T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**k-Fibonacci Dizilerinin Uygulamaları**

Hülya KAYABAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI
KONYA, 2006

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**k-Fibonacci Dizilerinin Uygulamaları**

Hülya KAYABAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

Bu tez 07.07.2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yard.Doç.Dr. Süleyman SOLAK
Danışman

Yard.Doç.Dr. Cengiz ÇINAR
Jüri

Yard.Doç.Dr. Ramazan TÜRKMEN
Jüri

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**k-Fibonacci Dizilerinin Uygulamaları**

Hülya KAYABAŞ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Danışman: Yard.Doç.Dr. Süleyman SOLAK
2006, 33 sayfa

Jüri: Yard.Doç.Dr. Süleyman SOLAK
Yard.Doç.Dr. Cengiz ÇINAR
Yard.Doç.Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmada elemanları Fibonacci sayılarından oluşan Toeplitz ve Hankel matrislerini tanımladık. Bu matrislerin determinantlarını, terslerini ve Euclidean normlarını içeren bazı teoremler, sonuçlar ve konjektürler verdik.

**Anahtar Kelimeler:** k-Fibonacci ve k-Lucas sayıları, Toeplitz matrisi, Hankel matrisi, Euclidean normu.

# ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

**The Applications of k-Fibonacci Sequences**

Hülya KAYABAŞ

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Primary Education

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
2006, 33 pages

Jüri: Assist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Assist. Prof. Dr. Cengiz ÇINAR
Assist. Prof. Dr. Ramazan TÜRMEN

In this study, we have defined Toeplitz and Hankel matrices whose entries are Fibonacci numbers. We have given some theorems, corollaries and conjuctures including determinants, inverses and Euclidean norms of these matrices.

**Key Words:** k- Fibonacci and k- Lucas numbers, Toeplitz matrix, Hankel matrix, Euclidean norm.

# ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmanın birinci bölümü Giriş olup, burada çalışmayla ilgili literatürden bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise çalışmamız için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde elemanları k-Fibonacci ve k-Lucas dizilerinden oluşan matrislerin determinantları ile ilgili teoremler ve örnekler verilmiştir. Beşinci bölüm çalışmanın esasını teşkil etmekte olup, ilk olarak elemanları 2-Fibonacci sayılarından oluşan Toeplitz matrisi tanımlanarak, bu matrisin determinantı, tersi ve Euclidean normu ile ilgili teoremler verilmiştir. Ayrıca benzer şekilde elemanları 2-Fibonacci sayılarından oluşan Hankel matrisi de tanımlanarak determinantı ve Euclidean normu ile ilgili teoremler verilmiştir. Son bölüm ise sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

Bu çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK' a teşekkür ederim.

Hülya KAYABAŞ

Konya, 2006

# İÇİNDEKİLER

# 1. GİRİŞ

$F_0 = 0$ ve $F_1 = F_2 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan sayılara "*Fibonacci sayıları*" denir. Bu sayılar Pisa'lı Leonardo Fibonacci (1170 - 1250) tarafından tanımlanmıştır. Bazı Fibonacci sayıları;

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | : 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | . . . |
| $F_n$ | : 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | . . . |

şeklinde verilebilir. Ayrıca Fibonacci sayıları geriye doğru $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ olmak üzere ;

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | : 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | . . . |
| $F_{-n}$ | : 0 | 1 | -1 | 2 | -3 | 5 | -8 | 13 | -21 | . . . |

şeklinde tanımlanır (Vajda 1989).

Benzer şekilde $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan sayılara "*Lucas sayıları*" denir. Bu sayılardan bazıları ;

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | : 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | . . . |
| $L_n$ | : 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | . . . |

olup, burada $L_{-n} = (-1)^n L_n$ olmak üzere ;

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | : 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | . . . |
| $L_{-n}$ | : 2 | -1 | 3 | -4 | 7 | -11 | 18 | -29 | 47 | . . . |

şeklinde sıralanırlar (Vajda 1989).

Fibonacci ve Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

**1 .** $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

**2 .** $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

**3 .** $F_n + L_n = 2F_{n+1}$

**4 .** $F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{n+m+1}$

**5 .** $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

**6.** $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ $\left(\text{altın oran}\right)$ ve $\beta = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

olup Fibonacci ve Lucas sayıları ;

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \tag{1.1}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde formülize edilebilir.

Bu eşitlikler A. De Moivre formülü olarak bilinir. De Moivre (1.1) ifadesini $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i$ fonksiyonundan elde etmiştir. Burada $\frac{1}{1-x-x^2}$ nin seri açılımı $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$ ifadesi olmak üzere ;

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots &= F_1 x + (F_1 + F_0)\, x^2 + (2F_1 + F_0)\, x^3 + \ldots \\ &= F_1 x + F_1 x^2 + 2F_1 x^3 + 3F_1 x^4 + \ldots \\ &= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots \\ &= x\,(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots) \end{aligned}$$

olur. Buradan $g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ olup ,

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\beta x} - \frac{1}{1-\alpha x}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1+\beta x+\beta^2 x^2+\beta^3 x^3+\ldots\right)-\left(1+\alpha x+\alpha^2 x^2+\alpha^3 x^3+\ldots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\beta-\alpha)x+\left(\beta^2-\alpha^2\right)x^2+\ldots\right]$$

elde edilir. Burada $x^n$ 'in katsayısı $F_n$ yani $\frac{\beta^n-\alpha^n}{\sqrt{5}}$ dir (Vajda 1989).

Benzer şekilde Lucas sayıları da $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} L_i x^i$ fonksiyonu ile elde edilebilir. Çünkü;

$$h(x)=\frac{2-x}{1-x-x^2}=\left[\frac{1}{1-\alpha x}+\frac{1}{1-\beta x}\right]$$

$$=\left[\left(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\alpha^3x^3+\ldots\right)+\left(1+\beta x+\beta^2x^2+\beta^3x^3+\ldots\right)\right]$$

$$=2+(\alpha+\beta)x+\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2+\ldots$$

elde edilir ki $x^n$ in katsayısı $n$. Lucas sayısıdır ve $L_n = \alpha^n + \beta^n$ dir (Vajda 1989).

Karaduman (2004), çalışmasında genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile tanımlanan matrislerin determinantları ile ilgili bazı ifadeler elde etmiştir.

Lucas sayılarının matris temsili ile yeni bir genelleştirilmesi verilmiş, ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri arasında bir bağıntı ifade edilmiştir (Taşçı, Kılıç 2004).

$a_{ij} \equiv F_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ ve $b_{ij} \equiv L_{(\mathrm{mod}(j-i,n))}$ olmak üzere $A=\left(a_{ij}\right)$ ve $B=\left(b_{ij}\right)$ $nxn$ matrislerinin spektral ve Euclidean normları incelenmiştir (Solak 2005).

Bu çalışmada elemanları Fibonacci sayılarından oluşan Toeplitz ve Hankel matrislerini tanımladık. Bu matrislerin determinantlarını, terslerini ve Euclidean normlarını içeren bazı teorem, sonuç ve konjektürler verdik.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1.** Elemanları kompleks veya reel sayılardan oluşan ve

$$T_n = \left(t_{i-j}\right)_{i,j=0}^{n}$$

biçiminde tanımlanan matrise *Toeplitz matrisi* denir.

Bir Toeplitz matrisi açık olarak,

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{2-n} & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{3-n} & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Görüldüğü gibi bir Toeplitz matrisinin elemanları esas köşegene paralel köşegenler boyunca sabittir. Dolayısıyla bir Toeplitz matrisini, matrisin ilk satır vektörü ile ilk sütun vektörü temsil eder diyebiliriz (Solak 2001).

**Tanım 2.2.** Elemanları kompleks veya reel sayılardan oluşan ve

$$H_n = \left(h_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n}$$

şeklinde tanımlanan matrise *Hankel matrisi* denir. Açık olarak,

$$H_n = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \cdots & h_n & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{n+1} & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \cdots & h_{2n-2} & h_{2n-1} \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \cdots & h_{2n-1} & h_{2n} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır (Solak 2001).

**Tanım 2.3.** $M_n\left(F\right)$, elemanları $F$ cisminden alınan $nxn$ matrislerin kümesi ve $A, B \in M_n\left(F\right)$, $a \in F$ olmak üzere,

**N1)** $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

**N2)** $\|aA\| = |a|.\|A\| \qquad (a \in F)$

**N3)** $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

**N4)** $\|AB\| \le \|A\|.\|B\|$

aksiyomlarını sağlayan

$$\| \, . \, \| : M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

dönüşümüne *matris normu* denir. Bir $A$ matrisinin normu genel anlamda $\|A\|$ ile gösterilir ve $\|A\|$ daima sıfır ( $A = (0)$ matrisi ise) ya da pozitif bir sayıdır.

Eğer bu aksiyomlardan N1, N2 ve N3 sağlanıyorsa norma *genelleştirilmiş matris normu* denir. O halde her matris normu, genelleştirilmiş matris normudur diyebiliriz. Aynı zamanda matris normları, vektör normlarının geliştirilmişidir. Çünkü bir matris satır veya sütun vektörlerinden ibarettir.

$A$, $mxn$ tipinde bir matris ve $rank(A) = r$ olmak üzere;

$$\|A\|_E = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)}$$

$$= \sqrt{iz\left(A^* A\right)} = \sqrt{iz\left(AA^*\right)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 (A)} \qquad\qquad r : rank$$

şeklinde tanımlanan norma *Euclidean (Frobenius, Schur) normu* denir (Solak 2001).

Benzer şekilde $A$ , $mxn$ matrisinin spektral normu;

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^*.A\right)}$$

ile tanımlıdır. Dolayısıyla Euclidean ve Spektral norm arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_E \le \|A\|_2 \le \|A\|_E$$

bağıntısı geçerlidir (Solak 2001).

**Tanım 2.4.** Herhangi bir $A$ $n-$kare düzgün matrisi verilsin. $A$ matrisini, $A_{11}, A_{12}, A_{21}$ ve $A_{22}$ sırasıyla $pxp, pxq, qxp, qxq$ matrisler ve $A_{11}$ düzgün bir matris olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde bloklara ayıralım.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $B$ matrisi vardır ve bu $B$ matrisi $A$ matrisinin tersidir. Yukarıdaki matris çarpımını yaparsak;

$$\left.\begin{aligned} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} &= I_p \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} &= 0 \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} &= 0 \\ A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} &= I_q \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

elde ederiz. (2.1) denklem sistemindeki üçüncü denklemi $A_{11}^{-1}$ ile soldan çarparsak

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} \tag{2.2}$$

olur. $B_{22} = C^{-1}$ diyelim. (2.1) denklem sistemindeki dördüncü denklemden

$$C = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.1) sistemindeki birinci ve ikinci denklemlerden

$$B_{21} = -C^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} , \qquad B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}C^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \tag{2.4}$$

buluruz. (2.2) denkleminde $B_{22} = C^{-1}$ yazarsak

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}C^{-1} \tag{2.5}$$

olur. (2.3), (2.4) ve (2.5) denklemlerinden $B$ matrisi elde edilir ki, buda $A$ matrisinin tersi olur (Bozkurt ve ark. 2005).

## 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ k–FIBONACCI DİZİLERİ

**Tanım 3.1.** $g_n^i$, *i.* dizinin *n.* terimini göstermek üzere genelleştirilmiş *k*-Fibonacci dizisi $1\text{-}k \le n \le 0$ için

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ve $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-j}^i \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Karaduman 2004). Burada tanımlanan *k*-Fibonacci dizisi $k = 2$ için Fibonacci sayılarına dönüşür.

$A$, $k \ x \ k$ biçiminde bir matris olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matris çarpımı özelliğinden;

$$[g_{n+1}^i \, g_n^i \ \ldots \ g_{n-k+2}^i]^T = A[g_n^i \, g_{n-1}^i \ \ldots \ g_{n-k+1}^i]^T \tag{3.2}$$

eşitliği vardır.

$G_n$ , genelleştirilmiş *k*-Fibonacci serilerinin *k* dizilerinden oluşmak üzere (1.sütun 1–Fibonacci dizisi; 2.sütun 2–Fibonacci dizisi; ..... ; *k*.sütun *k*-Fibonacci dizisi)

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

olsun. (3.2) eşitliğinin genelleştirilmesi ile

$$G_{n+1} = AG_n \tag{3.4}$$

elde edilir. İndüksiyon prensibinden;

$$G_{n+1} = A^n G_1 \tag{3.5}$$

olarak yazılabilir. Burada (3.1) den $G_1 = A$ olur ki, böylece $G_n = A^n$ dir. Bu yüzden (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden;

$$G_{n+1} = G_n G_1 = G_1 G_n$$

veya

$$G_{n+1} = A^{n+1}$$

olarak yazılabilir. Başka bir deyişle $G_1$ matris çarpımı altında değişmelidir (Karaduman 2004).

**Örnek 3.1.** $n > 0$, $1 \le i \le 2$ olmak üzere (3.1) den;

**i)** $k = 2$ ve $i = 1$ için (1-Fibonacci dizisinin terimleri);

$$g_1^1 = \sum_{j=1}^{2} g_{1-j}^1 = g_0^1 + g_{-1}^1 = 1+0 = 1$$

$$g_2^1 = \sum_{j=1}^{2} g_{2-j}^1 = g_1^1 + g_0^1 = 1+1 = 2$$

$$g_3^1 = \sum_{j=1}^{2} g_{3-j}^1 = g_2^1 + g_1^1 = 2+1 = 3$$

$$g_4^1 = \sum_{j=1}^{2} g_{4-j}^1 = g_3^1 + g_2^1 = 3+2 = 5$$

$$g_5^1 = \sum_{j=1}^{2} g_{5-j}^1 = g_4^1 + g_3^1 = 5+3 = 8$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

**ii)** $k = 2$ ve $i = 2$ için (2-Fibonacci dizisinin terimleri);

$$g_1^2 = \sum_{j=1}^{2} g_{1-j}^2 = g_0^2 + g_{-1}^2 = 0+1 = 1$$

$$g_2^2 = \sum_{j=1}^{2} g_{2-j}^2 = g_1^2 + g_0^2 = 1+0 = 1$$

$$g_3^2 = \sum_{j=1}^{2} g_{3-j}^2 = g_2^2 + g_1^2 = 1+1 = 2$$

$$g_4^2 = \sum_{j=1}^{2} g_{4-j}^2 = g_3^2 + g_2^2 = 2+1 = 3$$

$$g_5^2 = \sum_{j=1}^{2} g_{5-j}^2 = g_4^2 + g_3^2 = 3+2 = 5$$

$$g_6^2 = \sum_{j=1}^{2} g_{6-j}^2 = g_5^2 + g_4^2 = 5+3 = 8$$

$$\vdots$$

**Örnek 3.2.**

**i)** $k = 2$ , $i = 2$ olsun. Örnek 3.1-ii den,

$$[g_6^2\, g_5^2]^T = A\, [g_5^2\, g_4^2]^T$$

için;

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

olur. Yani 2-Fibonacci dizisinin 5. ve 6. elemanları matris temsili ile kolayca bulunabilir.

**ii)** $k = 2$ , $i = 1$ olsun. Örnek 3.1-i den,

$$[g_4^1\, g_3^1]^T = A[g_3^1\, g_2^1]^T$$

için;

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olur ki, bunlardan (3.2) eşitliği gerçeklenir.

**Örnek 3.3.** $n > 0$ , $1 \le i \le 3$ olmak üzere (3.1) den aşağıdaki diziler elde edilir.

**i)** $k = 3$ , $i = 1$ için;

$$g_1^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{1-j}^1 = g_0^1 + g_{-1}^1 + g_{-2}^1 = 1+0+0 = 1$$

$$g_2^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{2-j}^1 = g_1^1 + g_0^1 + g_{-1}^1 = 1+1+0 = 2$$

$$g_3^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{3-j}^1 = g_2^1 + g_1^1 + g_0^1 = 2+1+1 = 4$$

$$g_4^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{4-j}^1 = g_3^1 + g_2^1 + g_1^1 = 4+2+1 = 7$$

$$g_5^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{5-j}^1 = g_4^1 + g_3^1 + g_2^1 = 7+4+2 = 13$$

$$g_6^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{6-j}^1 = g_5^1 + g_4^1 + g_3^1 = 13+7+4 = 24$$

$$g_7^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{7-j}^1 = g_6^1 + g_5^1 + g_4^1 = 24+13+7 = 44$$

$$g_8^1 = \sum_{j=1}^{3} g_{8-j}^1 = g_7^1 + g_6^1 + g_5^1 = 44+24+13 = 81$$

$$\vdots$$

**ii)** $k = 3$ , $i = 2$ için;

$$g_1^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{1-j}^2 = g_0^2 + g_{-1}^2 + g_{-2}^2 = 0+1+0 = 1$$

$$g_2^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{2-j}^2 = g_1^2 + g_0^2 + g_{-1}^2 = 1+0+1 = 2$$

$$g_3^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{3-j}^2 = g_2^2 + g_1^2 + g_0^2 = 2+1+0 = 3$$

$$g_4^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{4-j}^2 = g_3^2 + g_2^2 + g_1^2 = 3+2+1 = 6$$

$$g_5^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{5-j}^2 = g_4^2 + g_3^2 + g_2^2 = 6+3+2 = 11$$

$$g_6^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{6-j}^2 = g_5^2 + g_4^2 + g_3^2 = 11+6+3 = 20$$

$$g_7^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{7-j}^2 = g_6^2 + g_5^2 + g_4^2 = 20+11+6 = 37$$

$$g_8^2 = \sum_{j=1}^{3} g_{8-j}^2 = g_7^2 + g_6^2 + g_5^2 = 37+20+11 = 68$$

$$\vdots$$

**iii)** $k$=3 , $i$ = 3 için;

$$g_1^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{1-j}^3 = g_0^3 + g_{-1}^3 + g_{-2}^3 = 0+0+1=1$$

$$g_2^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{2-j}^3 = g_1^3 + g_0^3 + g_{-1}^3 = 1+0+0=1$$

$$g_3^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{3-j}^3 = g_2^3 + g_1^3 + g_0^3 = 1+1+0=2$$

$$g_4^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{4-j}^3 = g_3^3 + g_2^3 + g_1^3 = 2+1+1=4$$

$$g_5^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{5-j}^3 = g_4^3 + g_3^3 + g_2^3 = 4+2+1=7$$

$$g_6^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{6-j}^3 = g_5^3 + g_4^3 + g_3^3 = 7+4+2=13$$

$$g_7^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{7-j}^3 = g_6^3 + g_5^3 + g_4^3 = 13+7+4=24$$

$$g_8^3 = \sum_{j=1}^{3} g_{8-j}^3 = g_7^3 + g_6^3 + g_5^3 = 24+13+7=44$$

$\vdots$

$\vdots$

**Örnek 3.4.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğunda $k = 3$ , $i = 2$ için

$$\begin{bmatrix} g_8^2 g_7^2 g_6^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_7^2 g_6^2 g_5^2 \end{bmatrix}^T$$

yani genelleştirilmiş 2- Fibonacci dizisini matris şeklinde elde ederiz.

Örnek 3.3 - ii den ;

$$\begin{bmatrix} 68 \\ 37 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 \\ 20 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 \\ 37 \\ 20 \end{bmatrix}$$

elde edilir ki burada (3.2) eşitliği 3x3 matris temsili ile gerçeklenmiş olur.

**Örnek 3.5.**

$$G_8 = \begin{bmatrix} g_8^1 & g_8^2 & g_8^3 \\ g_7^1 & g_7^2 & g_7^3 \\ g_6^1 & g_6^2 & g_6^3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad G_7 = \begin{bmatrix} g_7^1 & g_7^2 & g_7^3 \\ g_6^1 & g_6^2 & g_6^3 \\ g_5^1 & g_5^2 & g_5^3 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda $G_8$ matrisi

$$\begin{bmatrix} g_8^1 & g_8^2 & g_8^3 \\ g_7^1 & g_7^2 & g_7^3 \\ g_6^1 & g_6^2 & g_6^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_7^1 & g_7^2 & g_7^3 \\ g_6^1 & g_6^2 & g_6^3 \\ g_5^1 & g_5^2 & g_5^3 \end{bmatrix}$$

şeklinde matris çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu eşitlikte değerler yerlerine yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 81 & 68 & 44 \\ 44 & 37 & 24 \\ 24 & 20 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44 & 37 & 24 \\ 24 & 20 & 13 \\ 13 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

olur ki buradan $G_8 = AG_7$ olduğu kolayca görülür. Bu örnekte;

$$A^7 = \begin{bmatrix} 44 & 37 & 24 \\ 24 & 20 & 13 \\ 13 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

ve örnek 3.3 den

$$\mathrm{G}_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 \\ g_0^1 & g_0^2 & g_0^3 \\ g_{-1}^1 & g_{-1}^2 & g_{-1}^3 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A^7 G_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 44 & 37 & 24 \\ 24 & 20 & 13 \\ 13 & 11 & 5 \end{bmatrix}}_{A^7 = G_7} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A = G_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 81 & 68 & 44 \\ 44 & 37 & 24 \\ 24 & 20 & 13 \end{bmatrix} = G_8$$

olur ki, buradan

$$G_8 = A^7 G_1$$

veya

$$G_8 = A^8$$

yazabiliriz.

**Teorem 3.1.**

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-j}^i$$

şeklinde ve $1-k \le n \le 0$ için ;

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

(başlangıç şartlı) olmak üzere

$$\det G_n = \begin{cases} (-1)^n & k \text{ çift ise} \\ 1 & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

dır (Karaduman 2004).

**İspat.** $\forall k$ için

$$\mathrm{G}_1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi $(k-1)$ satır işlemiyle aşağıdaki üçgen matris formuna indirgenir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Böylece $\det G_1 = \det A = 1(-1)^{k-1}$ dir. Ayrıca $G_n = A^n$ olduğundan ;

$$\det G_n = (\det A)^n$$

$$\det G_n = \left((-1)^{k-1}\right)^n \qquad (3.6)$$

Bu yüzden $k$ çift ise ($k$-1) tek olacaktır. Böylece $(-1)^{k-1} = -1$ dir. (3.6) dan $\det G_n = (-1)^n$ elde edilir. Eğer $k$ tek ise ($k$-1) çift olacaktır. $(-1)^{k-1} = 1$ ve (3.6) dan $\det G_n = 1$ olur ki ispat tamamlanır.

**Örnek 3.6.** Örnek 3.3 den ;

**i)** $G_2 = \begin{bmatrix} g_2^1 & g_2^2 & g_2^3 \\ g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 \\ g_0^1 & g_0^2 & g_0^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur ve $k = 3$ için $|G_2| = 1$ elde edilir.

**ii)** $G_4 = \begin{bmatrix} g_4^1 & g_4^2 \\ g_3^1 & g_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ den $k = 2$ *için* $|G_4| = 1$ olur.

**iii)** $G_3 = \begin{bmatrix} g_3^1 & g_3^2 \\ g_2^1 & g_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ den $k = 2$ için $|G_3| = -1$ olur.

**Tanım 3.2.** Tanım 3.1 deki $n > 0$ şartı dikkate alınmamak üzere genelleştirilmiş $k$-Fibonacci dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$g_n^i$ $i$. dizinin $n$. terimini göstermek üzere ; $1-k \le n \le 0$ için

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

başlangıç şartlı ve $1 \le i \le k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-j}^i \tag{3.7}$$

dir (Karaduman 2004). $k = 2$ olduğunda $k$-Fibonacci dizisi $g_0^1 = 1$ , $g_1^1 = 1$ başlangıç şartıyla birlikte Fibonacci sayılarının oluşturduğu diziye dönüşür.

$G_n$ , $B$ ve $C$ $k \times k$ kare matrisleri sırası ile aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{k-2} & 2^{k-1} \\ 2^0 & 2^0 & 2^1 & \cdots & 2^{k-3} & 2^{k-2} \\ 0 & 2^0 & 2^0 & \cdots & 2^{k-4} & 2^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^0 & 2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^0 & 2^0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&\cdots&0&1\\0&1&0&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&1&1\end{bmatrix}.$$

(3.7) den $G_1 = B$ olduğu kolayca görülebilir. O zaman indüksiyon prensibinden $G_{n+1} = BC^n$ yazabiliriz. Fakat burada $B$ matris çarpımı altında değişmeli değildir (Karaduman 2004).

**Teorem 3.2.**

$$G_n=\begin{bmatrix}g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k\\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k\end{bmatrix}$$

ise

$$\det G_n=\begin{cases}1 & k \text{ tek ise}\\ (-1)^n & k \text{ çift ise}\end{cases}$$

dır (Karaduman 2004).

**İspat.**

$$G_n = G_1C^{n-1} = BC^{n-1}$$

olduğundan;

$$\det G_n = \det G_1 \left(\det C\right)^{n-1} \tag{3.8}$$

elde edilir. Böylece ($k$-1) satır işlemiyle $G_1$ üst üçgen matris formuna indirgenir. Yani;

$$\begin{bmatrix}2^0&2^1&2^2&\cdots&2^{k-2}&2^{k-1}\\0&-1&-2&\cdots&-2^{k-3}&-2^{k-2}\\0&0&-1&\cdots&-2^{k-4}&-2^{k-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&-2^0\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{bmatrix}$$

olur. Dolayısı ile $\det G_1 = 1.(-1)^{k-1}$ dir. Aynı zamanda $C$ matrisinin ilk satırını diğer satırlarla yer değiştirerek $C$ matrisi aşağıdaki gibi üst üçgen matris formuna indirgenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Böylece

$$\det C = (-1)^{k-1}$$

elde edilir. (3.8) den,

$$\det G_n = (-1)^{k-1}\left((-1)^{k-1}\right)^{n-1}$$

olur ki $k$ çift ise $(-1)^{k-1} = -1$ ve $k$ tek ise $(-1)^{k-1} = 1$ dir. Buradan;

$$\det G_n = \begin{cases} 1 & k \text{ tek ise} \\ (-1)^n & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur ve ispat tamamlanır.

(3.1) ve (3.7) den $n > 0$ şartının $G_n$'in determinantını değiştirmediğini görürüz. Fakat bu $G_1$'in matris çarpımı altında değişmeli olup olmadığını gösterir. Yani, eğer $n > 0$ ise $G_1$ matris çarpımı altında değişmelidir, aksi taktirde değildir.

**Örnek 3.7.**

**i)** $k = 2$ için $G_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 \\ g_0^1 & g_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise $|G_1| = -1$ olur.

**ii)** $k = 2$ için $G_3 = \begin{bmatrix} g_3^1 & g_3^2 \\ g_2^1 & g_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ise $|G_3| = -1$ olur.

**iii)** $k = 3$ için $\mathrm{G}_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 \\ g_0^1 & g_0^2 & g_0^3 \\ g_{-1}^1 & g_{-1}^2 & g_{-1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise $|G_1| = 1$ olur.

# 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ k-LUCAS DİZİLERİ

$l_n^i$, *i*. dizinin *n*. terimini göstermek üzere genelleştirilmiş *k*–Lucas dizisi $1-k \le n \le 0$ için

$$l_n^i = \begin{cases} 2 & i = 2-n \\ -1 & i = 1-n \\ 0 & \text{aksi taktirde} \end{cases} \tag{4.1}$$

ve $n > 0$ ve $1 \le \mathrm{i} \le k$ için

$$l_n^i = \sum_{j=1}^{k} l_{n-j}^i \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır (Taşçı, Kılıç 2004).

$i = 1$ ve $k = 2$ olduğunda genelleştirilmiş *k*-Lucas dizisi negatif Fibonacci dizisine indirgenir yani

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } l_n^1 = -F_{n+1}$$

olur.

**Örnek 4.1.** $i = 1$, $k = 2$ için $(4.2)$ den;

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 . . . |
| $l_n^1$ | : | -1 | -2 | -3 | -5 | -8 | -13 | -21 | -34 . . . |

$k = 4$ ve $i = 3$ seçtiğimizde genelleştirilmiş *k*–Lucas dizisi ;

$\ldots$ , $l_{-2}^3 = -1$ , $l_{-1}^3 = 2$ , $l_0^3 = 0$ , $l_1^3 = 1$ , $l_2^3 = 2$ , $l_3^3 = 5$ , $l_4^3 = 8$ , $l_5^3 = 16$ , $l_6^3 = 31$ , $\ldots$

olur.

(4.2) den, genelleştirilmiş *k*–Lucas dizileri için

$$\begin{bmatrix} l_{n+1}^i \\ l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ \vdots \\ \vdots \\ l_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_n^i \\ l_{n-1}^i \\ l_{n-2}^i \\ \vdots \\ \vdots \\ l_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

ve $H_n$ , $k \times k$ matrisi

$$H_n = \begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 & \cdots & l_n^k \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & \cdots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{n-k+1}^1 & l_{n-k+1}^2 & \cdots & l_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

olmak üzere, (4.3) eşitliğinin genelleştirilmesi ile

$$H_{n+1} = AH_n \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir (Taşçı, Kılıç 2004).

**Örnek 4.2.** $n > 0$ ve $1 \le i \le 2$ için $(4.2)$ den ;

**i)** $k = 2$ , $i = 1$ için ;

$$l_1^1 = \sum_{j=1}^{2} l_{1-j}^1 = l_0^1 + l_{-1}^1 = -1 + 0 = -1$$

$$l_2^1 = \sum_{j=1}^{2} l_{2-j}^1 = l_1^1 + l_0^1 = -1 - 1 = -2$$

$$l_3^1 = \sum_{j=1}^{2} l_{3-j}^1 = l_2^1 + l_1^1 = -2 - 1 = -3$$

$$l_4^1 = \sum_{j=1}^{2} l_{4-j}^1 = l_3^1 + l_2^1 = -3 - 2 = -5$$

$$l_5^1 = \sum_{j=1}^{2} l_{5-j}^1 = l_4^1 + l_3^1 = -5 - 3 = -8$$

$$l_6^1 = \sum_{j=1}^{2} l_{6-j}^1 = l_5^1 + l_4^1 = -8 - 5 = -13$$

**ii)** $k = 2$ , $i = 2$ için ;

$$l_1^2 = \sum_{j=1}^{2} l_{1-j}^2 = l_0^2 + l_{-1}^2 = 2 - 1 = 1$$

$$l_2^2 = \sum_{j=1}^{2} l_{2-j}^2 = l_1^2 + l_0^2 = 1 + 2 = 3$$

$$l_3^2 = \sum_{j=1}^{2} l_{3-j}^2 = l_2^2 + l_1^2 = 3 + 1 = 4$$

$$l_4^2 = \sum_{j=1}^{2} l_{4-j}^2 = l_3^2 + l_2^2 = 4 + 3 = 7$$

$$l_5^2 = \sum_{j=1}^{2} l_{5-j}^2 = l_4^2 + l_3^2 = 7 + 4 = 11$$

$$l_6^2 = \sum_{j=1}^{2} l_{6-j}^2 = l_5^2 + l_4^2 = 11 + 7 = 18$$

**Örnek 4.3.**

$$H_3 = \begin{bmatrix} l_3^1 & l_3^2 \\ l_2^1 & l_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

ve

$$AH_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2^1 & l_2^2 \\ l_1^1 & l_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

olur ki, (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden $H_3 = AH_2$ elde edilir. Böylece (4.6) eşitliği sağlanmış olur.

**Lemma 4.1.** $A$ ve $H_n$ matrisleri sırasıyla (4.4) ve (4.5) deki gibi olsunlar. O zaman ;

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$H_{n+1} = A^n H_1$$

dir (Taşçı, Kılıç 2004).

**İspat.** (4.6) dan $H_{n+1} = AH_n$ olduğunu biliyoruz. O zaman indüksiyon ve matris çarpımının özelliğinden $H_{n+1} = A^n H_1$ vardır. Ayrıca

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

iken $H_1 = AK$ olup, dolayısıyla $H_{n+1} = A^{n+1}K$ olur.

**Örnek 4.4.** Örnek 4.3 den $H_3 = AH_2$ idi.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$H_1 = \begin{bmatrix} l_1^1 & l_1^2 \\ l_0^1 & l_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ise

$$A^2 H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = H_3$$

olur ve böylece $H_3 = A^2 H_1$ eşitliği elde edilmiş olur.

**Teorem 4.1.** $H_n$ matrisi (4.5) deki gibi olsun. Bu taktirde;

$$\det H_{n+1} = \begin{cases} -1 & k \text{ tek ise} \\ (-1)^{n+1} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

dır (Taşçı, Kılıç 2004).

**İspat.** Lemma 4.1 den $H_{n+1} = A^{n+1}K$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\det A = (-1)^{k+1}$ ve $\det K = (-1)^{k}$ olduğunda $\det H_{n+1} = (\det A)^{n+1}.(\det K)$ dır. Böylece

$$\det H_{n+1} = \begin{cases} -1 & k \text{ tek ise} \\ (-1)^{n+1} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir.

**Örnek 4.5.**

**i)** $k = 2$ için örnek 4.2 den **;**

$$H_3 = \begin{bmatrix} l_3^1 & l_3^2 \\ l_2^1 & l_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ olur ki, } |H_3| = -1 \text{ dir.}$$

**ii)** $k = 2$ için ;

$$H_2 = \begin{bmatrix} l_2^1 & l_2^2 \\ l_1^1 & l_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur ve } |H_2| = 1 \text{ dir.}$$

**iii)** $k = 3$ için ;

$$H_3 = \begin{bmatrix} l_3^1 & l_3^2 & l_3^3 \\ l_2^1 & l_2^2 & l_2^3 \\ l_1^1 & l_1^2 & l_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } |H_3| = -1 \text{ olur.}$$

Aşağıdaki teorem genelleştirilmiş $k$-Fibonacci ve $k$-Lucas dizisi arasındaki ilişkiyi ortaya koyar (Taşçı, Kılıç 2004).

**Teorem 4.2.** $G_n$ ve $H_n$ sırasıyla (3.3) ve (4.5) deki gibi olsunlar. O zaman $K$ (4.9) daki $k \times k$ matrisi olduğunda;

$$H_n = G_n K$$

dır (Taşçı, Kılıç 2004).

**İspat.** $G_n = A^n$ ve $H_n = A^n K$ dır (Taşçı, Kılıç 2004). Buradan da $H_n = G_n K$ dır.

**Örnek 4.6.** $n = 3$ , $k = 2$ için ; $H_3 = G_3 K$ olduğunu gösterelim.

Örnek 4.2 den ;

$$H_3 = \begin{bmatrix} l_3^1 & l_3^2 \\ l_2^1 & l_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ve Örnek 3.1 den ;

$$G_3 = \begin{bmatrix} g_3^1 & g_3^2 \\ g_2^1 & g_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. $2 \times 2$ tipindeki $K$ matrisi,

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup

$$G_3 K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = H_3$$

elde edilir.

Sonuç olarak Teorem 4.2 de $k = 2$ alırsak, bu durumda

$$\begin{bmatrix} l_n^1 & l_n^2 \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $l_n^2 = 2g_n^1 - g_n^2$ dir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\mathrm{g}_{\mathrm{n}}^1 = g_{n+1}^2$ olduğundan $l_n^2$ ve $g_n^2$ sırasıyla Lucas ve Fibonacci sayılarını temsil etmek üzere $l_n^2 = 2g_{n+1}^2 - g_n^2$ eşitliği vardır. Biz bu eşitliği genelleştirirsek, Lucas ve Fibonacci sayıları arasındaki

$$L_n = 2F_{n+1} - F_n$$

bağıntısı elde edilir (Taşçı, Kılıç 2004).

# 5. 2-FIBONACCI DİZİLERİNİN UYGULAMALARI

**Teorem 5.1.** $T_n^2 = \left(g_{r-s}^2\right)_{r,s=1}^{n}$ matrisi

$$T_n^2 = \begin{bmatrix} g_0^2 & g_{-1}^2 & g_{-2}^2 & \cdots & g_{1-n}^2 \\ g_1^2 & g_0^2 & g_{-1}^2 & \cdots & g_{2-n}^2 \\ g_2^2 & g_1^2 & g_0^2 & \cdots & g_{3-n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1}^2 & g_{n-2}^2 & g_{n-3}^2 & \cdots & g_0^2 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

şeklinde olmak üzere

$$\det\left(T_n^2\right) = (-1)^{n-1}$$

dir. Burada $g_i^2$; 2-Fibonacci dizisinin *i*. elemanıdır.

**İspat.**

$$\left|T_n^2\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1}^2 & g_{n-2}^2 & g_{n-3}^2 & g_{n-4}^2 & \cdots & g_0^2 \end{vmatrix}$$

olsun. Determinantın birinci ve ikinci sütunu yer değiştirip, sonlu sayıda elemanter sütun işlemi uygularsak determinant,

$$\left|T_n^2\right| = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-2}^2 & g_{n-1}^2 & -g_{n-2}^2 & -g_{n-3}^2 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1).1.1.(-1)......(-1) = (-1)^{n-1}$$

olur.

**Teorem 5.2.** $n \geq 3$ için $T_n^2 = \left(g_{r-s}^2\right)_{r,s=1}^{n}$ matrisinin tersi,

$$\left(T_n^2\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

şeklindedir.

**İspat.** İspat için indüksiyon prensibini kullanırsak;

$n = 3$ için ispat açıktır.

$n-1$ için,

$$\left(T_{n-1}^2\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olsun. $n$ için teoremin doğruluğunu bloklara ayırma metoduyla gösterelim.

$$T_n^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-2}^2 & g_{n-3}^2 & g_{n-4}^2 & g_{n-5}^2 & \cdots & g_1^2 & g_0^2 & g_{-1}^2 \\ g_{n-1}^2 & g_{n-2}^2 & g_{n-3}^2 & g_{n-4}^2 & \cdots & g_2^2 & g_1^2 & g_0^2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $T_n^2$ matrisini

$$T_n^2 = \begin{bmatrix} T_{n-1}^2 & A \\ B & C \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bloklara ayıralım.

Böylece;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad B = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} & \dots & F_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

olur.

$T_n^2$ matrisinin tersinin,

$$\left(T_n^2\right)^{-1} = \begin{bmatrix} T_{n-1}^2 & A \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim.

Bloklara ayırma metodundan aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir;

$$B_{11} = \left(T_{n-1}^2\right)^{-1} - B_{12}.B.\left(T_{n-1}^2\right)^{-1} \tag{5.3}$$

$$B_{12} = -\left(T_{n-1}^2\right)^{-1}.A.D^{-1} \tag{5.4}$$

$$B_{21} = -D^{-1}.B.\left(T_{n-1}^2\right)^{-1} \tag{5.5}$$

$$D = C - B.\left(T_{n-1}^2\right)^{-1}.A \text{ olmak üzere } B_{22} = D^{-1} \tag{5.6}$$

(5.6) dan;

$$D = \begin{bmatrix} F_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} & \dots & F_1 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 0 - \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D = -1$$

elde edilir ki,

$$B_{22} = D^{-1} = -1 \tag{5.7}$$

olur. (5.5) den;

$$B_{21} = 1. \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} & \dots & F_2 & F_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

olur. (5.4) den;

$$B_{12} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . (-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

elde edilir. (5.3) den;

$$B_{11}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&1&0&-1\\0&1&2&\cdots&1&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-1\\\vdots\\-1\\-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}F_{n-1}&F_{n-2}&\ldots&F_1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&1&0&-1\\0&1&2&\cdots&1&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1&\cdots&-1&-1&0\\1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&1&1&0\\0&1&2&\cdots&1&1&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1&0\\0&0&0&\cdots&1&2&0\end{bmatrix} \tag{5.10}$$

elde edilir.

Böylece; (5.7), (5.8), (5.9) ve (5.10) dan ispat tamamlanır.

**Teorem 5.3.** $T_n^2=\left(g_{r-s}^2\right)_{r,s=1}^n$ matrisi için

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|T_n^2\right\|_E\le\sqrt{F_nF_{n+1}+1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** Euclidean normu tanımından;

$$\left\|T_n^2\right\|_E^2=\sum_{s=1}^n\left(n-s\right)F_s^2+\left(n-1\right).1$$

$$=nF_nF_{n+1}-\sum_{s=1}^n sF_s^2+n-1$$

ve

$$\frac{1}{n}\left\|T_n^2\right\|_E^2=F_nF_{n+1}-\frac{1}{n}\sum_{s=1}^n sF_s^2+1-\frac{1}{n} \tag{5.11}$$

dır.

$n\to\infty$ iken (5.11) in limitini alırsak;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\|T_n^2\right\|_E^2\to F_nF_{n+1}+1$$

olur ki,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|T_n^2\right\|_E \leq \sqrt{F_nF_{n+1}+1}$$

elde edilir.

**Teorem 5.4.** $n \geq 3$ için;

$$\left\|\left(T_n^2\right)^{-1}\right\|_E^2 = \frac{n^2+7n-18}{2}.$$

**İspat.** İspatı tümevarım metodu ile yapalım;

$n = 3$ için,

$$\left(T_3^2\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olur ki,

$$\left\|\left(T_3^2\right)^{-1}\right\|_E^2 = (-1)^2+1^2+1^2+1^2+1^2+(-1)^2 = 6$$

doğrudur.

$n-1$ için,

$$\left\|\left(T_{n-1}^2\right)^{-1}\right\|_E^2 = \frac{(n-1)^2+7(n-1)-18}{2}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left\|\left(T_n^2\right)^{-1}\right\|_E^2 &= \left\|\left(T_{n-1}^2\right)^{-1}\right\|_E^2 + n + 3 \\ &= \frac{(n-1)^2+7(n-1)-18}{2} + n + 3 \\ &= \frac{n^2+7n-18}{2}.\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır.

**Sonuç 5.1.** $\left(T_n^2\right)^{-1}$ matrisinin spektral normu için,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|\left(T_n^2\right)^{-1}\right\|_E = \sqrt{\frac{n^2+7n-18}{2}\cdot\frac{1}{n}}$$

olduğundan,

$$= \sqrt{\frac{n+7-{}^{18}\!/_{n}}{2}} \leq \left\| \left(T_n^2\right)^{-1} \right\|_2 .$$

**Konjektür 5.1.** $i=2$ ve $k=2,3,4,\ldots$ için,

$$\left|T_n^i\right| = \left|g_{r-s}^2\right| = \begin{cases} (-1)^{n+1}.(k-1) , & n \geq k \\ (-1)^{n+1}.(n-1) , & n < k \end{cases} .$$

**Teorem 5.5.** $H_n^2 = \left(g_{r+s}^2\right)_{r,s=1}^n$ matrisinin determinantı $n \geq 3$ için $\det\left(H_n^2\right)=0$ dır. Burada $g_i^2$; 2- Fibonacci dizisinin $i$. elemanıdır.

**İspat.**

$$\left|H_n^2\right| = \begin{vmatrix} g_2^2 & g_3^2 & g_4^2 & \cdots & g_{n+1}^2 \\ g_3^2 & g_4^2 & g_5^2 & \cdots & g_{n+2}^2 \\ g_4^2 & g_5^2 & g_6^2 & \cdots & g_{n+3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ g_{n+1}^2 & g_{n+2}^2 & g_{n+3}^2 & \cdots & g_{2n}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_2 & F_3 & F_4 & \cdots & F_{n+1} \\ F_3 & F_4 & F_5 & \cdots & F_{n+2} \\ F_4 & F_5 & F_6 & \cdots & F_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & \cdots & F_{2n} \end{vmatrix}$$

Elemanter satır işlemleri uygulayarak birinci satırın uygun katlarını diğer satırlara eklersek,

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & \cdots & F_{n+1} \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \cdots & -F_{n-1} \\ 0 & -1 & -1 & -2 & \cdots & -F_{n-1} \\ 0 & -2 & -2 & -4 & \cdots & -2F_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -F_{n-1} & -F_{n-1} & -2F_{n-1} & \cdots & -\left(F_{n-1}\right)^2 \end{vmatrix}$$

olur. Şimdide 2. satırın (-1) katı ile 3. satırı toplarsak 3. satır “0” olur ki;

$$\left|H_n^2\right| = 0$$

elde edilir.

**Teorem 5.6.** Teorem 5.5 ile tanımlanan $H_n^2$ matrisi için,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|H_n^2\right\|_E \le \sqrt{F_{2n}F_{2n+1}-F_{n+1}F_{n+2}}\ .$$

**İspat.** Euclidean normu tanımından,

$$\left\|H_n^2\right\|_E^2 = \sum_{s=1}^{n} sF_{s+1}^2 + \sum_{s=1}^{n-1}(n-s)\,F_{n+s+1}^2$$

ve

$$\frac{1}{n}\left\|H_n^2\right\|_E^2 = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} sF_{s+1}^2 + \sum_{s=1}^{n-1} F_{n+s+1}^2 - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n-1} sF_{n+s+1}^2 \qquad (5.12)$$

$n\to\infty$ iken (5.12) nin limitini alırsak;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\|H_n^2\right\|_E^2 \to \sum_{s=1}^{n-1} F_{n+s+1}^2 = \sum_{s=1}^{2n} F_s^2 - \sum_{s=1}^{n+1} F_s^2 = F_{2n}F_{2n+1} - F_{n+1}F_{n+2}$$

olup

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\|H_n^2\right\|_E \le \sqrt{F_{2n}F_{2n+1}-F_{n+1}F_{n+2}}$$

elde edilir.

**Konjektür 5.2.** Elemanları Fibonacci sayıları ile tanımlı $H_n^i$ matrisi için $i=2,3,\ldots$ , $k=2,3,\ldots$ ve $n>k$ olmak üzere,

$$\left|H_n^i\right| = 0\,.$$

# 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elemanları Fibonacci sayıları ile tanımlı Toeplitz ve Hankel matrislerinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Benzer şekilde bu matrislerin elemanları Lucas sayıları ile tanımlanarak determinantları, tersleri ve normları incelenebilir.

# 7. KAYNAKLAR

**Bozkurt, D., Türen, B., Solak, S., 2005,** Lineer Cebir, Konya.

**Karaduman, E. 2004,** “An Application of Fibonacci Numbers in Matrices”, Applied Mathematics and Computation, 147 : 903 – 908.

**Solak, S., 2001,** “Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Matrislerinin Spektral Normları için Sınırlar ve Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel Interval Matrislerinin Normları”, S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

**Solak, S., 2005,** “On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Numbers”, Applied Mathematics and Computation, 160 : 125 – 132.

**Taşçı, D., Kılıç, E., 2004,** “On the Order-k Generalized Lucas Numbers”, Applied Mathematics and Computation, 160 : 125 – 132.

**Vajda, S, 1989,** Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section, Theory and Applications, John Wiley & Sons.