T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k – *FİBONACCİ* SAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT VE NEGACYCLİC MATRİSLER

Habip Mehmet SEVGİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

KONYA, 2010

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k – *FİBONACCİ* SAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT VE NEGACYCLİC MATRİSLER

Habip Mehmet SEVGİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

KONYA, 2010

Bu tez 18 / 01 / 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER Doç. Dr. Süleyman
SOLAK

(Danışman) (Üye)

Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

(Üye)

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$k-$*FİBONACCİ* SAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT VE NEGACYCLİC MATRİSLER

Habip Mehmet SEVGİ

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İlköğretim Anabilim Dalı

Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER

2010, 37 sayfa

Jüri:

Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER

Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

Bu çalışmada, ilk olarak $k-Fibonacci$ sayıları ile circulant ve negacyclic matrisler tanımlanmıştır. Daha sonra, tanımlanan bu matrislerin özdeğerleri, determinantları ve normları (spektral, Euclidean, satır, sütun) araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Circulant matris, Negacyclic matris, $k-Fibonacci$ sayıları, Özdeğer, Norm, Determinant.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

CIRCULANT AND NEGACYCLIC MATRICES
WITH THE $k-$*FIBONACCI* NUMBERS

Habip Mehmet SEVGI

Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Primary Education

Advisor: Asist. Prof. Dr. E. Gokcen KOCER

2010, 37 Pages

Jury:

Assoc. Prof. Dr. Suleyman SOLAK

Asist. Prof. Dr. E. Gokcen KOCER

Asist. Prof. Dr. Ahmet CIHANGIR

In this study firstly, we defined the circulant and negacyclic matrices with the $k-$*Fibonacci* numbers. Afterwards, investigated eigenvalues, determinants and norms (spectral, Euclidean, row, column) of these matrices.

Key Words: Circulant matrices, Negacyclic matrices, $k-$*Fibonacci* numbers, Eigenvalue, Norms, Determinant.

ÖNSÖZ

Circulant matrisler, matematik literatüründe ilk kez 1846 yılında *E. Catalan*'ın bir çalışmasında karşımıza çıkmaktadır. O yıllardan günümüze kadar matematiğin birçok dalında ve fizikte uygulama alanına sahip olan circulant matrisler hakkında birçok çalışmalar yapılmıştır. Biz de bu çalışmamızda circulant matrisleri ve ters circulant matris de denilen negacyclic matrisleri $k-Fibonacci$ sayılarıyla tanımlayarak elde edilen matrislerin özelliklerini inceledik.

Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmamızla ilgili literatür incelemesi yapılmıştır. İkinci bölümde circulant matrisler, negacyclic matrisler, $k-Fibonacci$ sayıları ve bazı matris özellikleri hakkında bilgi verilmiştir.

Çalışmamızın esas kısmını üçüncü ve dördüncü bölüm oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde circulant matrisler $k-Fibonacci$ sayılarıyla tanımlanarak elde edilen matrisin özdeğerleri, determinantları ve normu (spektral, Euclidean, satır, sütun) elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise $k-Fibonacci$ sayılarıyla tanımladığımız negacyclic matrislerin özdeğeri, normu ve determinantı bulunmuştur.

Bu tezin oluşmasında büyük katkıları olan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Emine Gökçen KOÇER'e ve yüksek lisans çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanını Destekleme Dairesi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Habip Mehmet SEVGİ

Konya, 2010

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Orta çağın en yetenekli matematikçisi olarak kabul edilen İtalyan matematikçi *Leonardo*'nun 1170 yılında İtalya'nın Pisa şehrinde doğduğu tahmin edilmektedir. Babası Guglielmo'nun takma adı Bonaccio idi ve bu ad, *iyi tabiatlı* veya *sade ruhlu* anlamına gelmekteydi. Annesi Alessandra Leonardo 9 yaşındayken öldü. *Leonardo* babasının takma adını miras olarak aldı. İtalyanca *Filius Bonacci*, Bonacci'nin oğlu anlamına gelmekteydi ve *Leonardo* bu nedenle *Fibonacci* diye anılmaya başlandı. Babası Guglielmo Cezayir'in Béjaïa limanı ile İtalya'nın Bugia kenti arasında bir ticaret postasını idare etmekteydi. Genç bir çocuk olan *Leonardo* babasına yardım etmek için onunla seyahat ederdi. Burası *Leonardo*'nun Hint-Arap sayı sistemini öğrendiği yerdir. *Fibonacci,* Hint-Arap sayıları ile aritmetik işlemler yapmanın Roma rakamları ile hesap yapmaktan çok daha basit ve kullanışlı olduğunu gördü. *Leonardo* bütün Akdeniz bölgesini gezdi ve dönemin önde gelen Arap matematikçileri ile çalışma imkânı buldu. *Leonardo* yaklaşık olarak 1200 yılında bu seyahatinden döndü. 1202 yılında, öğrendiklerini *"Abaküs Kitabı"* veya *"Hesaplama Kitabı"* anlamına gelen *Liber Abaci* isimli eserinde topladı. Yayınladığı bu eserinde Hint-Arap Sayı Sistemi'ni Avrupa'ya duyurdu. *Liber Abaci*'de (1202) *Fibonacci*, *modus indium* (Hintlilerin Yöntemi) adını verdiği ve günümüzde Hint-Arap sayıları diye bilinen modern ondalık sayı sistemini tanıtır. Bu kitap gündelik hayatta ticari defter tutma, ölçü birimlerini çevirme, faiz hesaplama, para bozma ve değiştirme ve benzeri işlemlerde önemini göstermiştir. Kitap Avrupa'da tahsilli insanlar arasında hızlı bir şekilde yayılmış ve Avrupa'nın müspet bilimde ilerlemesine önemli etkileri olmuştur. Ayrıca *Fibonacci* bu kitabında kapalı bir ortamdaki bir tavşan ailesinin artışını şu problemle dile getirmiştir. *Biri erkek biri dişi bir çift tavşanımız var, bir aylıkken çok genç olduklarından üreyemiyorlar, ama ikinci ayın sonunda erginleşip üremeye başlıyorlar. Her ay ergin her çiftin biri erkek biri dişi olmak üzere yeni bir çift ürettiğini ve hiç ölmediklerini varsayalım. Tavşanlar bu şekilde üremeye devam ederlerse bir yılın sonunda kaç çift tavşanınız olur?* Sorunun devamı, bu sorunun genelleştirilmiş hali olan, *n ay sonra kaç çift tavşanınız olur?*

Birinci ay 1 çift, ikinci ay üreyemediklerinden yine 1 çift ve üçüncü ay 2 çift ve bu şekilde devam edilirse her ayda kaç çift tavşan olduğunu hesaplarsak aşağıdaki diziyi buluruz.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597,...

Görüldüğü üzere, üçüncü terimden itibaren her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. F_n, n- inci aydaki çift sayısı ve F_{n+1}, $n+1$- inci aydaki çift sayısı olmak üzere, $n+2$ - inci aydaki çift sayısını

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad (1.1)$$

şeklinde tanımlayabiliriz (Koshy 2001).

Tanım 1.1. $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \; ; \; F_0 = 0 \, , \; F_1 = 1 \qquad (1.2)$$

ile tanımlanan diziye *Fibonacci* dizisi, dizinin terimlerine de *Fibonacci* sayıları denir (Vajda 1989).

n'in negatif ve pozitif değerleri için *Fibonacci* dizisinin birkaç elemanını aşağıdaki tablo ile verebiliriz.

Tablo 1.1.

n	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
F_n	…	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	…

Dikkat edilecek olursa n'in pozitif ve negatif değerleri için

$$F_{-n} = \left(-1\right)^{n+1} F_n \qquad (1.3)$$

dir (Vajda 1989).

Daha önce 6. yüzyılda Hintli matematikçiler tarafından bulunmuş olan bu sayı dizisi *Liber Abaci* kitabında tavşanların üremesiyle ilgili problemin hesaplanması sonucu *Fibonacci* tarafından 1202 yılında ortaya konulmuştur. Bu dizinin ileri elemanlarında, bir sonraki elemanın bir öncekine oranı olan ve altın oran adı verilen ve yaklaşık 1,618 değerine eşit bir sayıyı verir. Altın oran matematikte genellikle $\varphi \cong 1,618033988749894...$ ile gösterilir (Koshy 2001).

Tabiattaki canlılarda, insan vücudunda ve mimari yapılarda altın oranı görmek mümkündür. Örneğin ayçiçeğinin merkezinden dışarıya doğru sağdan sola ve soldan sağa doğru taneler sayıldığında çıkan sayılar *Fibonacci* dizisinin ardışık terimleridir. Papatya çiçeğinde de ayçiçeğinde olduğu gibi bir *Fibonacci* dizisi mevcuttur. Ayrıca antik mimari eserler ve bazı modern mimari eserler bu orana uygun tasarlanmışlardır. Örneğin, Mimar Sinan'ın Selimiye ve Süleymaniye camilerinin minarelerinde *Fibonacci* dizisi mevcuttur. Kısacası altın orana uygun ölçülerdeki nesnelerin ve canlıların daha estetik olduğu ve güzel göründüğü savunulmaktadır (Duran 2008).

Bugüne kadar *Fibonacci* sayılarının çeşitli genelleştirmeleri tanımlanmıştır. Bu genelleştirmelerden bir tanesi 2006 yılında Stakhov tarafından $m-Fibonacci$ sayıları olarak tanımlanmıştır (Stakhov 2006). Daha sonraki yıllarda Falcon ve Plaza tarafından $k-Fibonacci$ sayıları olarak isimlendirilmiş olup üzerinde birçok araştırma yapılmıştır (Falcon ve Plaza 2007).

Tanım 1.2. $k \geq 1$ ve $n \geq 1$ için

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1} \tag{1.4}$$

rekürans bağıntısı ve

$$F_{k,0} = 0 \text{ ve } F_{k,1} = 1 \tag{1.5}$$

başlangıç koşulları ile tanımlanan diziye $k-Fibonacci$ dizisi denir ve $\{F_{k,n}\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir (Falcon ve Plaza 2007).

$k-Fibonacci$ dizisi *Fibonacci* dizisinin bir genelleştirmesi olup, $k \geq 1$ tamsayı değerleri için farklı diziler elde edilecektir. Eğer (1.4) denkleminde $k=1$ alırsak

$$F_{1,n+1} = F_{1,n} + F_{1,n-1};\ F_{1,0} = 0\ ,\ F_{1,1} = 1$$

şeklindeki *Fibonacci* dizisi elde edilir ve kısaca $\{F_n\}$ ile gösterilir. Eğer (1.4) denkleminde $k=2$ alırsak

$$F_{2,n+1} = 2F_{2,n} + F_{2,n-1}\,;\; F_{2,0} = 0\,,\; F_{2,1} = 1$$

ile tanımlanan *Pell* dizisi elde edilir ve $\{P_n\}$ ile gösterilir. Son olarak (1.4) denkleminde $k = 3$ alırsak

$$F_{3,n+1} = 3F_{3,n} + F_{3,n-1}\,;\; F_{3,0} = 0\,,\; F_{3,1} = 1$$

şeklindeki dizi elde edilir ve bu dizi $\{H_n\}$ ile gösterilebilir (Falcon ve Plaza 2007).

$\{F_n\}$ *Fibonacci*, $\{P_n\}$ *Pell* ve $\{H_n\}$ dizilerinin ilk birkaç elemanını aşağıdaki tabloda verebiliriz.

Tablo 1.2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	…
H_n	0	1	3	10	33	109	360	1189	…

(1.4) reküranс bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - kx - 1 = 0 \qquad (1.6)$$

dir. Bu denklemin kökleri $\alpha_k = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_k = -\dfrac{1}{\alpha_k} = \dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ dir. (1.6) denkleminin pozitif kökü olan α_k'ya $k-$altın oran adı verilir. $k = 1,\ 2,\ 3$ tamsayı değerleri için α_k oranı özel olarak isimlendirilmiştir. Yani $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran, $\alpha_2 = 1+\sqrt{2}$ gümüş oran ve $\alpha_3 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ bronz oran olarak adlandırılmıştır (Falcon ve Plaza 2007).

Tanım 1.3. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bir reel sayı dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Koshy 2001).

Teorem 1.1. $k \geq 1$ ve $n \geq 1$ için $k-Fibonacci$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = x\left(1 - kx - x^2\right)^{-1}$$

dir.

İspat : Tanım 1.3 den $k-Fibonacci$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} x^n = F_{k,0} + F_{k,1} x + F_{k,2} x^2 + \ldots + F_{k,n} x^n + \ldots$$

dir. O halde

$$x.\, k.g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} kF_{k,n-1} x^n = kF_{k,0} x + kF_{k,1} x^2 + kF_{k,2} x^3 + \ldots + kF_{k,n} x^n + \ldots$$

$$x^2.g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} F_{k,n-2} x^n = F_{k,0} x^2 + F_{k,1} x^3 + F_{k,2} x^4 + \ldots + F_{k,n-2} x^n + \ldots$$

dir. Bu üç eşitliği göz önüne alırsak

$$g(x) - kxg(x) - x^2 g(x) = F_{k,0} + \left(F_{k,1} - kF_{k,0}\right)x + \left(F_{k,2} - kF_{k,1} - F_{k,0}\right)x^2$$

$$+\left(F_{k,3} - kF_{k,2} - F_{k,1}\right)x^3 + \ldots$$

olur. $k-Fibonacci$ dizisinin başlangıç şartları $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ olduğundan

$$g(x)\left(1 - kx - x^2\right) = 0 + x\left(1 - k.0\right) = x$$

elde edilir. Dolayısıyla $k-Fibonacci$ dizisi için üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

dir.

$k-Fibonacci$ sayılarının *Binet* formülünü üreteç fonksiyonu yardımıyla elde etmek mümkündür. α_k ve β_k (1.6) denkleminin kökleri olmak üzere $g(x)$ üreteç fonksiyonunu basit kesirlere ayırırsak

$$g(x) = \frac{x}{1 - kx - x^2} = \frac{A}{1 - \alpha_k x} + \frac{B}{1 - \beta_k x}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında $A = -B = \dfrac{1}{\sqrt{k^2 + 4}}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k^n x^n - \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_k^n x^n$$

dir. Daha sonra

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^n - \beta_k^n}{\sqrt{k^2+4}} x^n$$

elde edilir. Buradan $\alpha_k - \beta_k = \sqrt{k^2+4}$ olmak üzere $F_{k,n}$ $k-$*Fibonacci* sayılarının *Binet* formülü

$$F_{k,n} = \frac{\alpha_k^n - \beta_k^n}{\alpha_k - \beta_k} \tag{1.7}$$

dir. Dikkat edilecek olursa $k=1$ için *Fibonacci* sayılarının, $k=2$ için *Pell* sayılarının *Binet* formülü kolayca elde edilebilir.

Tanım 1.4. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_0, a_1, ..., a_n)^T$ olsun. $ij-$elemanı

$$c_{ij} = a_{j-i(\mathrm{mod}\, n)}$$

olan $n \times n$ tipindeki $C(a) = (c_{ij})$ matrisine circulant matris denir (Davis 1979).

$C(a)$ circulant matrisi

$$C(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. $C(a)$ circulant matrisi, Toeplitz matrisinin özel bir hali olup circulant matrisinin her bir satırının elemanı aynıdır. Satırlar arasındaki tek fark ise elemanların sağa doğru bir adım kaymasıdır. Bu nedenle tüm circulant matrisler ilk satır (ya da sütun) tarafından tanımlanabilir (Davis 1979).

Tanım 1.5. $a \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_0, a_1, ..., a_n)^T$ olsun. Esas köşegeninin altındaki elemanlarının işaretleri değiştirilmiş, $n \times n$ tipindeki circulant matrise ters circulant matris ya da negacyclic matris denir (Davis 1979).

$N(a)$ negacyclic matrisi

$$N(a)=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & a_1 & a_2 & & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & a_0 & a_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_1 \\ -a_1 & \cdots & & & -a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Davis 1979).

H. Karner, J. Schneid ve C. W. Ueberhuber (2003) çalışmalarında, circulant matrisleri sağ ve sol circulant matris olarak sınıflandırmışlardır. Bu sağ circulant matris aslında çalışmamızda göz önüne aldığımız yukarıda tanımlanan circulant matristir. Ayrıca ters sağ circulant ve ters sol circulant matrisler tanımlanarak, bu matrislerin özdeğer ve singüler değer ayrışımları Fourier matrisleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu bahsedilen ters sağ circulant matris ise yukarıda tanımını verdiğimiz negacylic matristir.

D. Geller, I. Kra, S. Popescu ve S. Simanca, circulant matrislerin determinantını ve karakteristik polinomunu, birimin $n.$ dereceden primitif kökünü kullanarak elde etmişlerdir. Circulant matrislerin oluşturduğu uzayın sonlu boyutlu değişmeli bir cebir yapısında olduğunu göstermişlerdir. Circulant matrislerin düzgün olması için gerek ve yeter şartlar verilmiş, circulant matrislerin determinantı ve kompleks projektif uzaydaki eğriler arasındaki ilişki incelenmiştir.

D. A. Lind (1970), circulant ve ters circulant matrisi, *Fibonacci* sayısı ile tanımlayarak bu matrislerin determinantlarını birimin $n.$ dereceden pirimitif kökünü kullanarak elde etmiştir.

Solak (2005), *Fibonacci* sayıları ile circulant matrisleri tanımlayarak, bu matrisin normlarını incelemiştir.

Alptekin (2005), *Pell* sayıları ile circulant ve semicirculant matrisleri tanımlayarak, bu matrislerin özdeğerleri, normları ve determinantlarını incelemiştir.

Koçer (2007), *Modified Pell*, *Jacobsthal* ve *Jacobsthal-Lucas* sayıları ile tanımlı circulant, negacyclic ve semicirculant matrislerin özdeğerleri, determinantları ve normlarını elde etmiştir.

2. ÖNBİLGİLER

Tanım 2.1. F, reel ya da kompleks sayılar cismi ve $M_{m\times n}(F)$ $m\times n$ tipindeki matrislerin kümesi olmak üzere

$$\|.\|: M_{m\times n}(F) \to \mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$$

$$A \to \|A\|$$

şeklinde ifade edilen ve

i) $A\in M_{m\times n}(F)$ için $A\neq 0$ ise $\|A\|>0$ ve $A=0 \Leftrightarrow \|A\|=0$ olmasıdır.

ii) $A\in M_{m\times n}(F)$ ve $\alpha\in F$ için, $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$ dır.

iii) $A,B\in M_{m\times n}(F)$ ve A ile B aynı mertebeden matrisler olmak üzere, $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$ dir.

iv) $A,B\in M_{m\times n}(F)$ ve A ile B çarpılabilir matrisler olmak üzere, $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$ dir.

aksiyomlarını sağlayan $\|.\|$ dönüşümüne matris normu denir ve $A\in M_{m\times n}(F)$ için $\|A\|$ şeklinde gösterilir. Sadece ilk üç aksiyom sağlanıyorsa bu norma genelleştirilmiş matris normu denir (Horn ve Johnson 1985).

$A=(a_{ij})$ $n\times n$ tipinde bir matris olmak üzere bazı matris normlarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

i) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ (Sütun Normu)

ii) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ (Satır Normu)

iii) $\|A\|_E = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ (Euclidean veya Frobenius Normu)

iv) $\|A\|_2 = \left(\max\limits_{1\leq i\leq n}\left|\lambda_i\left(A^*A\right)\right|\right)^{1/2}$ (Spektral Norm) v) $\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^p \right)^{1/p}$ $\qquad (1 \le p < \infty \ , \ l_p$ Normu)

Tanım 2.2. ω, birimin n. dereceden primitif kökü olmak üzere $ij-$ elemanı

$$f_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(i-1)(j-1)}$$

şeklinde tanımlanan

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

matrisine Fourier matrisi denir (Davis 1979).

Aynı zamanda ω nin özelliklerini kullanarak bu matris

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{n-2} & \cdots & \omega \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir.

$C(a)$ circulant matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri,

$$C(a)y = \lambda y$$

denkleminin ya da

$$\sum_{k=0}^{j-1} a_{n-j+k} y_k + \sum_{k=j}^{n-1} a_{k-j} y_k = \lambda y_j \quad ; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

fark denklemlerinin kökleridir. Burada toplamların sınırlarında değişiklik yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1-j} a_k y_{k+j} + \sum_{k=n-j}^{n-1} a_k y_{k-(n-j)} = \lambda y_j \quad ; \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{2.1}$$

elde edilir. Denklem sabit katsayılı lineer bir denklem olduğu için $y_k = \rho^k$ dir. Bu ifade (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1-j} a_k \rho^k + \rho^{-n} \sum_{k=n-j}^{n-1} a_k \rho^k = \lambda$$

elde edilir. ρ birimin $n.$ dereceden primitif kökü olup, $C(a)$ circulant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rho^k$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise

$$y = n^{-1/2}(1, \rho, \rho^2, \cdots, \rho^{n-1})$$

dir. $\omega = e^{2\pi i/n}$ birimin $n.$ dereceden primitif kökü olmak üzere $\rho_j = e^{-2\pi i j/n} = \omega^{-j}$ olarak seçilirse $j = 0,1,\cdots,n-1$ için $C(a)$ circulant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j(C(a)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{-jk}$$

ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörler

$$y^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \omega^{-j}, \omega^{-2j}, \cdots, \omega^{-(n-1)j})$$

dir (Gray 2002).

Teorem 2.1. $C(a)$**,** $n \times n$ tipindeki bir circulant matris ve

$$\lambda_j(C(a)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{-jk} \quad , \quad j = 0,1,...,n-1$$

$C(a)$ nın özdeğerleri olsun. O zaman

$$\Lambda(C(a)) = diag(\lambda_0(C(a)), \lambda_1(C(a)), ..., \lambda_{n-1}(C(a)))$$

ve F Fourier matrisi olmak üzere

$$C(a) = F^H \Lambda(C(a)) F$$

dir (Karner, Schneid ve Ueberhuber 2003).

Teorem 2.2. $C(a)$ $n \times n$ tipinde bir circulant matris ve $\omega_k = e^{2k\pi i/n}$ birimin $n.$ dereceden primitif kökü olsun. $j = 0,1,\cdots,n-1$ için

$$\det(C(a)) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_k^{-j} \right)$$

dir (Lind 1970).

Tanım 2.3. $\omega = e^{2\pi i/n}$ birimin $n.$ dereceden primitif kökü olmak üzere $pq-$elemanı

$$g_{pq} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{p\left(\frac{2q+1}{2}\right)}$$

olarak tanımlanan $G=\left(g_{pq}\right)$ matrisine üniter matris denir.

G üniter matris ve F Fourier matrisi olmak üzere

$$G=diag\left(1,\omega^{1/2},...,\omega^{(n-1)/2}\right)F$$

dir (Karner, Schneid ve Ueberhuber 2003).

Teorem 2.3. $N(a)$**,** $n\times n$ tipindeki bir negacyclic matris ve

$$\mu_j\left(N(a)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\omega^{(2j+1)\,k/2} \quad , \quad j=0,1,\ldots,n-1$$

$N(a)$'nın özdeğerleri olsun. O zaman

$$M\left(N(a)\right)=diag\left(\mu_0\left(N(a)\right),\mu_1\left(N(a)\right),...,\mu_{n-1}\left(N(a)\right)\right)$$

ve G üniter matris olmak üzere

$$N(a)=GM\left(N(a)\right)G^H$$

dir (Karner, Schneid ve Ueberhuber 2003).

Teorem 2.4. $n\times n$ tipinde bir A matrisinin circulant matris olması için gerek ve yeter şart

$$\pi=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

permütasyon matrisi olmak üzere

$$A\pi=\pi A$$

şartının sağlanmasıdır (Davis 1979).

Sonuç 2.1. A matrisinin circulant olması için gerek ve yeter şart A^* matrisinin de circulant olmasıdır (Davis 1979).

Sonuç 2.2. A ve B, $n\times n$ tipinde circulant matrisler ise AB matrisi de circulanttır (Davis 1979).

İspat. A circulant matris ise Teorem 2.4 den $A\pi=\pi A$ dir. Eşitliğin her iki yanı sağdan B matrisi ile çarpılırsa $A\pi B=\pi AB$ olur. B matrisi de circulant olduğu için $B\pi=\pi B$ dir. Dolayısıyla $AB\pi=\pi AB$ olur. AB matrisi Teorem 2.4 den circulant matristir.

Ayrıca aynı mertebeli circulant matrisler değişmelidir. Dolayısıyla bu özellik ve Sonuç 2.1 den circulant matrislerin normal matrisler olduğu sonucuna varılabilir. Yani A circulant matris ise $AA^* = A^*A$ şartı sağlanır.

Teorem 2.5. A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun. A nın normal bir matris olması için gerek ve yeter şart AA^* matrisinin özdeğerlerinin $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, ..., |\lambda_n|^2$ olmasıdır (Taşçı 2005).

Teorem 2.6. $n \times n$ tipinde bir A matrisinin negacyclic matris olması için gerek ve yeter şart

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \\ -1 & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -I_1 & 0 \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} -I_1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A\eta = \eta A$$

şartının sağlanmasıdır (Davis 1979).

Teorem 2.7. $F_{k,n}$, n. $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{k,i} = \frac{F_{k,n} + F_{k,n-1} - 1}{k} \tag{2.2}$$

dir (Mong, Tang ve Brown 2003).

Teorem 2.8. $F_{k,n}$, n. $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,2i} = \frac{1}{k}\left(F_{k,2n+1} - 1\right) \tag{2.3}$$

dir (Falcon ve Plaza 2007).

Teorem 2.9. $F_{k,n}$, n. $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere tek $k-Fibonacci$ sayılarının toplamı

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,2i+1} = \frac{1}{k} F_{k,2n+2} \tag{2.4}$$

dir (Falcon ve Plaza 2007).

Teorem 2.10 *(Cassini Eşitliği)*. $F_{k,n}$, *n.* $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere

$$F_{k,n-1}F_{k,n+1}-F_{k,n}^{2}=\left(-1\right)^{n} \tag{2.5}$$

dir (Falcon ve Plaza 2007).

İspat. $F_{k,n-1}F_{k,n+1}-F_{k,n}^{2}=C$ olsun. $k-Fibonacci$ sayılarının *Binet* formülünü kullanırsak

$$C=\left(\frac{\alpha_k^{n-1}-\beta_k^{n-1}}{\alpha_k-\beta_k}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_k^{n+1}-\beta_k^{n+1}}{\alpha_k-\beta_k}\right)-\left(\frac{\alpha_k^{n}-\beta_k^{n}}{\alpha_k-\beta_k}\right)^{2}$$

$$=\frac{\alpha_k^{2n}-\alpha_k^{n-1}\beta_k^{n+1}-\alpha_k^{n+1}\beta_k^{n-1}+\beta_k^{2n}-\alpha_k^{2n}+2\alpha_k^{n}\beta_k^{n}-\beta_k^{2n}}{\left(\alpha_k-\beta_k\right)^{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n}\left(\alpha_k^{2}+2+\beta_k^{2}\right)}{\left(\alpha_k-\beta_k\right)^{2}}=\frac{(-1)^{n}\left(\alpha_k-\beta_k\right)^{2}}{\left(\alpha_k-\beta_k\right)^{2}}=(-1)^{n}$$

olur. Dolayısıyla

$$F_{k,n-1}F_{k,n+1}-F_{k,n}^{2}=\left(-1\right)^{n}$$

dir.

Lemma 2.1. $n\geq 1$ için

$$\left(-1\right)^{n}-2\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i}=1$$

dir (Mong, Tang ve Brown 2003).

Teorem 2.11. $F_{k,n}$, *n.* $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n-1}F_{k,i}^{2}=\frac{F_{k,n}F_{k,n-1}}{k} \tag{2.6}$$

dir (Mong, Tang ve Brown 2003).

İspat : $T=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{k,i}\right)^{2}$ olsun. $k-Fibonacci$ sayılarının (1.4) ile verilen rekürans bağıntısından

$$F_{k,i}=\frac{F_{k,i+1}-F_{k,i-1}}{k}$$

dir. Bu ifade T 'de yerine yazılırsa

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{k,i+1}^{2}+F_{k,i-1}^{2}-2F_{k,i-1}F_{k,i+1}}{k^{2}}$$

elde edilir. (2.5) ifadesinden $F_{k,i+1}.F_{k,i-1}=F_{k,i}^2+(-1)^i$ dir. Bu ifadeyi T'de yerine yazarsak

$$T=\frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{n}F_{k,i+1}^2+\sum_{i=1}^{n}F_{k,i-1}^2-2\sum_{i=1}^{n}\left(F_{k,i}^2+(-1)^i\right)\right)$$

olur. Buradan

$$T=\frac{1}{k^2}\left(\sum_{m=2}^{n+1}F_{k,m}^2+\sum_{p=0}^{n-1}F_{k,p}^2-2\sum_{i=1}^{n}F_{k,i}^2-2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\right)$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(\left(T+F_{k,n+1}^2-F_{k,1}^2\right)+\left(T-F_{k,n}^2+F_{k,0}^2\right)-2T-2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\right)$$

elde edilir. $k-Fibonacci$ sayılarının başlangıç şartları göz önüne alınırsa

$$T=\frac{1}{k^2}\left(F_{k,n+1}^2-F_{k,n}^2-1-2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\right)$$

bulunur. $k-Fibonacci$ sayıları için Cassini Eşitliği'nden

$$-F_{k,n}^2=(-1)^n-F_{k,n-1}F_{k,n+1}$$

dir. Bu ifadeyi T'de yerine yazarsak

$$T=\frac{1}{k^2}\left(F_{k.n+1}^2+(-1)^n-F_{k,n-1}F_{k,n+1}-1-2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\right)$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(F_{k,n+1}\left(F_{k,n+1}-F_{k,n-1}\right)-1+(-1)^n-2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\right)$$

elde edilir. Lemma 2.1 ve $k-Fibonacci$ sayılarının rekürans bağıntısından

$$T=\frac{1}{k^2}\left(F_{k,n+1}\left(kF_{k,n}\right)-1+1\right)=\frac{F_{k,n}F_{k,n+1}}{k}$$

bulunur.

(2.6) ifadesinde $k=1$ alınırsa, *Fibonacci* sayılarının karelerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F_{1,i}\right)^2=F_{1,n}F_{1,n+1}=F_nF_{n+1}$$

olarak bulunur. Eğer (2.6) ifadesinde $k=2$ alınırsa, *Pell* sayılarının karelerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F_{2,i}\right)^2=\frac{F_{2,n}F_{2,n+1}}{2}=\frac{P_nP_{n+1}}{2}$$

olarak bulunur.

3. $k-$*FİBONACCİ* SAYILARI İLE TANIMLI CİRCULANT MATRİSLER

Tanım 3.1. $F_{k,n}$, $n.$ $k-Fibonacci$ sayısı olsun. $ij-$elemanı

$$c_{ij} = F_{k,j-i(\bmod n)}$$

olan $n \times n$ tipindeki $C(F_k) = (c_{ij})$ matrisine $k-Fibonacci$ sayıları ile tanımlı circulant matris denir ve

$$C(F_k) = \begin{bmatrix} F_{k,0} & F_{k,1} & \cdots & F_{k,n-1} \\ F_{k,n-1} & F_{k,0} & \cdots & F_{k,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \\ F_{k,1} & F_{k,2} & \cdots & F_{k,0} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilir.

Örneğin $k-Fibonacci$ sayıları ile tanımlı 5×5 tipindeki circulant matris

$$C(F_k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 & k^3+2k \\ k^3+2k & 0 & 1 & k & k^2+1 \\ k^2+1 & k^3+2k & 0 & 1 & k \\ k & k^2+1 & k^3+2k & 0 & 1 \\ 1 & k & k^2+1 & k^3+2k & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Eğer (3.1) de $k=1$ alınırsa $C(F)$ yani *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı circulant matris elde edilir. Bu matrislerin normları Solak (2005) tarafından incelenmiştir.

Eğer $k=2$ alınırsa $C(P)$ yani *Pell* sayılarıyla tanımlı circulant matris elde edilir. Alptekin'de (2005) bu matrisin determinantını, özdeğerlerini ve normlarını çalışmıştır.

Teorem 3.1. ω birimin $n.$ dereceden primitif kökü, $j = 0,1,...,n-1$ ve $F_{k,n}$, $n.$ $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere (3.1) ile tanımlı $C(F_k)$ circulant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j(C(F_k)) = \frac{F_{k,n} + (F_{k,n-1} - 1)\omega^{-j}}{\omega^{-2j} + k\omega^{-j} - 1} \tag{3.2}$$

dir.

İspat. Teorem 2.1 den $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı circulant matrisin özdeğeri $j=0,1,\ldots,n-1$ için

$$\lambda_j(C(F_k))=\sum_{s=0}^{n-1}F_{k,s}\omega^{-js}$$

olup, $k-Fibonacci$ sayısının *Binet* formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}
\lambda_j(C(F_k)) &= \sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha_k^s-\beta_k^s}{\alpha_k-\beta_k}\right)\omega^{-js}\\
&= \frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(\alpha_k\omega^{-j})^s-\sum_{s=0}^{n-1}(\beta_k\omega^{-j})^s\right)\\
&= \frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{\alpha_k^n-1}{\alpha_k\omega^{-j}-1}-\frac{\beta_k^n-1}{\beta_k\omega^{-j}-1}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{(\alpha_k^n-1)(\beta_k\omega^{-j}-1)-(\alpha_k\omega^{-j}-1)(\beta_k^n-1)}{(\alpha_k\omega^{-j}-1)(\beta_k\omega^{-j}-1)}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{\alpha_k^n\beta_k\omega^{-j}-\alpha_k^n-\beta_k\omega^{-j}+1-\alpha_k\beta_k^n\omega^{-j}+\alpha_k\omega^{-j}+\beta_k^n-1}{\alpha_k\beta_k\omega^{-2j}-\alpha_k\omega^{-j}-\beta_k\omega^{-j}+1}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{\alpha_k\beta_k\omega^{-j}(\alpha_k^{n-1}-\beta_k^{n-1})-(\alpha_k^n-\beta_k^n)+\omega^{-j}(\alpha_k-\beta_k)}{-\omega^{-2j}-\omega^{-j}(\alpha_k+\beta_k)+1}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{\omega^{-j}\big((\alpha_k^{n-1}-\beta_k^{n-1})-(\alpha_k-\beta_k)\big)+(\alpha_k^n-\beta_k^n)}{\omega^{-2j}+k\omega^{-j}-1}\right)\\
&= \frac{F_{k,n}+(F_{k,n-1}-1)\omega^{-j}}{\omega^{-2j}+k\omega^{-j}-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.1. 4×4 tipindeki $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı

$$C(F_k)=\begin{bmatrix}0 & 1 & k & k^2+1\\ k^2+1 & 0 & 1 & k\\ k & k^2+1 & 0 & 1\\ 1 & k & k^2+1 & 0\end{bmatrix}$$

circulant matrisini göz önüne alırsak bu matrisin özdeğerleri Teorem 3.1 den $j=0,1,2,3$ için

$$\lambda_j(C(F_k)) = \frac{F_{k,n} + (F_{k,n-1} - 1)\omega^{-j}}{\omega^{-2j} + k\omega^{-j} - 1}$$

dir. Buradan

$j = 0$ için

$$\lambda_0(C(F_k)) = \frac{F_{k,4} + F_{k,3} - 1}{k} = \frac{k^3 + k^2 + 2k}{k} = k^2 + k \ + 2$$

$j = 1$ için

$$\lambda_1(C(F_k)) = \frac{F_{k,4} + (F_{k,3} - 1)\omega^{-1}}{\omega^{-2} + k\omega^{-1} - 1} = \frac{k^3 + 2k + (k^2 + 1 - 1)(-i)}{(-1) - ki - 1}$$

$$= \frac{k^3 - k^2 i + 2k}{-ki - 2} = k^2 i - k$$

$j = 2$ için

$$\lambda_2(C(F_k)) = \frac{F_{k,4} + (F_{k,3} - 1)\omega^{-2}}{\omega^{-4} + k\omega^{-2} - 1} = \frac{k^3 + 2k + (k^2 + 1 - 1)(-1)}{1 + k(-1) - 1}$$

$$= \frac{k^3 - k^2 + 2k}{-k} = -k^2 + k \ - 2$$

$j = 3$ için

$$\lambda_3(C(F_k)) = \frac{F_{k,4} + (F_{k,3} - 1)\omega^{-3}}{\omega^{-6} + k\omega^{-3} - 1} = \frac{k^3 + 2k + (k^2 + 1 - 1)i}{(-1) + ki - 1}$$

$$= \frac{k^3 + k^2 i + 2k}{ki - 2} = -k^2 i - k$$

elde edilir.

Eğer Teorem 3.1'de $k = 1$ alınırsa $C(F)$ yani *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin özdeğerleri elde edilir. Teorem 3.1 ifadesinde $k = 2$ alınırsa $C(P)$ yani *Pell* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin özdeğerleri elde edilir (Alptekin 2005).

Teorem 3.2. (3.1) ile tanımlı $n \times n$ tipindeki $C(F_k)$ circulant matrisinin spektral normu

$$\|C(F_k)\|_2 = \frac{F_{k,n} + F_{k,n-1} - 1}{k} \tag{3.3}$$

dır.

İspat. Spektral normun tanımından

$$\|C(F_k)\|_2^2 = \max_{0\le j\le n-1} \lambda_j\left(C(F_k)C(F_k)^*\right)$$

dır. Teorem 2.5'ten

$$\|C(F_k)\|_2^2 = \max_{0\le j\le n-1} \left|\lambda_j\left(C(F_k)\right)\right|^2$$

olur. $j=0$ için $C(F_k)$ matrisinin özdeğerleri maksimum değerini alır. Bu nedenle

$$\|C(F_k)\|_2 = |\lambda_0 C(F_k)| = \frac{F_{k,n}+F_{k,n-1}-1}{k}$$

dir.

Örnek 3.2. 4×4 tipindeki $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı

$$C(F_k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 \\ k^2+1 & 0 & 1 & k \\ k & k^2+1 & 0 & 1 \\ 1 & k & k^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

circulant matrisinin spektral normu

$$\|C(F_k)\|_2 = \frac{F_{k,4}+F_{k,3}-1}{k} = \frac{k^3+2k+k^2+1-1}{k} = k^2+k+2$$

dir.

Özel olarak (3.3) ifadesinde $k=1$ alınırsa *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin spektral normu bulunur. Eğer $k=2$ alınırsa *Pell* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin spektral normu elde edilir (Alptekin 2005).

Teorem 3.3. $F_{k,n}$, n. $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere (3.1) ile tanımlanan $C(F_k)$ circulant matrisinin Euclidean normu

$$\|C(F_k)\|_E = \sqrt{\frac{n}{k}(F_{k,n}F_{k,n-1})} \tag{3.4}$$

dir.

İspat. Euclidean normunun tanımından,

$$\|C(F_k)\|_E^2 = n\sum_{s=0}^{n-1} F_{k,s}^2$$

dir. Teorem 2.11'den

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_{k,s}^2 = \frac{F_{k,n}F_{k,n-1}}{k}$$

olup,

$$\|C(F_k)\|_E^2 = \frac{nF_{k,n}F_{k,n-1}}{k}$$

dir. Böylece

$$\|C(F_k)\|_E = \sqrt{\frac{n}{k}(F_{k,n}F_{k,n-1})}$$

elde edilir.

Örnek 3.3. 5×5 tipindeki $k-Fibonacci$ sayıları ile tanımlı

$$C(F_k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 & k^3+2k \\ k^3+2k & 0 & 1 & k & k^2+1 \\ k^2+1 & k^3+2k & 0 & 1 & k \\ k & k^2+1 & k^3+2k & 0 & 1 \\ 1 & k & k^2+1 & k^3+2k & 0 \end{bmatrix}$$

circulant matrisinin Euclidean normu

$$\|C(F_k)\|_E = \sqrt{\frac{5}{k}(F_{k,5}F_{k,4})} = \sqrt{\frac{5}{k}(k^4+3k^2+1)(k^3+2k)}$$

dır.

(3.4) ifadesinde $k=1$ alınırsa *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin Euclidean normu elde edilir (Solak 2005). Eğer $k=2$ alınırsa *Pell* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin Euclidean normu bulunur (Alptekin 2005).

Sonuç 3.1. $n\times n$ tipindeki $C(F_k)$ circulant matrisinin sütun (ya da satır) normu

$$\|C(F_k)\|_1 = \|C(F_k)\|_\infty = \frac{F_{k,n}+F_{k,n-1}-1}{k} \tag{3.5}$$

dır.

İspat. Sütun normun tanımından

$$\|C(F_k)\|_1 = \max_{0\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n} F_{k,j-i}\right) = \sum_{s=0}^{n-1} F_{k,s}$$

olur. (2.2) ifadesinden

$$\|C(F_k)\|_1 = \frac{F_{k,n}+F_{k,n-1}-1}{k}$$

dir.

Örnek 3.4. 4×4 tipindeki $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı

$$C(F_k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 \\ k^2+1 & 0 & 1 & k \\ k & k^2+1 & 0 & 1 \\ 1 & k & k^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

circulant matrisinin sütun (ya da satır) normu

$$\|C(F_k)\|_1=\|C(F_k)\|_\infty=\frac{F_{k,4}+F_{k,3}-1}{k}=\frac{(k^3+2k)+(k^2+1)-1}{k}=k^2+k+2$$

dır.

Teorem 3.2 ve Sonuç 3.1 den görülebileceği gibi $C(F_k)$ matrisinin spektral normu ve sütun (ya da satır) normu birbirine eşittir.

Teorem 3.4. (3.1) ile tanımlanan $n\times n$ tipindeki $C(F_k)$ circulant matrisinin determinantı

$$\det(C(F_k))=\frac{(1-F_{k,n-1})^n-F_{k,n}^n}{1-\left(\dfrac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}\right)+(-1)^n} \tag{3.6}$$

dir.

İspat. Bir matrisin determinantı, matrisin özdeğerlerinin çarpımı olduğundan

$$\det(C(F_k))=\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}F_{k,s}\omega^{-js}\right)$$

dir. $F_{k,n}$, $n.$ $k-Fibonacci$ sayısı olmak üzere $F_{k,n}$ nin *Binet* formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}\det(C(F_k))&=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\sum_{s=0}^{n-1}((\alpha_k\omega^{-j})^s-(\beta_k\omega^{-j})^s)\right)\\&=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{\alpha_k^n-1}{\alpha_k\omega^{-j}-1}-\frac{\beta_k^n-1}{\beta_k\omega^{-j}-1}\right)\\&=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(\alpha_k^n-1)(\beta_k\omega^{-j}-1)-(\beta_k^n-1)(\alpha_k\omega^{-j}-1)}{(\alpha_k-\beta_k)(\alpha_k\omega^{-j}-1)(\beta_k\omega^{-j}-1)}\\&=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(1-F_{k,n-1})\omega^{-j}-F_{k,n}}{(\alpha_k\omega^{-j}-1)(\beta_k\omega^{-j}-1)}\end{aligned}$$

elde edilir. Her $x,y\in\mathbb{R}$ için

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x-y\omega^{-j})=y^n\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{x}{y}-\omega^{-j}\right)=y^n\left(\frac{x^n}{y^n}-1\right)=x^n-y^n$$

ifadesinden hareketle

$$\prod_{j=0}^{n-1}((1-F_{k,n-1})\omega^{-j}-F_{k,n})=(1-F_{k,n-1})^n-F_{k,n}^n$$

dir. Ayrıca

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha_k\omega^{-j}-1)\prod_{j=0}^{n-1}(\beta_k\omega^{-j}-1)=(1-\alpha_k^n)(1-\beta_k^n)=1-(\alpha_k^n+\beta_k^n)+(-1)^n$$

$$=1-\left(\frac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}\right)+(-1)^n$$

ifadelerini kullanırsak,

$$\det(C(F_k))=\frac{(1-F_{k,n-1})^n-F_{k,n}^n}{1-\left(\frac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}\right)+(-1)^n}$$

elde edilir.

Örnek 3.5. 4×4 tipindeki $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı

$$C(F_k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 \\ k^2+1 & 0 & 1 & k \\ k & k^2+1 & 0 & 1 \\ 1 & k & k^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

circulant matrisinin determinantı

$$\det(C(F_k))=\frac{(1-F_{k,3})^4-F_{k,4}^4}{1-\left(\frac{F_{k,8}}{F_{k,4}}\right)+1}=\frac{(1-k^2-1)^4-(k^3+2k)^4}{1-\left(\frac{k^7+6k^5+10k^3+4k}{k^3+2k}\right)+1}=\frac{k^8-(k^3+2k)^4}{1-\left(k^4+4k^2+2\right)+1}$$

$$=\frac{k^8-(k^3+2k)^4}{-k^4-4k^2}=\frac{(k^3+2k)^4-k^8}{k^4+4k^2}$$

dır.

(3.6) ifadesinde özel olarak $k=1$ alınırsa *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin determinantı elde edilir. Eğer $k=2$ alınırsa *Pell* sayılarıyla tanımlı circulant matrisin determinantı bulunur (Alptekin 2005).

4. $k-$ *FİBONACCİ* SAYILARI İLE TANIMLI NEGACYCLİC MATRİSLER

Tanım 4.1. $F_{k,n}$, n. $k-$*Fibonacci* sayısı olsun. $n \times n$ tipindeki

$$N(F_k) = \begin{bmatrix} F_{k,0} & F_{k,1} & \cdots & F_{k,n-1} \\ -F_{k,n-1} & F_{k,0} & \cdots & F_{k,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -F_{k,1} & -F_{k,2} & \cdots & F_{k,0} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

matrisine $k-$*Fibonacci* sayıları ile tanımlı negacyclic matris denir.

Örneğin $k-$*Fibonacci* sayıları ile tanımlı 5×5 tipindeki negacyclic matris

$$N(F_k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 & k^3+2k \\ -(k^3+2k) & 0 & 1 & k & k^2+1 \\ -(k^2+1) & -(k^3+2k) & 0 & 1 & k \\ -k & -(k^2+1) & -(k^3+2k) & 0 & 1 \\ -1 & -k & -(k^2+1) & -(k^3+2k) & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.1) ifadesinde $k=1$ alınırsa $N(F)$ yani *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı negacyclic matris elde edilir. Eğer $k=2$ alınırsa $N(P)$ yani *Pell* sayılarıyla tanımlı negacyclic matris elde edilir.

Teorem 4.1. ω birimin n. dereceden primitif kökü, $j = 0,1,...,n-1$ ve $F_{k,n}$, n. $k-$*Fibonacci* sayısı olmak üzere (4.1) ile tanımlı $N(F_k)$ negacyclic matrisinin özdeğerleri

$$\mu_j(N(F_k)) = \frac{F_{k,n} + (F_{k,n-1}+1)\omega^{(2j+1)/2}}{1 - k\omega^{(2j+1)/2} - \omega^{2j+1}} \tag{4.2}$$

dir.

İspat. Teorem 2.3 den $k-$*Fibonacci* sayısı ile tanımlı negacyclic matrisin özdeğeri $j = 0,1,\ldots,n-1$ için

$$\mu_j(N(F_k)) = \sum_{s=0}^{n-1} F_{k,s}\,\omega^{(2j+1)s/2}$$

olup, $k-Fibonacci$ sayısının *Binet* formülünü kullanırsak

$$\mu_j(N(F_k)) = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha_k^s-\beta_k^s}{\alpha_k-\beta_k}\right)\omega^{(2j+1)s/2}$$

$$=\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\sum_{s=0}^{n-1}(\alpha_k\omega^{(2j+1)/2})^s-\sum_{s=0}^{n-1}(\beta_k\omega^{(2j+1)/2})^s\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{1-\alpha_k^n\omega^{(2j+1).n/2}}{1-\alpha_k\omega^{(2j+1)/2}}-\frac{1-\beta_k^n\omega^{(2j+1).n/2}}{1-\beta_k\omega^{(2j+1)/2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{1+\alpha_k^n}{1-\alpha_k\omega^{(2j+1)/2}}-\frac{1+\beta_k^n}{1-\beta_k\omega^{(2j+1)/2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{(\alpha_k^n-\beta_k^n)+\left((\alpha_k^{n-1}-\beta_k^{n-1})+(\alpha_k-\beta_k)\right)\omega^{(2j+1)/2}}{-\omega^{2j+1}-k\omega^{(2j+1)/2}+1}\right)$$

$$=\frac{F_{k,n}+(F_{k,n-1}+1)\omega^{(2j+1)/2}}{1-k\omega^{(2j+1)/2}-\omega^{2j+1}}$$

elde edilir.

Örnek 4.1. 4×4 tipindeki $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı

$$N(F_k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 \\ -\left(k^2+1\right) & 0 & 1 & k \\ -k & -\left(k^2+1\right) & 0 & 1 \\ -1 & -k & -\left(k^2+1\right) & 0 \end{bmatrix}$$

negacyclic matrisini göz önüne alırsak bu matrisin özdeğerleri (4.2) ifadesinden $j=0,1,2,3$ için

$$\mu_j(N(F_k))=\frac{F_{k,n}+(F_{k,n-1}+1)\omega^{(2j+1)/2}}{1-k\omega^{(2j+1)/2}-\omega^{2j+1}}$$

dir. Buradan $j=0$ için

$$\mu_0(N(F_k))=\frac{F_{k,4}+(F_{k,3}+1)\omega^{1/2}}{1-k\omega^{1/2}-\omega^1}=\frac{k^3+2k+(k^2+2)\cdot\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}}{1-k\cdot\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}-i}$$

$$=\frac{k^3\sqrt{2}+k^2(i+1)+2\sqrt{2}k+2(i+1)}{(1-i)\sqrt{2}-(i+1)\cdot k}$$

$j=1$ için

$$\mu_1(N(F_k))=\frac{F_{k,4}+(F_{k,3}+1)\omega^{3/2}}{1-k\omega^{3/2}-\omega^3}=\frac{k^3+2k+(k^2+2)\cdot\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}}{1-k\cdot\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}+i}$$

$$=\frac{k^3\sqrt{2}+2\sqrt{2}k+k^2(i-1)+2(i-1)}{(i+1)\sqrt{2}-(i-1)k}$$

$j=2$ için

$$\mu_2(N(F_k))=\frac{F_{k,4}+(F_{k,3}+1)\omega^{5/2}}{1-k\omega^{5/2}-\omega^5}=\frac{k^3+2k+(k^2+2)\cdot\dfrac{-i-1}{\sqrt{2}}}{1-k\cdot\dfrac{-i-1}{\sqrt{2}}-i}$$

$$=\frac{k^3\sqrt{2}+2\sqrt{2}k-k^2(i+1)-2(i+1)}{(1-i)\sqrt{2}+(i+1)k}$$

$j=3$ için

$$\mu_3(N(F_k))=\frac{F_{k,4}+(F_{k,3}+1)\omega^{7/2}}{1-k\omega^{7/2}-\omega^7}=\frac{k^3+2k+(k^2+2)\cdot\dfrac{-i+1}{\sqrt{2}}}{1-k\cdot\dfrac{-i+1}{\sqrt{2}}+i}$$

$$=\frac{k^3\sqrt{2}+2\sqrt{2}k+k^2(-i+1)+2(-i+1)}{(i+1)\sqrt{2}-(-i+1)k}$$

elde edilir.

(4.2) ifadesinde $k=1$ alınırsa $N(F)$ yani *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin özdeğerleri, $k=2$ alınırsa $N(P)$ *Pell* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin özdeğerleri elde edilir.

Teorem 4.2. (4.1) ile tanımlı $n\times n$ tipindeki $N(F_k)$ negacyclic matrisinin spektral normu

$$\|N(F_k)\|_2=\left|\frac{F_{k,n}+(F_{k,n-1}+1)\omega^{1/2}}{1-k\omega^{1/2}-\omega}\right| \tag{4.3}$$

dır.

İspat. Spektral normun tanımından

$$\|N(F_k)\|_2^2 = \max_{0\le j\le n-1} \mu_j\left(N(F_k)N(F_k)^*\right)$$

dır. Teorem 2.5'ten

$$\|N(F_k)\|_2^2 = \max_{0\le j\le n-1} \left(\mu_j(N(F_k))\right)^2$$

olur. $j=0$ için $N(F_k)$ matrisinin özdeğerleri maksimum değerini alır. Bu nedenle

$$\|N(F_k)\|_2 = \left|\mu_0\left(N(F_k)\right)\right| = \left|\frac{F_{k,n}+(F_{k,n-1}+1)\omega^{1/2}}{1-k\omega^{1/2}-\omega}\right|$$

bulunur.

Örnek 4.2. 4×4 tipindeki $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı

$$N(F_k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 \\ -\left(k^2+1\right) & 0 & 1 & k \\ -k & -\left(k^2+1\right) & 0 & 1 \\ -1 & -k & -\left(k^2+1\right) & 0 \end{bmatrix}$$

negacyclic matrisinin spektral normu

$$\|N(F_k)\|_2^2 = \left(\frac{F_{k,4}+(F_{k,3}+1)\omega^{1/2}}{1-k\omega^{1/2}-\omega^1}\right)^2 = \left(\frac{k^3+2k+(k^2+2)\cdot\frac{i+1}{\sqrt{2}}}{1-k\cdot\frac{i+1}{\sqrt{2}}-i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(k^3\sqrt{2}+k^2+2\sqrt{2}k+2)+(k^2+2)i}{(\sqrt{2}-k)-(\sqrt{2}+k)i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(-\sqrt{2}k^4-2\sqrt{2}k^2)+(\sqrt{2}k^4+2k^3+4\sqrt{2}k^2+4k+4\sqrt{2})i}{2k^2+4}\right)^2$$

olur. Eğer $K=(-\sqrt{2}k^4-2\sqrt{2}k^2)$ ve $L=(\sqrt{2}k^4+2k^3+4\sqrt{2}k^2+4k+4\sqrt{2})$ kabul edersek,

$$\|N(F_k)\|_2^2 = \left(\frac{K+Li}{2k^2+4}\right)^2$$

$$= \frac{K+Li}{2k^2+4}\cdot\frac{K-Li}{2k^2+4} = \frac{K^2+L^2}{\left(2k^2+4\right)^2}$$

olur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\|N(F_k)\|_2 = \sqrt{k^4 + \sqrt{2}k^3 + 3k^2 + 2\sqrt{2}k + 2}$$

olarak bulunur.

(4.3) ifadesinde $k=1$ alınırsa *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin spektral normu elde edilir. Eğer $k=2$ alınırsa *Pell* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin spektral normu bulunur.

Teorem 4.3. $F_{k,n}$, *n.* $k-$*Fibonacci* sayısı olmak üzere (4.1) ile tanımlanan $N(F_k)$ negacyclic matrisinin Euclidean normu

$$\|N(F_k)\|_E = \sqrt{\frac{n}{k}(F_{k,n}F_{k,n-1})} \tag{4.4}$$

dir.

Örnek 4.3. 5×5 tipindeki $k-$*Fibonacci* sayıları ile tanımlı

$$N(F_k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 & k^3+2k \\ -(k^3+2k) & 0 & 1 & k & k^2+1 \\ -(k^2+1) & -(k^3+2k) & 0 & 1 & k \\ -k & -(k^2+1) & -(k^3+2k) & 0 & 1 \\ -1 & -k & -(k^2+1) & -(k^3+2k) & 0 \end{bmatrix}$$

negacyclic matrisinin Euclidean normu

$$\|N(F_k)\|_E = \sqrt{\frac{5}{k}(F_{k,5}F_{k,4})} = \sqrt{\frac{5}{k}(k^4+3k^2+1)(k^3+2k)}$$

dır.

Eğer (4.4) ifadesinde $k=1$ alınırsa *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin Euclidean normu, $k=2$ alınırsa *Pell* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin Euclidean normu bulunur.

Sonuç 4.1. $n\times n$ tipindeki $N(F_k)$ negacyclic matrisinin sütun (ya da satır) normu

$$\|N(F_k)\|_1 = \|N(F_k)\|_\infty = \frac{F_{k,n}+F_{k,n-1}-1}{k} \tag{4.5}$$

dır.

Örnek 4.4. 4×4 tipindeki $k-$*Fibonacci* sayısı ile tanımlı

$$N(F_k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & k^2+1 \\ -(k^2+1) & 0 & 1 & k \\ -k & -(k^2+1) & 0 & 1 \\ -1 & -k & -(k^2+1) & 0 \end{bmatrix}$$

negacyclic matrisinin sütun (ya da satır) normu

$$\|N(F_k)\|_1 = \|N(F_k)\|_\infty = \frac{F_{k,4}+F_{k,3}-1}{k} = \frac{(k^3+2k)+(k^2+1)-1}{k} = k^2+k+2$$

dır.

Eğer (4.5) ifadesinde $k=1$ alınırsa *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin sütun (ya da satır) normu, $k=2$ alınırsa *Pell* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin sütun (ya da satır) normu elde edilir.

Teorem 4.4. (4.1) ile tanımlanan $n\times n$ tipindeki $N(F_k)$ negacyclic matrisinin determinantı

$$\det(N(F_k)) = \frac{F_{k,n}^n-(1+F_{k,n-1})^n}{1+\left(\dfrac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}\right)+(-1)^n} \tag{4.6}$$

dir.

İspat. Bir matrisin determinantı, matrisin özdeğerlerinin çarpımı olduğundan

$$\det(N(F_k)) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1} F_{k,s}\,\omega^{(2j+1)s/2}\right)$$

dir. $F_{k,n}$ n. $k-$*Fibonacci* sayısı olmak üzere $F_{k,n}$ nin *Binet* formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}
\det(N(F_k)) &= \prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha_k^s-\beta_k^s}{\alpha_k-\beta_k}\right)\omega^{(2j+1)s/2}\right)\\
&= \prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\left((\alpha_k\omega^{(2j+1)/2})^s-(\beta_k\omega^{(2j+1)/2})^s\right)\right)\\
&= \prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{1-\left(\alpha_k\omega^{(2j+1)/2}\right)^n}{1-\alpha_k\omega^{(2j+1)/2}}-\frac{1-\left(\beta_k\omega^{(2j+1)/2}\right)^n}{1-\beta_k\omega^{(2j+1)/2}}\right)\\
&= \prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{1+\alpha_k^n}{1-\alpha_k\omega^{(2j+1)/2}}-\frac{1+\beta_k^n}{1-\beta_k\omega^{(2j+1)/2}}\right)\\
&= \prod_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha_k-\beta_k}\left(\frac{\left(\alpha_k^n-\beta_k^n\right)+\left(\left(\alpha_k^{n-1}-\beta_k^{n-1}\right)+\left(\alpha_k-\beta_k\right)\right)\omega^{(2j+1)/2}}{(1-\alpha_k\omega^{(2j+1)/2})(1-\beta_k\omega^{(2j+1)/2})}\right)\\
&= \prod_{j=0}^{n-1}\frac{F_{k,n}+(F_{k,n-1}+1)\omega^{(2j+1)/2}}{(1-\alpha_k\omega^{(2j+1)/2})(1-\beta_k\omega^{(2j+1)/2})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x+y\omega^{(2j+1)/2})=y^n\prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{x}{y}+\omega^{(2j+1)/2}\right)=y^n\left(\frac{x^n}{y^n}-1\right)=x^n-y^n$$

ifadesinde $x=F_{k,n}$, $y=(1+F_{k,n-1})$ alırsak

$$\prod_{j=0}^{n-1}(F_{k,n}+(1+F_{k,n-1})\omega^{(2j+1)/2})=F_{k,n}^n-(1+F_{k,n-1})^n$$

dir. Ayrıca

$$\prod_{j=0}^{n-1}(1-\alpha_k\omega^{(2j+1)/2})\prod_{j=0}^{n-1}(1-\beta_k\omega^{(2j+1)/2})=(1+\alpha_k^n)(1+\beta_k^n)$$

$$=1+(\alpha_k^n+\beta_k^n)+(-1)^n=1+\left(\frac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}\right)+(-1)^n$$

ifadelerini kullanırsak,

$$\det(N(F_k))=\frac{F_{k,n}^n-(1+F_{k,n-1})^n}{1+\left(\frac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}\right)+(-1)^n}$$

elde edilir.

Örnek 4.5. 4×4 tipindeki $k-Fibonacci$ sayısı ile tanımlı

$$N(F_k)=\begin{bmatrix}0 & 1 & k & k^2+1\\ -(k^2+1) & 0 & 1 & k\\ -k & -(k^2+1) & 0 & 1\\ -1 & -k & -(k^2+1) & 0\end{bmatrix}$$

negacyclic matrisinin determinantı

$$\det(N(F_k))=\frac{F_{k,4}^4-(1+F_{k,3})^4}{1+\left(\frac{F_{k,8}}{F_{k,4}}\right)+1}=\frac{(k^3+2k)^4-(1+k^2+1)^4}{1+(k^4+4k^2+2)+1}=\frac{(k^3+2k)^4-(k^2+2)^4}{k^4+4k^2+4}$$

dır.

Eğer (4.7) ifadesinde $k=1$ alınırsa *Fibonacci* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin determinantı, $k=2$ alınırsa *Pell* sayılarıyla tanımlı negacyclic matrisin determinantı elde edilir.

5. KAYNAKLAR

Alptekin, E.G., 2005, Pell Sayıları ile Tanımlı Circulant ve Semicirculant Matrisler, S.Ü. Eğitim Fakültesi Dergisi, 20:39-49.

Davis, P.J., 1979, Circulant Matrices, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbone, Toronto.

Duran, S.Ş., 2008, Kâinattaki Gizli İmza Altın Oran, Altın Burç Yayınları, İzmir.

Falcon, S., Plaza, A., 2007, On The *Fibonacci* $k-$Numbers, Chaos, Solitons and Fractals, 32(5):1615-1624.

Geller, D., Kra, I., Popescu, S. and Simonca, S., On Circulant Matrices, http://www.math.sunysb.edu/~sorin/eprints/circulant-screen.pdf, lecture notes.

Gray, R.M., 2006, Toeplitz and Circulant Matrices: A Review, Foundations and Trends in Communications and Information Theory, 3:155–239.

Horn, R.A., Johnson, C.R., 1985, Matrix Analysis, Cambridge University Press.

Karner, H., Schneid, J. and Ueberhuber, C.W., 2003, Spectral Decomposition of Real Circulant Matrices, Linear Algebra and Its Applications, 367:301-311.

Kocer, E.G., 2007, Circulant, Negacyclic and Semicirculant Matrices With The Modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 36(2):133-142.

Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Application, A Wiley-Interscience Publication.

Lind, D.A., 1970, A Fibonacci Circulant, The Fibonacci Quarterly December, 449-455.

Monk, L., Tang, D., Brown, D., 2003, Identities for Generalized Fibonacci Numbers, www.math-cs.cmsu.edu/~curtisc/articles/genfib.ps, 2003.

Solak, S., 2005, On The Norms Of Circulant Matrices With The Fibonacci and Lucas Numbers, Applied Mathematics and Computation, 160:125-132.

Stakhov, A.P., 2006, Gazale Formulas, A New Class of The Hyperbolic Fibonacci and *Lucas* Functions, and The Improved Method of The "Golden" Cryptography, Moscow: Academy of Trinitarism.

Taşcı, D., 2005, Lineer Cebir, Gazi Kitapevi, Ankara.

Vajda, S., 1989, Fibonacci & Lucas Numbers, and The Golden Section Theory and Aplications, Ellis Horwood Limited.