q \Rightarrow 2c^2 + 2q = 2p^2$$

olur. Yine kabulümüze göre burada $q^2 + 1 = 2p^2$ olduğunu kullanarak,

$$
\begin{aligned}
2c^2 + 2q = 2p^2 &= q^2 + 1 \\
2c^2 + 2q &= q^2 + 1 \\
2c^2 &= q^2 - 2q + 1 \\
2c^2 &= \left(q - 1\right)^2
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, böylece $p^d - q$ nin bir kare olmadığı ve Önerme 4.2. den $x^2 + q = p^n$ denkleminin hiçbir pozitif tamsayı çözümünün bulunmadığı açıktır.

Şimdi $m \neq 1$ tek pozitif tamsayı olduğunu varsayalım. Daha önceki yıllarda m nin tek tamsayı olması durumunda $x^2 + q^{2k+1} = y^n$ denkleminin çözümleriyle ilgili verilen bir teoremi ifade edelim ve ardından bir lemma verelim.

Teorem 4.2. q bir tek asal, $q \not\equiv 7 \pmod 8$ için, $n \geq 5$, 3 ün bir katı olmayan tek tamsayı ve h da, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-q}\right)$ cisminin sınıf sayısı olsun. O zaman, *ebob* (n, h) = 1 olmak üzere,

$$x^2 + q^{2k+1} = y^n$$

denkleminin (q, n, k, x, y) ile gösterilen tam iki çözüm ailesi (q, n, k, x, y) = (19,5,0,22434,55) = (341,5,0,2759646,377) biçimindedir (Arif ve Abu Muriefah 2002).

Lemma 4.1. p ve q, Sonuç 4.1 de verilen asallar olsun. k sabit bir tamsayı, $n \geq 3$ ve tek olduğunu varsayalım. Eğer;

$$x^2 + q^{2k+1} = p^n$$

denkleminin (x, n) pozitif tamsayı çözümü varsa,

$$x^2 + q^{2k-1} = p^n$$

denkleminin de (x, n) pozitif tamsayı çözümü vardır.

İspat. Bu Lemmanın ispatı N. Terai'nin (1993) makalesindekine benzer şekilde yapılır.

Biz bu ana kadar $q \equiv 1$ (mod 4) olması durumuna kısıtlanmıştık. Şimdi m ve n nin tek olması durumunda $q \equiv 3$ (mod 4) olduğunu kabul edelim. Daha önceki yıllarda R. Alter ve K. Kubato'nun $m = 1$ olması durumu için verdiği bir sonucu ifade edelim.

Önerme 4.3. D, 3 den farklı $D \equiv 3$(mod 4) şartını sağlayan pozitif bir kare çarpansız tamsayı, p D yi bölmeyen bir tek asal ve d, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-D}\right)$ kuadratik cisminin sınıf grubunda (p) nin asal ideal bölenlerinin bir mertebesi olsun.

$x \geq 0$, $n \geq 0$ için $x^2 + D = p^n$ denkleminin tamsayılarda çözümünün olması için gerek ve yeter koşulu $\left(\dfrac{-D}{p}\right) = 1$ ve aşağıdaki şartlardan birinin sağlamasıdır.

(i) $4p^d - D$ bir kare ve $3p^d - D = \mp 2$,

(ii) $p^d - D$ bir kare (Alter & Kubato 1973).

Şimdi bu özelliğe bağlı olarak $m = 1$ durumu için bir sonuç verelim.

Sonuç 4.2. d, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-q}\right)$ nun ideal sınıf grubunda (p) idealinin bir asal böleninin mertebesi, ayrıca p ve q ,

(i) $q^2+1=2p^2$

(ii) $q \equiv 3 \pmod 4$, $p \equiv 1 \pmod 4$

(iii) $d=1$ veya çift

koşulları gerçekleyen asallar olsun. O zaman

$$x^2+q=p^n$$

denkleminin pozitif tamsayılarda hiçbir çözümü yoktur.

İspat. İlk olarak Önerme 4.3 deki (i) durumunu düşünelim ve bazı a tamsayıları için $4p^d-q=a^2$ olduğunu varsayalım.

Eğer d = 1 ise $4p^d=a^2+q$ eşitliğinden $p=\dfrac{a^2+q}{4}$ ü elde ederiz. Böylece,

$$2\left(\frac{a^2+q}{4}\right)^2=q^2+1=2p^2$$
$$\frac{a^4+q^2+2a^2q}{8}=q^2+1$$
$$a^4+q^2+2a^2q=8q^2+8$$
$$a^4-8=7q^2-2a^2q$$

elde edilir ki, bu sonuç denklemin çözümünün bulunmadığını gösterir.

Eğer d = 2 ise, böylece $4p^2-q=a^2$ den $2p^2=\dfrac{a^2+q}{2}$ ve

$$\frac{a^2+q}{2}=q^2+1=2p^2$$
$$a^2=2q^2-q+2$$

elde edilir ki, denklemin yine çözümü yoktur.

Şimdi (i) durumu için $3p^d-q=\mp 2$ olduğunu varsayalım. Eğer d = 1 ise $3p-q=\pm 2$ ise $p=\dfrac{\mp 2+q}{3}$ elde ederiz.

$$2\left(\frac{\mp 2+q}{3}\right)^2 = q^2+1 = 2p^2$$
$$8+2q^2 \mp 8q = 9q^2+9$$
$$0 = 7q^2 \mp 8q+1$$

bulunur ki, bu durumda denklemin çözümünün bulunmadığı açıktır.

Şimdi d = 2 olması durumunu göz önüne alalım. Eğer d = 2 ise $3p^2 - q = \mp 2$ eşitliğinden $p^2 = \frac{\mp 2+q}{3}$ olur ve böylece

$$2\left(\frac{\mp 2+q}{3}\right) = q^2+1 = 2p^2$$
$$\mp 4+2q = 3q^2+3$$
$$-3 \pm 4 = 3q^2 - 2q$$

elde edilir ki, bu da denklemin çözümünün olmadığını gösterir.

Önerme 4.3 deki (*ii*) durumun ispatı daha önce Sonuç 4.1 de yapıldığını belirtelim. $q \equiv 3$ (mod 4) için düşünürsek bu ispatı çözümünün olmayacağı açıktır.

Şimdi $m \neq 1$ tek pozitif tamsayı olduğunu varsayalım.

Lemma 4.2. p ve q, Sonuç 4.2 de verilen asallar olsun. r nin sabit bir tamsayı, $n \geq 3$ ve tek bir tamsayı olduğunu varsayalım. Eğer

$$x^2 + q^{2r+1} = p^n \tag{4.6}$$

denkleminin (x,n) pozitif tamsayı çözümü varsa,

$$x^2 + q^{2r-1} = p^n$$

denkleminin de (x,n) pozitif tamsayı çözümü vardır.

İspat. (4.6) denklemi $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-q}\right)$ cisminin R_k tamsayılarının halkasında aşağıdaki şekilde çarpanlarına ayrılabilir.

$$\left(x+q^r\sqrt{-q}\right)\left(x-q^r\sqrt{-q}\right) = p^n \tag{4.7}$$

Quadratik cisim teorisinden $\mathfrak{p}$ ve $\mathfrak{p}'$ eşlenik idealler olmak üzere $\left(-q/p\right)=1$ ve $\left(p\right)=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ olur. Böylece

$$\left(x+q^r\sqrt{-q}\right)\left(x-q^r\sqrt{-q}\right)=\mathfrak{p}^n\mathfrak{p}'^n$$

elde ederiz. Sol taraftaki çarpanlar aralarında asal, yani $ebob\left(\left(x+q^r\sqrt{-q}\right),\left(x-q^r\sqrt{-q}\right)\right)=1$ olduğundan, $\left(x+q^r\sqrt{-q}\right)=\mathfrak{p}^n$ veya $\left(x+q^r\sqrt{-q}\right)=\mathfrak{p}'^n$ olur. İlk durumun gerçeklendiğini varsayalım. Buradan $\mathfrak{p}^n$ bir esas ideal ve böylece *d*, R_k nın sınıf grubunda (*p*) nin mertebesi olduğundan bazı *t* ler için *n* = *dt* olur ve tanımdan *a* ve *b*, $b\geq 0$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere

$$\mathfrak{p}^d=\left(\frac{a+b\sqrt{-q}}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\left(x+q^r\sqrt{-q}\right)=\mp\left(\frac{a+b\sqrt{-q}}{2}\right)^t \tag{4.8}$$

bulunur. $p^d=\dfrac{a^2+b^2q}{4}$ olmak üzere (4.8) denkleminde sanal kısımları eşitlersek

$$q^r=\frac{\mp b}{2^t}\cdot\sum_{j=0}^{\frac{t-1}{2}}\binom{t}{2j+1}\,a^{t-2j-1}\left(-b^2q\right)^j \tag{4.9}$$

elde edilir.

$a\not\equiv 0$ (mod *q*) dan *a* nın çift olduğunu söyleyebiliriz. Böylece sonuçta $\mathfrak{p}^d=\dfrac{a^2+b^2q}{4}$ olduğundan *b* de çift olur. O halde *a*=2*A* ve *b*=2*B* yazarsak $\mathfrak{p}^d=A^2+B^2q$ olur. Bu durumda (4.9) denkleminden

$$q^r = \mp \frac{2B}{2^t} \sum_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} \binom{t}{2j+1} (2A)^{t-2j-1} \left(-q4B^2\right)^j$$

$$q^r = \mp B \frac{2^{t-2j-1+1+2j}}{2^t} \sum_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} \binom{t}{2j+1} A^{t-2j-1} \left(-qB^2\right)^j$$

$$q^r = \mp B \sum_{j=0}^{\frac{t-1}{2}} \binom{t}{2j+1} A^{t-2j-1} \left(-qB^2\right)^j$$

$$q^r = \mp B \cdot C$$

elde edilir.

Eğer $C = \mp 1$ ise o zaman $B = \mp q^r$ olur. Böylece (4.8) denkleminden,

$$\left(x + q^r \sqrt{-q}\right) = \mp \left(A + q^r \sqrt{-q}\right)^t \tag{4.10}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu denklemi sağlayan yegane t nin 1 olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $n \geq 1$ olmak üzere $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ rasyonel tamsayılarının

$$\left(A + q^r \sqrt{-q}\right)^n = u_n + v_n \sqrt{-q}$$

şeklinde oluşturulan dizisini tanımlayalım. $\{v_n\}$ dizisi aşağıdaki özelliklere sahiptir. $n \geq 1$ için;

$$v_1 = q_r \qquad v_2 = 2Aq_r \qquad v_{n+2} = 2Av_{n+1} - p^d v_n \qquad v_1 | v_n$$

Burada $V_n = v_n / v_1$ yazarsak o zaman,

$$V_1 = 1,\ V_2 = V = 2A \equiv a \equiv 0 \ (\text{mod } 4),\ \ V_{n+2} = VV_{n+1} - p^d V_n$$

elde edilir. Şimdi bulduğumuz bu V_n dizisini teoremimizin ispatında önemli bir araç olan aşağıdaki lemmada kullanalım.

Lemma 4.3. Eğer $n \geq 3$ tek, $2^s \| V, 2^k \| n-1$, $p \equiv 2^l - 1$ (mod 2^{l+1}) ve $2s - 2 \geq l$ ise o zaman $V_n \equiv 1 + 2^{k+l-1}$ (mod 2^{k+l}) olur. Özel olarak eğer $2(s-1) \geq l$ ise $n > 1$ için $V_n \neq \mp 1$ dir (Terai 1993).

Artık $V \equiv 0$ (mod 4) ve $p \equiv 1$ (mod 4) olduğundan $s \geq 2$ ve $\ell = 1$ elde ederiz ki, böylece $2(s-1) \geq \ell$ olup Lemma 4.3 den $n \geq 1$ için $V_n \neq \mp 1$ olduğu görülür.

Bu durumda (4.10) denklemini sağlayan yegane t değerinin 1 olduğu görülür. *n=dt* olduğundan, *n=d* elde ederiz ki bu *n* nin $n \geq 3$ ve tek oluşu *d*=1 veya çift oluşu ile çelişir. Bu da bize $C \neq \mp 1$ i verir.

Eğer $C \neq \mp 1$ ise $C \equiv 0$ (mod *q*) olur. Böylece $C \equiv t.a^{t-1}$ (mod *q*) ve $a \not\equiv 0$ (mod *q*) olduğundan $t \equiv 0$ (mod *q*) olup buradan $t = qc$ biçiminde yazılır. Böylece (4.10) denkleminden

$$\left(x + q^r \sqrt{-q}\right) = \mp\left(u + v\sqrt{-q}\right)^q \qquad (4.11)$$

ve sonuçta bazı u, v, w tamsayıları için

$$q^r = \mp qv\left(u^{q-1} + qw\right)$$

bulunur. $u \not\equiv 0$ (mod *q*) olduğundan $q^r = \mp qv$ ve böylece $v = \mp q^{r-1}$ olur. Buradan (4.6) ve (4.11) yardımıyla

$$\left(u^2 + q^{2r-1}\right)^q = x^2 + q^{2r+1} = p^n = p^{dt} = p^{qdc}$$

elde edilir ki, bu da bize $x^2 + q^{2r-1} = p^{dc}$ olmasını gerektirir. Bu da Lemma 4.2 nin ispatını tamamlar.

Sonuç 4.3. *p* ve *q* asalları Sonuç 4.1 ve Sonuç 4.2 deki gibi asallar olsun. Eğer *m* tek ise $x^2 + q^m = p^n$ denkleminin hiç (*x, m, n*) pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Tahmin 4.2 de $\left(a, B, y^2\right)$ sıralı üçlüsünün bir Pisagor üçlüsü olduğunu ve Pisagor üçlülerinin *ebob* $\left(a, B, y^2\right) = 1$ ve $2|a$ özelliklerini gerçeklediğini dikkate alarak $a^2 + B^2 = y^4$ denklemini $y^2 = Y$ olmak üzere $a^2 + B^2 = Y^2$ şeklinde yazabileceğimizi söyleyebiliriz. O halde

$$x^2 + B^m = y^n$$

denklemimiz $y^2 = Y$ ve $n = 2k$ olmak üzere

$$x^2 + B^m = y^{2k} = Y^k$$

şekline dönüşür. Burada n nin çift olacağı açıktır. O halde son olarak $x^2 + B^m = Y^k$ denkleminde, m nin çift ve k nın $k > 1$ ve tek olması durumunu inceleyelim. $B \equiv 1$ veya 3 (mod 4) olsun. Biz, A. Dujella ve Z. Franusic'den (2007) $d = -1$ in $d \equiv 3$ (mod 4) biçiminde ve $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ halkasında iki karenin farkı şeklinde temsil edilebilen yegane negatif tamsayı olduğunu biliyoruz. Buna göre, $B \equiv 1$ veya 3 (mod 4) durumunu gözönüne alabiliriz.

Önerme 4.4. *r* ve *s*; $ebob(r,\ s) = 1$, $r > s$ ve biri tek olan pozitif tamsayıları için $B = r^4 + s^4 - 6r^2s^2$ ve $Y = \left(r^2 + s^2\right)^2$ olduğunu varsayalım. Eğer *m* çift ve $k > 1$ ve tek ise,

$$x^2 + B^m = Y^k \tag{4.12}$$

denkleminin hiçbir pozitif (*x*, *m*, *k*) tamsayı çözümü yoktur.

İspat. Eğer $m = 2t$ ise o zaman (4.12) denkleminden,

$$\left(x + B^t i\right)\left(x - B^t i\right) = \left(2rs - \left(r^2 - s^2\right)i\right)^k \left(2rs + \left(r^2 - s^2\right)i\right)^k$$

elde ederiz. Asal çarpanlara ayrılışın tekliğinden,

$\left(x + B^t i,\ x - B^t i\right) = 1$, $\left(2rs - \left(r^2 - s^2\right)i\right)$ ve $\left(2rs + \left(r^2 - s^2\right)i\right)$, açık olarak $\mathbb{Q}(i)$ cisminde asal ideal olduklarından, $\varepsilon = \mp 1, \mp i$ olmak üzere

$$\varepsilon\left(x + B^t i\right) = \left(2rs + \left(r^2 - s^2\right)i\right)^k \tag{4.13}$$

elde ederiz.

Şimdi (4.13) denkleminin ve dolayısıyla (4.12) denkleminin tek *k* lar için imkansız olduğunu göstereceğiz. π, *B* nin bir rasyonel asal böleni olsun. Artık B yi

$$B = r^4 + s^4 - 6r^2s^2$$
$$B = \left(r^2 - s^2\right)^2 - \left(2rs\right)^2$$
$$B = \left(r^2 - s^2 - 2rs\right)\left(r^2 - s^2 + 2rs\right)$$
$$B = a^2 - b^2$$

şeklinde yazabildiğimizden $\pi \mid a^2 - b^2$ yani $\pi \mid a + b$ veya $\pi \mid a - b$ olur. Bu ise $\pi \mid r^2 - s^2 - 2rs$ veya $\pi \mid r^2 - s^2 + 2rs$ olmasını yani sırasıyla $r^2 - s^2 \equiv 2rs \pmod{\pi}$ veya $r^2 - s^2 \equiv -2rs \pmod{\pi}$ olmasını gerektirir. İlk durumun gerçeklendiğini varsayalım. (4.13) denkleminden

$$\varepsilon x = \left(2rs + 2rsi\right)^k \ \left(mod\, \pi\right)$$
$$\varepsilon x = \left(2rs\right)^k \left(1 + i\right)^k \left(mod\, \pi\right)$$

elde edilir. Tek k lar için $\left(1+i\right)^k = \left(2i\right)^{\frac{k-1}{2}} \left(1+i\right)$ olduğunu belirtelim. Ayrıca π, $4rs$ yi bölmediğinden, kongrüanslığın sağ tarafı sadece reel veya sadece sanal kısımlardan oluşamaz. Böylece (4.13) ve dolayısıyla (4.12) denklemlerinin tek k lar için sağlanması imkansızdır. İkinci durumda benzer şekilde gerçeklenir. Bu da Önerme 4.4 ün ispatını tamamlar.

Böylece, bu bölümün başında verdiğimiz Teorem 4.1 in ispatını tamamlamış olduk. Şimdi bu ispatı yaparken dikkatimizi çeken bir noktayı belirtelim.

Not 4.1. p ve q farklı asallar olmak üzere, $q^2 + 1 = 2p^2$ olmasının $p \equiv 1$ (mod 4) olmasını gerektirdiğine dikkat çekmeliyiz.

Not 4.2. Biz Tahmin 4.2 deki $B < 20.000$ ve $y < 157.000$ değerlerine kadar olan $B^2 + 1 = 2y^2$ eşitliğini sağlayan beş örnek bularak bunları aşağıda verdik. Bu durumlarda Tahmin 4.2 nin sağlandığını gösterdik. *

*Excel tablosuyla yapılan inceleme 400 sayfa olduğundan sadece bu $B^2 + 1 = 2y^2$ eşitliğini sağlayan örneklerin olduğu sayfalar aşağıya eklenmiştir.

B	**B^2**	**1**	**$(B^2+1)/2$**	$\sqrt{(B^2+1)/2} = y$
2	4	1	2,5	1,58113883
3	9	1	5	2,236067977
4	16	1	8,5	2,915475947
5	25	1	13	3,605551275
6	36	1	18,5	4,301162634
7	**49**	**1**	**25**	**5**
8	64	1	32,5	5,700877125
9	81	1	41	6,403124237
10	100	1	50,5	7,106335202
11	121	1	61	7,810249676
12	144	1	72,5	8,514693183
13	169	1	85	9,219544457
14	196	1	98,5	9,924716621
15	225	1	113	10,63014581
16	256	1	128,5	11,33578405
17	289	1	145	12,04159458
18	324	1	162,5	12,74754878
19	361	1	181	13,45362405
20	400	1	200,5	14,15980226
21	441	1	221	14,86606875
22	484	1	242,5	15,5724115
23	529	1	265	16,2788206
24	576	1	288,5	16,98528775
25	625	1	313	17,69180601
26	676	1	338,5	18,39836949
27	729	1	365	19,10497317
28	784	1	392,5	19,81161276
29	841	1	421	20,51828453
30	900	1	450,5	21,22498528
31	961	1	481	21,9317122
32	1024	1	512,5	22,63846285
33	1089	1	545	23,34523506
34	1156	1	578,5	24,05202694
35	1225	1	613	24,75883681
36	1296	1	648,5	25,46566316
37	1369	1	685	26,17250466
38	1444	1	722,5	26,87936011
39	1521	1	761	27,58622845
40	1600	1	800,5	28,2931087
41	**1681**	**1**	**841**	**29**
42	1764	1	882,5	29,70690156

200	40000	1	20000,5	141,423124
201	40401	1	20201	142,130222
202	40804	1	20402,5	142,8373201
203	41209	1	20605	143,5444182
204	41616	1	20808,5	144,2515165
205	42025	1	21013	144,9586148
206	42436	1	21218,5	145,6657132
207	42849	1	21425	146,3728117
208	43264	1	21632,5	147,0799103
209	43681	1	21841	147,7870089
210	44100	1	22050,5	148,4941076
211	44521	1	22261	149,2012064
212	44944	1	22472,5	149,9083053
213	45369	1	22685	150,6154043
214	45796	1	22898,5	151,3225033
215	46225	1	23113	152,0296024
216	46656	1	23328,5	152,7367015
217	47089	1	23545	153,4438008
218	47524	1	23762,5	154,1509001
219	47961	1	23981	154,8579995
220	48400	1	24200,5	155,5650989
221	48841	1	24421	156,2721984
222	49284	1	24642,5	156,979298
223	49729	1	24865	157,6863976
224	50176	1	25088,5	158,3934973
225	50625	1	25313	159,1005971
226	51076	1	25538,5	159,8076969
227	51529	1	25765	160,5147968
228	51984	1	25992,5	161,2218968
229	52441	1	26221	161,9289968
230	52900	1	26450,5	162,6360969
231	53361	1	26681	163,343197
232	53824	1	26912,5	164,0502972
233	54289	1	27145	164,7573974
234	54756	1	27378,5	165,4644977
235	55225	1	27613	166,1715981
236	55696	1	27848,5	166,8786985
237	56169	1	28085	167,5857989
238	56644	1	28322,5	168,2928994
239	**57121**	**1**	**28561**	**169**
240	57600	1	28800,5	169,7071006

1360	1849600	1	924800,5	961,6654824
1361	1852321	1	926161	962,372589
1362	1855044	1	927522,5	963,0796956
1363	1857769	1	928885	963,7868022
1364	1860496	1	930248,5	964,4939087
1365	1863225	1	931613	965,2010153
1366	1865956	1	932978,5	965,9081219
1367	1868689	1	934345	966,6152285
1368	1871424	1	935712,5	967,3223351
1369	1874161	1	937081	968,0294417
1370	1876900	1	938450,5	968,7365483
1371	1879641	1	939821	969,4436549
1372	1882384	1	941192,5	970,1507615
1373	1885129	1	942565	970,8578681
1374	1887876	1	943938,5	971,5649747
1375	1890625	1	945313	972,2720813
1376	1893376	1	946688,5	972,9791879
1377	1896129	1	948065	973,6862945
1378	1898884	1	949442,5	974,393401
1379	1901641	1	950821	975,1005076
1380	1904400	1	952200,5	975,8076142
1381	1907161	1	953581	976,5147208
1382	1909924	1	954962,5	977,2218274
1383	1912689	1	956345	977,928934
1384	1915456	1	957728,5	978,6360406
1385	1918225	1	959113	979,3431472
1386	1920996	1	960498,5	980,0502538
1387	1923769	1	961885	980,7573604
1388	1926544	1	963272,5	981,464467
1389	1929321	1	964661	982,1715736
1390	1932100	1	966050,5	982,8786802
1391	1934881	1	967441	983,5857868
1392	1937664	1	968832,5	984,2928934
1393	**1940449**	**1**	**970225**	**985**
1394	1943236	1	971618,5	985,7071066
1395	1946025	1	973013	986,4142132
1396	1948816	1	974408,5	987,1213198
1397	1951609	1	975805	987,8284264
1398	1954404	1	977202,5	988,535533
1399	1957201	1	978601	989,2426396

8101	65626201	1	32813101	5728,272078
8102	65642404	1	32821202,5	5728,979185
8103	65658609	1	32829305	5729,686292
8104	65674816	1	32837408,5	5730,393398
8105	65691025	1	32845513	5731,100505
8106	65707236	1	32853618,5	5731,807612
8107	65723449	1	32861725	5732,514719
8108	65739664	1	32869832,5	5733,221825
8109	65755881	1	32877941	5733,928932
8110	65772100	1	32886050,5	5734,636039
8111	65788321	1	32894161	5735,343146
8112	65804544	1	32902272,5	5736,050253
8113	65820769	1	32910385	5736,757359
8114	65836996	1	32918498,5	5737,464466
8115	65853225	1	32926613	5738,171573
8116	65869456	1	32934728,5	5738,87868
8117	65885689	1	32942845	5739,585786
8118	65901924	1	32950962,5	5740,292893
8119	**65918161**	**1**	**32959081**	**5741**
8120	65934400	1	32967200,5	5741,707107
8121	65950641	1	32975321	5742,414214
8122	65966884	1	32983442,5	5743,12132
8123	65983129	1	32991565	5743,828427
8124	65999376	1	32999688,5	5744,535534
8125	66015625	1	33007813	5745,242641
8126	66031876	1	33015938,5	5745,949747
8127	66048129	1	33024065	5746,656854
8128	66064384	1	33032192,5	5747,363961
8129	66080641	1	33040321	5748,071068
8130	66096900	1	33048450,5	5748,778175
8131	66113161	1	33056581	5749,485281
8132	66129424	1	33064712,5	5750,192388
8133	66145689	1	33072845	5750,899495
8134	66161956	1	33080978,5	5751,606602
8135	66178225	1	33089113	5752,313708
8136	66194496	1	33097248,5	5753,020815
8137	66210769	1	33105385	5753,727922
8138	66227044	1	33113522,5	5754,435029
8139	66243321	1	33121661	5755,142136
8140	66259600	1	33129800,5	5755,849242

Örnekler 4.1.

(a) $x^2+7^m=5^n$ (b) $x^2+41^m=29^n$

(c) $x^2+239^m=169^n$ (d) $x^2+1393^m=985^n$

(e) $x^2+8119^m=5741^n$

denklemlerinin pozitif tamsayı çözümleri sırasıyla (24,2,4), (840,2,4), (28560,2,4), (970224,2,4), (32959080,2,4) dır. Şimdi bunların nasıl gerçeklendiğini görelim.

(a), (b) $x^2+7^m=5^n$ ve $x^2+41^m=29^n$ denklemleri Teorem 4.1 i sağladığından n ve m nin değerleri teoreme bağlı olarak doğrudan söylenebilir.

(c) $x^2+239^m=169^n$ denklemini (mod 4) e göre düşünecek olursak m çift olur. O halde $x^2+239^m=13^{2n}$ denkleminden $2.13^n=239^m+1$ elde edilir ki, Lemma 3.2.2.3 den bu denklemin tek çözümünün $n=4$ ve $m=2$ olduğunu söyleyebiliriz.

(e) $x^2+8119^m=5741^n$ denklemini (mod 3) ve (mod 4) e göre düşünecek olursak m ve n nin çift olduğu açıktır. O halde $x^2+8119^m=5741^{2k}$ denkleminden $2.5741^k=8119^m+1$ olur ki Lemma 3.2.2.3 ve Lemma 3.2.2.4 e dayanarak bu denklemin tek çözümünün $k=2$ ve $m=2$ olduğunu söyleyebiliriz.

Not 4.3. Bütün örneklerin Tahmin 4.2 yi sağladığını söylemeliyiz. Teorem 4.1 i sağlayan, p ve q asallarını içeren örneklerin sadece (a) ve (b) de mevcut olduğunu belirtmeliyiz.

Böylece biz m ve n nin çift olması durumunda , $x^2+q^m=p^n$ denkleminin tamsayı çözümleri için bir genelleştirmeyi aşağıdaki gibi yapabiliriz.

Sonuç 4.5. $x^2+q^m=p^n$ Diophantine denkleminde $B=q\equiv 3$ veya 1 (mod 4) ve $y=p\equiv 1$ (mod 4) şeklinde asallar olsun. Böylece $k=1$ dışında k çift, $n\geq 1$ ve $n=2k$ için $x^2+q^m=p^n$ Diophantine denkleminin (x, m, n) pozitif tamsayı çözümleri;

Eğer $q^2+1=2p^k$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü varsa, $x^2+q^m=p^n$ denkleminin tek (*x*, *m*, *n*) pozitif tamsayı çözümleri $(x,m,n)=\left(\left(p^k-1\right),2,2k\right)$ ile verilir.

Lemma 3.2.2.3 e göre $q^2+1=2p^k$ denkleminin $k>2$ için tek (*q*, *p* ,*k*) pozitif tamsayı çözümünün (*q*, *p* ,*k*) = (239,13,4) olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $k>2$ için $x^2+q^2=p^8$ denkleminin dışında hiçbir $x^2+q^m=p^n$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü olmadığını da belirtmeliyiz.

5. $x^2 + q^m = p^n$ DIOPHANTINE DENKLEMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde, önceki bölümde verdiğimiz Tahmin 4.2 yi ve Terai Tahmininü sağlayan iki farklı durumu iki ayrı teorem olarak verip onların ispatını yapacağız.

4. Bölümde verdiğimiz Tahmin 4.2 de ele alınan $\left(a, B, y^2\right)$ sıralı üçlüsünün bir Pisagor üçlüsü olduğunu biliyoruz. Buna göre bu tür Pisagor üçlülerinin $ebob\left(a, B, y^2\right) = 1$ ve $2|a$ özelliklerini gerçeklediğini ve buna bağlı olarak da $a^2 + B^2 = y^4$ denklemimizin $a^2 + B^2 = \left(y^2\right)^2$ şeklinde yazabileceğimizden bahsetmiştik.

Teoremlerimizi ispatlayabilmek için bazı lemmalara ihtiyacımız vardır. Öncelikle onları verelim.

Lemma 5.1. $y^2 = Y$ olmak üzere $a^2 + B^2 = \left(y^2\right)^2 = Y^2$ Diophantine denkleminin $ebob\ (u,v) = 1,\ u > v,$ biri tek diğeri çift olmak üzere, pozitif tamsayı çözümleri;

$$a = 4uv\left(u^2 - v^2\right), \qquad B = \left(u^2 - v^2\right)^2 - \left(2uv\right)^2, \qquad y = u^2 + v^2$$

olup, $s > t > 0$, $\left(s,t\right) = 1$ ve $s \not\equiv t$ (mod 2) için,

$$a = 2st, \qquad B = s^2 - t^2, \qquad Y = y^2 = s^2 + t^2$$

ile verilir.

Not 5.1. $y \equiv 5$ (mod 8) olmasının $y^2 \equiv Y \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, 8\right)$ olmasını gerektirdiğini belirtelim.

Lemma 5.2. Eğer $Y \equiv 1$ (mod 8) ise $\left({}^{*}/_{*}\right)$ Jacobi Sembolü olmak üzere

$$\left(\frac{B}{Y}\right) = \left(\frac{Y}{B}\right) = 1$$

olur.

İspat. $y^2 = Y$ olması ve Jacobi Sembolünün özelliklerinden açıktır.

Not 5.2. (4.2) denklemimiz $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$x^2 + B^m = (y^2)^k \equiv Y^k$$

şekline dönüşür. Bu şartlar altında k nın tek olamayacağını 4. Bölümde gösterdik. k>1 ve çift olmak üzere n=2k olduğundan n nin her zaman çift olması gerekmektedir.

Fadwa S. Abu Muriefah ve S. A. Arif'in (2001), makalelerinden '$x^2 + b^{2t} = q^n$ denkleminin m=2t için m çift t tek olduğundaki tek çözümünün n=4 olması durumunda mümkündür.' teoremine dayanarak m ve n nin her ikisinide çift ve $2|m$ ve $4|n$ olması gerektiğini söyleyebiliriz.

Teorem 5.1. Eğer B bir asalın kuvveti ve $y \equiv 5$ (mod 8) dolayısıyla $y^2 = Y \equiv 1$(mod 8) ise o zaman Terai Tahmini sağlanır.

İspat. (x, m, n) çözümünün (4.2) denkleminin çözümü olduğunu varsayalım. Not 5.2. den m ve n nin çift olduğunu biliyoruz. m_1 ve n_1 pozitif tamsayılar olmak üzere $m = 2m_1$, $n = 4n_1$ yazalım. O halde (4.2) denklemi

$$x^2 + B^{2m_1} = y^{4n_1} \tag{5.1}$$

veya $ebob\left(a, B, y^2\right) = 1$, $2|a$ ve $y^2 = Y$ olduğundan,

$$x^2 + B^{2m_1} = Y^{2n_1} \tag{5.2}$$

şekline gelir.

Lemma 5.1. den $s > t > 0$, $ebob\left(s,t\right)=1$ ve $s \not\equiv t$ (mod 2) olmak üzere

$$x = 2st, \qquad B^{m_1} = s^2 - t^2, \qquad Y^{n_1} = s^2 + t^2 \tag{5.3}$$

olduğunu biliyoruz. (5.3) den $B^{m_1} = s^2 - t^2$ idi. B bir asalın kuvveti olduğundan $ebob\left(s-t, s+t\right)=1$ olur. Böylece

$$s - t = 1 \qquad s + t = B^{m_1} \tag{5.4}$$

olur ki, buradan *s* ve *t* yi çözersek

$$s = \left(\frac{B^{m_1}+1}{2}\right), \qquad t = \left(\frac{B^{m_1}-1}{2}\right)$$

elde edilir. (5.3) den $Y^{n_1} = s^2 + t^2$ olduğunu biliyoruz. *s* ve *t* değerlerini yerlerine yazarsak, $Y > B > 1$ olmak üzere

$$2Y^{n_1} = B^{2m_1} + 1 \tag{5.5}$$

elde edilir.

Eğer $n_1 = 2$ ise Lemma 3.2.2.2 den (5.5) denklemi bize $m_1 = 2^e$, $e \geq 0$ ı verir. Burada iki durumu inceleyeceğiz.

$e = 0$ olursa $2Y^2 = B^2 + 1$ elde edilir. *Y*>*B* olduğundan bu bir çelişkidir.

e>0 olursa; (5.5) denklemi bize *Y*>*B*>1 olmak üzere $2Y^2 = \left(B^{\frac{m_1}{2}}\right)^4 + 1$ i verir ki, tek çözümü $Y = B = 1$ olduğundan imkansızdır (Mordell 1969).

Eğer $n_1 > 2$ ise genelliği kaybetmeden $4|n_1$ veya *Y* bir tek olmak üzere $Y|n_1$ olduğunu varsayabiliriz. Lemma 3.2.2.4 den $Y|n_1$ olması durumunda (5.5) denkleminin çözümünün olması imkansızdır.

$4|n_1$ ise, (5.5) denkleminden $2Y^4 = B^{2m_1} + 1$ elde edilir ki, Lemma 3.2.2.3 den bu denklemin tek pozitif tamsayı çözümünün $\left(B, Y, m_1\right) = \left(239, 13, 1\right)$ olduğunu biliyoruz. Fakat bu da *Y*>*B*>1 kabulümüzle çelişir.

Eğer $n_1 = 1$ ise (5.5) denkleminden $2Y = B^{2m_1} + 1$ i elde ederiz.

Diğer taraftan B bir asalın kuvveti olduğundan; $a^2 + B^2 = Y^2$ denklemini düşünecek olursak, $ebob\left(a, B, Y\right) = 1$ ve $2 \mid a$ olup biz bu denklemi

$$Y - a = 1$$
$$Y + a = B^2$$

şeklinde yazabiliriz. Taraf tarafa işleme tabi tutarsak $2Y = B^2 + 1$ elde ederiz. $2Y = B^{2m_1} + 1 = B^2 + 1$ olup $m_1 = 1$ bulunur ki, bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 5.1. Bulduğumuz $m_1 = 1$ ve $n_1 = 1$ değerlerini (5.2) ve (5.1) denklemlerinde yerine yazarsak (5.2) denklemi bize az önce ispatını yaptığımız gibi Terai Tahmininin, (5.1) denklemi ise Tahmin 4.2 nin sağlandığını gösterir.

Teorem 5.2. Eğer $y \equiv 5$ (mod 8) bir asalın kuvveti şeklinde ise Tahmin 4.2 sağlanır.

İspat. (x, m, n) nin (4.2) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım. Not 5.2 den m ve n nin çift olduğunu biliyoruz. m_2 ve n_2 pozitif tamsayılar olmak üzere $m = 2m_2$, $n = 2n_2$ yazalım. O halde (4.2) denklemi bizi

$$x^2 + B^{2m_2} = y^{2n_2}$$

denklemine götürür.

Lemma 5.1 den $ebob\,(u, v) = 1,\ u > v,$ biri tek diğeri çift olmak üzere ve $(k, l) = 1,\ k > l > 0,\ k \not\equiv l (\mathrm{mod}\, 2)$ için

$$x = 4uv(u^2 - v^2) = 2kl, \qquad B^{m_2} = \left(\left(u^2 - v^2\right)^2 - \left(2uv\right)^2\right)^{m_2} = k^2 - l^2,$$
$$y^{n_2} = \left(u^2 + v^2\right)^{n_2} = k^2 + l^2,$$

elde edilir. $\left(\left(u^2 - v^2\right)^2 - \left(2uv\right)^2\right)^{m_2} = k^2 - l^2$ olduğundan, A_1 ve A_2 , $ebob\left(A_1, A_2\right) = 1$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere

$$k - l = A_1^{m_2}$$
$$k + l = A_2^{m_2}$$

$$\left(u^2-v^2\right)^2-\left(2uv\right)^2=A_1A_2$$

olur. Bu ilk iki eşitlikten *k* ve *l* çözülürse

$$k=\frac{A_1^{m_2}+A_2^{m_2}}{2}, \qquad l=\frac{A_1^{m_2}-A_2^{m_2}}{2}$$

elde edilir.

Bunları $\left(u^2+v^2\right)^{n_2}=k^2+l^2$ eşitliğinde yerine yazarsak $ebob\left(A_1,A_2\right)=1$ olmak üzere

$$2\left(u^2+v^2\right)^{n_2}=A_1^{2m_2}+A_2^{2m_2} \tag{5.7}$$

elde edilir.

Şimdi, (5.7) denkleminde $2|n_2$ olduğunu göz önüne alalım. $\left(u^2+v^2\right)^{n_2}\equiv 5$ (mod 8) olduğundan $A_1^{2m_2}+A_2^{2m_2}\equiv 10$ (mod 16) elde edilir. Ayrıca $y=u^2+v^2\equiv 5$ (mod 8) olduğundan $A_1A_2=\left(u^2-v^2\right)^2-\left(2uv\right)^2\equiv\mp 1$ (mod 8) olur.

Eğer $2|m_2$ ise, $B_1^{2m_2}+B_2^{2m_2}\equiv 2$ (mod 16) olur ki, bu bir çelişkidir.

Eğer $2|m_2$ ise (*x*,*y*)=1 olmak üzere (5.7) denklemi bize $2z=x^4+y^4$ denklemini verir ki, tek pozitif tamsayı çözümü $z=\left(u^2+v^2\right)^{n_2}>1$ olup imkansızdır (Mordell 1969).

(5.7) denkleminde bu defa $2|n_2$ olduğunu göz önüne alalım. $\left(u^2+v^2\right)^{n_2}\equiv 1$ (mod 8) olduğundan $A_1^{2m_2}+A_2^{2m_2}\equiv 2$ (mod 16) olur ki, bu da bize $2|m_2$ olmasını gerektirir.

Böylece (5.7) denkleminin $2|n_2$ ve $2|m_2$ durumunda sağlandığını söyleyebiliriz.

$2|m_2$ olması durumunda ya $m_2>1$ yada $m_2=1$ olacaktır.

Eğer $m_2>1$ ise, *r* tek asal ve $r|m_2$ dir. (5.7) denkleminden;

$$\left(u^2+v^2\right)^{n_2}=\frac{\left(A_1^{\frac{2m_2}{r}}\right)^r+\left(A_2^{\frac{2m_2}{r}}\right)^r}{2}=\frac{A_1^{\frac{2m_2}{r}}+A_2^{\frac{2m_2}{r}}}{2}\cdot\frac{\left(A_1^{\frac{2m_2}{r}}\right)^r+\left(A_2^{\frac{2m_2}{r}}\right)^r}{A_1^{2m_2/r}+A_2^{2m_2/r}}$$

olur. $y=u^2+v^2$ bir asalın kuvveti olduğundan

$$\left(\frac{A_1^{2m_2/r}+A_2^{2m_2/r}}{2},\frac{\left(A_1^{2m_2/r}\right)^r+\left(A_2^{2m_2/r}\right)^r}{A_1^{2m_2/r}+A_2^{2m_2/r}}\right)=1 \text{ veya } r$$

dir.

Eğer u^2+v^2, r nin bir kuvveti ise $r\left\|\frac{\left(A_1^{2m_2/r}\right)^r+\left(A_2^{2m_2/r}\right)^r}{A_1^{2m_2/r}+A_2^{2m_2/r}}\right.$

olur ki, buradan $\frac{A_1^{2m_2/r}+A_2^{2m_2/r}}{2}=1$ olması imkansızdır.

Eğer $m_2=1$ ise, o halde $n_2=2$ olduğunu göstermeliyiz. $ebob\left(A_1,A_2\right)=1$ $A_1,A_2>1$ ise;

$$u^{2n_2}<2\left(u^2+v^2\right)^{n_2}=A_1^2+A_2^2\le A_1^2A_2^2=\left(\left(u^2-v^2\right)^2-\left(2uv\right)^2\right)^2<u^5$$

elde edilir. $2|n_2$ olduğundan $n_2=2$ olur. A_1 veya $A_2=1$ olursa, ki bu y nin tek asal olması durumunda gerçekleniyor.

$$u^{2n_2}<2\left(u^2+v^2\right)^{n_2}\le\left(\left(u^2-v^2\right)^2-\left(2uv\right)^2\right)^2+1<u^5$$

olup $2|n_2$ olduğundan bu durumda da $n_2=2$ olur. Bu da Teorem 5.2 yi ispatlar (Çenberci ve Şenay 2008).

Öneriler Literatürden de görüleceği gibi ikinci dereceden, iki veya daha fazla bilinmeyenli Diophantine denklemlerinin farklı biçimlerinin çözümlerinin bulunması problemi değişik yöntemlerle ele alınarak incelenebilir. Ayrıca $q^2+1=2p^k$ koşulu değiştirilerek, bunun dışındaki durumlarda çözümün olup olmadığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] ABU MURİEFAH, F.S. and ARİF, S.A. 1999 The Diophantine Equation $x^2+5^{2k+1}=y^n$. Indian J.Pure Appl. Math. 30 (3): 229-231.

[2] ABU MURİEFAH, F.S. 2000 On The Diophantine Equation $px^2+3^n=y^p$. Tamkang Journal of Mathematics Vol.31 No.1: 79-84.

[3] ABU MURİEFAH, F.S. 2001 On The Diophantine Equation $Ax^2+2^{2m}=y^n$. IJMMS 25 6: 373-381.

[4] ABU MURİEFAH, F.S. and ARİF, S.A. 2001 The Diophantine Equation $x^2+q^{2k}=y^p$. Arab. J.Sci.Eng.Section A 26: 53-62.

[5] ABU MURİEFAH, F.S. 2006 On The Diophantine Equation $x^2+5^{2k}=y^n$. Demonstratio Mathematica, Vol. XXXIX No.2: 286-289.

[6] ABU MURİEFAH, F.S., LUCA, F., SIKSEK, S. and TENGELY, SZ. 2007 On The Diophantine Equation $x^2+C=2y^n$. International Journal of Number Theory Vol.3 Issue 3: 1-11.

[7] ABU MURİEFAH, F.S. 2008 On The Diophantine Equation $px^2+q^{2m}=y^p$. Journal of Number Theory 128: 1670-1675.

[8] ABU MURİEFAH, F.S., LUCA, F. and TOGBE, A. 2008 On The Diophantine Equation $x^2+5^a13^b=y^n$. Glasgow Math. Journal 50: 175-181.

[9] ALTER, R. and KUBATO, K.K. 1973 The Diophantine Equation $x^2+D=p^n$. Pacific Journal Mathematics Vol.46 No.1: 11-16.

[10] ALTER, R. and KUBATO, K.K. 1975 The Diophantine Equation $x^2+11=3^n$ and Related Sequence. Journal of Number Theory 7: 5-10.

[11] ARİF, S.A. and ABU MURİEFAH, F.S. 1998 The Diophantine Equation $x^2+3^m=y^n$. Inter. J. Math. & Math. Sci. Vol.21 No.3: 619-620.

[12] ALTINDİŞ, H. 2005. Sayılar Teorisi ve Uygulamaları, Lazer Ofset, Ankara.

[13] ARİF, S.A. and ABU MURİEFAH, F.S. 2002 On The Diophantine Equation $x^2 + q^{2k+1} = y^p$. Journal of Number Theory 95: 95-100.

[14] ARİF, S.A. and AL-ALİ, A.S. 2002 On The Diophantine Equation $x^2 + q^{2k+1} = 4y^n$. IJMMS 31. 11: 695-699.

[15] ARİF, S.A. and AL-ALİ, A.S. 2002 On The Diophantine Equation $ax^2 + b^m = 4y^n$. Acta Arithmetica 103 (4): 343-345.

[16] BİLU, Y., HANROT, G and VOUTIER, P.M. 2001 Existence of Primitive Divisors of Lucas and Lehmer numbers. Journal Reine Angew Math. 539 : 75-122.

[17] BİLU, Y. 2002 On Le's and Bugeaud's Papers about the Equation $ax^2 + b^{2m-1} = 4c^p$. Monatsh Math. 137: 1-3.

[18] BLASS, J. 1974 On The Diophantine Equation $y^2 + K = x^5$. Bulletin of The American Mathematical Society Vol. 80 No.2: 329.

[19] BROWN, E. 1975 Diophantine Equations of The Form $x^2 + D = y^n$. J.Reine Angew Math. 274/275: 385-389.

[20] BROWN, E. 1977 Diophantine Equations of The Form $ax^2 + Db^2 = y^p$. J.Reine Angew Math. 274/275: 385-389.

[21] BUGEAUD, Y. 1997 On The Diophantine Equation $x^2 - p^m = \mp y^n$. Acta Arithmetica LXXX.3: 213-223.

[22] BUGEAUD, Y. 2001 On Some Exponential Diophantine Equations. Monatsh Math. 132: 93-97.

[23] BUGEAUD, Y., MIGNOTTE, M. and SIKSEK, S. 2006 Classical and Modular Approches to Exponential Diophantine Equations II, The Lebesque – Nagell Equation. Compositio Math. 142: 31-62.

[24] CAO, Z. 1986 On The Diophantine Equation $x^{2n} - Dy^2 = 1$. Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1): 11-16.

[25] CAO, Z. and DONG, X. 1998 On Terai's Conjecture. Proc. Japon Acad. 74 Ser. A: 127-129.

[26] CAO, Z. 1999 A Note On The Diophantine Equation $a^x + b^y = c^z$. Acta Arithmetica XCI.1: 85-93.

[27] CAO, Z. 2000 On The Diophantine Equation $x^p + 2^{2m} = py^2$. Proceeding of The American Math. Soc. Vol. 128 Number 7: 1927-1931.

[28] CAO, Z. and DONG, X. 2001 The Diophantine Equation $x^2 + b^y = c^z$. Proc. Japan Acad. 77 Ser A: 1-4.

[29] CAO, Z., DONG, X. and Lİ, Z. 2002 A New Conjecture Concerning The Diophantine Equation $x^2 + b^y = c^z$. Proc. Japan Acad. 78 Ser A: 199-202.

[30] CAO, Z. and DONG, X. 2003 An Application of a Lower Bound for Linear Forms in Two Logarithms to The Terai – Jesmanowicz Conjecture. Acta Arithmetica 110-2: 153-164.

[31] CHEN, X. and LE, M. 1998 A Note On Terai's Conjecture Concerning Pythagorean Numbers. Proc. Japan Acad. 74 Ser A: 80-81.

[32] COHN, H. 1962. Advanced Number Theory, Dover Publications, Inc. New York.

[33] COHN, J.H.E. 1966 Eight Diophantine Equations. Proc. London Math. Soc. (3) 16: 153-166.

[34] COHN, J.H.E. 1992 The Diophantine Equation $x^2 + 19 = y^n$. Acta Arithmetica LXI.2: 193-197.

[35] COHN, J.H.E. 1992 The Diophantine Equation $x^2 + 2^k = y^n$. Arch. Math. Vol. 59: 341-344.

[36] COHN, J.H.E. 1993 The Diophantine Equation $x^2 + C = y^n$. Acta Arithmetica LXV.4: 367-381.

[37] COHN, J.H.E. 1997 The Diophantine Equation $x^4 - Dy^2 = 1$. Acta Arithmetica 78: 401-403.

[38] COHN, J.H.E. 2002 The Diophantine Equation $x^p + 1 = py^2$. Proceeding of The American Mathematical Society Vol.131 Number 1: 13-15.

[39] COHN, J.H.E. 2003 The Diophantine Equation $x^n = Dy^2 + 1$. Acta Arithmetica 106.1: 73-83.

[40] COHN, J.H.E. 2003 The Diophantine Equation $x^2 + C = y^n$. Acta Arithmetica 109.2: 205-207.

[41] ÇENBERCİ, İ.S. ve ŞENAY H. 2008. $x^2 + q^m = p^n$ Diophantine Denklemi. Sayfa No.45, XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu. Koç Üniversitesi. Eylül 1-4.

[42] DEMIRPOLAT E. ÇENBERCİ, İ.S. ve ŞENAY H. 2009 The Diophantine Equation $x^2 + 11^{2k+1} = y^n$. International Math.Forum 4 No.6: 277-280.

[43] DICKSON, L.E. 1971. History of Theory of Numbers, Vol. II, Diophantine Analysis, Chelsea Publishing Company, New York.

[44] DUJELLA, A. and FRANUSIC Z. 2007 On Differences of Two Squares In Some Quadratic Fields. Rocky Mountain Journal of Mathematics Vol.37 No.2 : 429-453.

[45] DUVERNEY, D. 1998. Theorie des Nombers, Dunod, Paris.

[46] EULEUR, L. 1965. Algebra, Vol.2.

[47] GUO, Y. and LE, M. 1995 A Note on Jesmanowicz Conjecture Concerning Pythagorean Numbers. Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli Vol.44 No.2: 225-228.

[48] HECKE, E. 1981. Lectures on the Theory of Algebraic Numbers, Springer Verlag.

[49] İÇEN, O. 1962. Denklemlerin Tamsayılarla Çözülmesi (Diofant Denklemleri), İstanbul.

[50] IRELAND, K. and ROSEN, M. 1990. A Classical Introduction to Modern Number Theory,Springer.

[51] JESMANOWICZ, L. 1956 Kilka Ulwag olicabach Pitagorejskich. (Some Remarks on Phythagorean Numbers) Wiadom Math. 1: 196-202.

[52] LANDAU, E. and OSTROWSKI, A. 1920 On The Diophantine Equation $ay^2 + by + c = dx^n$. L'Intermediaire des Mathematiciens, t.8 February 12th : 276-280.

[53] LANG, S. 1970. Algebraic Number Theory, Addison Wesley, Reading Massachusetts.

[54] LE, M. 1989 The Diophantine Equation $x^2 + D^m = p^n$. Acta Arihtmetica LII: 255-261.

[55] LE, M. 1989 A Note On The Diophantine Equation $x^{2p} - Dy^2 = 1$. Proceedings of The American Mathematical Society Vol.127 Number 1: 27-34.

[56] LE, M. 1993 On The Number of Solutions of The Diophantine Equation $x^2 + D = p^n$. C.R. Acad. Sci. Paris.t. 317 Serie I p: 135-138.

[57] LE, M. 1993 On The Diophantine Equation $D_1x^2 + D_2 = 2^{n+2}$. Acta Arithmetica LXIV. 1: 29-41.

[58] LE, M. 1993 A Note On The Diophantine Equation $x^2 + 4D = y^p$. Monatshefte Für Mathematik 116: 283-285.

[59] LE, M. 1993 On The Diophantine Equation $d_1x^2 + 2^{2m}d_2 = y^n$ and $d_1x^2 + d_2 = 4y^n$. Proceedings of The American Mathmetical Society Vol.118 No.1: 67-70.

[60] LE, M. 1994 The Diophantine Equation $x^2 + D^m = 2^{n+2}$. Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli Vol 43 No.2: 127-133.

[61] LE, M. 1995 A Note On The Diophantine Equation $x^2 + b^y = c^z$. Acta Arihmetica LXXI.3: 253-257.

[62] LE, M. 1995 On The Diophantine Equation $2^n + px^2 = y$. Proceedings of The American Mathematical Society Vol.123 No.2: 321-326.

[63] LE, M. 1995 On The Diophantine Equation $D_1x^2 + D_2{}^m = 4y^n$. Mh. Math. 120: 121-125.

[64] LE, M. 1996 On Jesmanowicz Conjecture Concerning Pythagorean Numbers. Proc. Japan Acad. 72 Ser A: 97-98.

[65] LE, M. 1997 A Note On The Diophantine Equation $\left(m^3 - 3m\right)^x + \left(3m^2 - 1\right)^y = \left(m^2 + 1\right)^z$. Proc. Japan Acad. 73 Ser. A: 148-149.

[66] LE, M. 1997 A Note On The Diophantine Equation $x^2 + 7 = y^n$. Glasgow Math. Journal 39: 59-63

[67] LE, M. 1999 On The Diophantine Equation $\left(x^3-1\right)/\left(x-1\right)=\left(y^n-1\right)/\left(y-1\right)$. Transactions of The American Mathematical Society Vol 351 Number 3: 1063-1074.

[68] LE, M. 1999 An Upper Bound For The Number of Solutions of The Exponential Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$. Proc. Japan Acad. 75 Ser. A: 90-91.

[69] LE, M. 2001 On Terai's Conjecture Concerning Pythagorean Numbers. Acta Arithmetica C.1: 41-45.

[70] LE, M. 2002 On Cohn's Conjecture Concerning The Diophantine Equation $x^2+2^m=y^n$. Arch. Math. 78: 26-35.

[71] LE, M. 2003 A Conjecture Concerning The Exponential Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$. Acta Arithmetica 106.4: 345-353.

[72] LE, M. 2004 A Note On The Exponential Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$. Proc. Japan Acad. 80 Ser. A: 21-23.

[73] LE, M. 2005 A Conjecture Concerning The Pure Exponential Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$. Acta Mathematica Sinica, English Series Aug. Vol 21 No.4: 943-948.

[74] LE, M. 2006 A Note On The Diophantine Equation $x^2+b^y=c^z$. Czechoslovak Mathematical Journal 56 (131): 1109-1116.

[75] LEBESQUE, V.A. 1850 Sur l'impossibilite en nombres entiers, de l'equations $x^m=y^2+1$. Nouv. Ann. Math. 9 9 : 178-181.

[76] LEWIS, D.J. 1961 Two classes of Diophantine Equations, Pacific Journal Math.11 : 1063-1076.

[77] LJUNGGREN, W. 1942 Zur Theorie der Gleichung $x^2+1=Dy^4$. Avh. Norske Vid. Akad Oslo 5: 1-27.

[78] LJUNGGREN, W. 1944 On The Diophantine Equation $x^2+D=y^n$. Norske Selsk. Forh. Trondheim 16, No.23: 93—96.

[79] LJUNGGREN, W. 1945 On a Diophantine Equation. Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim 18 No.32 : 125-128

[80] LJUNGGREN, W. 1963 On The Diophantine Equation $y^2 - k = x^3$. Acta Arithmetica VIII: 451-463.

[81] LJUNGGREN, W. 1964 On The Diophantine Equation $Cx^2 + D = y^n$. Pacific Journal Math. 14: 585-596.

[82] LJUNGGREN, W. 1966 On The Diophantine Equation $Cx^2 + D = 2y^n$. Math. Scand. 18: 69-86.

[83] LJUNGGREN, W. 1971 On The Diophantine Equation $x^2 + D = 4y^q$. Monatshefte für Mathematik 75: 136-143.

[84] LJUNGGREN, W. 1972 New Theorems Concerning The Diophantine Equation $x^2 + D = 4y^q$. Acta Arithmetica XXI: 183-191.

[85] LUCA, F. 2000 On a Diophantine Equation. Bulletin Austral. Math. Soc. 61 (2): 241-246.

[86] LUCA, F. 2002 On The Equation $x^2 + 2^a 3^b = y^n$. Int. Journal Math & Math. Sci. 29 (4): 239-244.

[87] MIGNOTTE, M. and DE WEGER, B.M.M. 1996 On The Diophantine Equations $x^2 + 74 = y^5$ and $x^2 + 86 = y^5$. Glasgow Math. Journal 38: 77-85.

[88] MIGNOTTE, M. 1997 On The Diophantine Equation $D_1 x^2 + D_2{}^m = 4y^n$. Portugaliae Mathematica Vol.54 Fos.4: 457-460.

[89] MORDELL, L.J. 1969. Diophantine Equations, Academic Press INC. (London) LTD.

[90] NAGELL, T. 1948 The Diophantine Equations $x^2 + 7 = 2^n$. Norsk Math. Tidsskr. 30: 62-64.

[91] NAGELL, T. 1955 Contributions To The Theory of a Category of Diophantine Equations of The Second Degree With Two Unknowns. Nova Acta Reg Soc. Upsal. IV Ser 16: 1-38.

[92] NAGELL, T. 1955 On The Diophantine Equations $x^2 + 8D = y^n$. Ark. Math. 3: 103-112.

[93] RABINOWITZ, S. 1978 The solution of $y^2 \pm 2^n = x^3$. Proc. Amer. Math. Soc. 62 : 1-6.

[94] RAMANUJAN, S. 1927 Collected Papers Cambridge , 327.

[95] RUBIN, F. 1998 Integer Solutions to $x^a + y^b = c^z$. J. Recreational Mathematics Vol 29 (1): 25-27.

[96] SCOTT, R. 1993 On The Equations $p^x - b^y = c$ and $a^x + b^y = c^z$. Journal of Number Theory 44: 153-165.

[97] ŞENAY, H. 2007. Sayılar Teorisi Dersleri (Cebirsel Sayılara Giriş ile), Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya.

[98]SİERPİNSKİ, W. 1956 O rowmaniv $3^x + 4^y = 5^z$ (On The Equation $3^x + 4^y = 5^z$). Wiadom. Math. 1: 194-195.

[99] SİERPİNSKİ, W. 1988.Elementary Theory of Numbers PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa.

[100] SIKSEK, S. 2002 On The Diophantine Equation $x^2 = y^p + 2^k z^p$. Journal de theorie des nombres de Bordeaux 15 No.3 : 839-846.

[101] SIKSEK, S. and CREMONA, J.E. 2003 On The Diophantine Equation $x^2 + 7 = y^m$. Acta Arithmetica 109.2: 143-149.

[102] SKOLEM, T.H., CHOWLA, S. and LEWIS, J. 1959 The Diophantine Equation $2^{n+2} - 7 = x^2$ and Related Problems. Proc. Amer. Math. Soc. 10 : 663-669.

[103] STÖRMER, C. 1899 Solution Complete En Nombers Entiers de l'equation marctan $\frac{1}{x} +$ narctan $\frac{1}{y} = k \cdot \frac{\pi}{4}$. Bulletin de la S.M.F. tome 27: 160-170.

[104] SURY, B. 2000 On The Diophantine Equation $x^2 + 2 = y^n$. Arch. Math. 74: 350-355.

[105] TAKAKUWA, K. and ASAEDA, Y. 1993 On a Conjecture On Pythagorean Numbers. Proc. Japan Acad. 69 Ser. A: 252-255.

[106] TAKAKUWA, K. 1993 On A Conjecture On Pythagorean Numbers III. Proc. Japan Acad. 69 Ser. A: 345-349.

[107] TAKAKUWA, K. And ASAEDA, Y. 1993 On a Conjecture on Pythagorean Numbers II. Proc. Japan Acad. 69 Ser. A: 287-290.

[108] TAKAKUWA, K. 1996 A Remark On Jesmanowicz Conjecture, Proc. Japan Acad, 72 Ser. A: 109-110.

[109] TALL, D. and STEWART, I. 1987. Algebraic Number Theory, London, New York.

[110] TANANASHI, K. 1977 On The Diophantine Equations $x^2+7^m=2^n$ and $x^2+11^m=3^n$. Journal Predent Fac. Gifu Coll. Dent. No.3: 77-79.

[111] TENGELY, SZ. 2004 On The Diophantine Equation $x^2+a^2=2y^p$. Indiag Mathem. N.S. 15 (2) : 291-304.

[112] TENGELY, SZ. 2007 On The Diophantine Equation $x^2+q^{2m}=2y^p$. Acta Arithmetica 127 No.1: 71-86.

[113] TERAİ, N. 1993 The Diophantine Equation $x^2+q^m=p^n$. Acta Arithmetica LXIII.4: 351-358.

[114] TERAİ, N. 1994 The Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$. Proc. Japan Acad. 70 Ser. A: 22-26.

[115] TERAİ, N. 1995 The Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$ II. Proc. Japan Acad. 71 Ser. A: 109-110.

[116] TERAİ, N. 1996 The Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$ III. Proc. Japan Acad. 72 Ser. A: 20-22.

[117] TERAİ, N. And TAKAKUWA, K. 1997 A Note On The Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$. Proc. Japan Acad. 73 Ser. A: 161-164.

[118] TERAİ, N. 2001 On The Exponential Diophantine Equation $a^x+b^y=c^z$. Proc. Japan Acad. 77 Ser. A No.9: 151-154.

[119] TOYOİZUMİ, M. 1978 On The Diophantine Equation $y^2+D^m=2^n$. Comment Math. Univ. St. Pauli XXVII-2: 105-111.

[120] TOYOİZUMİ, M. 1983 On The Diophantine Equation $y^2 + D^m = p^n$. Acta Arithmetica XLII: 303-309.

[121] VOUTIER, P.M. 1995 Primitive Divisors of Lucas and Lehmer Sequences. Mathematics of Computation Volume 64 Number 210: 869-888.

[122] YUAN, P and WANG, J. 1998 On The Diophantine Equation $x^2 + b^y = c^z$. Acta Arithmetica LXXXIV.2: 145-147.

[123] YUAN, P. 2005 On The Diophantine Equation $ax^2 + by^2 = ck^n$. Indiag. Mathem, N.S. 16 (2): 301-320.