T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CIRCULANT MATRİSLER VE POLİNOMLARIN ÇÖZÜMLERİ

Sibel KÜÇÜKÖZBEK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROĞRAMI
KONYA, 2007

T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CIRCULANT MATRİSLER VE POLİNOMLARIN ÇÖZÜMLERİ

Sibel KÜÇÜKÖZBEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROĞRAMI

Bu tez 30/01/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir

Prof. Dr. Hasan ŞENAY

(Başkan)

Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK

(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CIRCULANT MATRİSLER VE POLİNOMLARIN ÇÖZÜMLERİ

Sibel KÜÇÜKÖZBEK

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İlköğretim Ana Bilim Dalı

Matematik Öğretmenliği Programı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK

2007, 42 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmada öncelikle circulant matrislerin özdeğerlerinin polinomlar yardımıyla bulunmasını ele aldık. Daha sonra derecesi en fazla 4 olan polinomların köklerinin circulant matris metodu ile nasıl bulunacağını gösterdik.

Anahtar Kelimeler: Circulant Matris, Polinom, Özdeğer

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

CIRCULANT MATRICES AND SOLVING POLYNOMIALS

Sibel KÜÇÜKÖZBEK

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Primary Mathematics Education

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK

2007, 42 Pages

Jury: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

Assist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK

Assist. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

In this study, firstly we have taken on the finding eigenvalues of circulant matrices with the polynomials. Then, we've showed that how to find the solutions of polynomials whose degree less than five with the circulant method.

Key Words : Circulant Matrices, Polynomial, Eigenvalue

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmanın Birinci bölümünde, literatür hakkında bilgi verilmektedir. İkinci bölümde, çalışmada ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümde Circulant Matrisler ile polinomların ilişkisi özdeğer açısından gösterilmektedir. Dördüncü bölümde, polinomların çözümlerinin, Circulant matrislerin özdeğerleri ile olan ilişkisinden bahsedilmektedir. Son bölüm ise, sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

Çalışmamdaki yardımlarından dolayı saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK'a, Eşime ve Aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Sibel KÜÇÜKÖZBEK

Konya, 2007

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM
GİRİŞ

Bu bölümde, çalışmamız ile ilgili literatür hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Frank makalesinde, kuadratik, kübik ve kuartik polinomların köklerini örneklerle ele almıştır (Frank, 2002). Ayrıca bir diğer çalışmasında da circulant matrislerin tanımını vermiş ve bir circulant matrisin üretilmesi konusunu işlemiştir (online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/Fall2002/dfrank/presentation.pdf).

Benzer şekilde circulant matrislerin tanımı, oluşumu, üreteçleri ve özdeğerleri ile ilgili bilgiler verilmiş, ayrıca küçük dereceli polinomların kökleri ile circulant matrisler arasındaki ilişki örneklerle ele alınmıştır (Rostermundt, 2005).

Kalman polinom denklemlerin, circulant metotla çözülebilirliğini irdelemiş, circulant matrislerin diğer matrislerle ilişkisini ele almış ve sonuç olarak circulant metodun uygulama sınırlılıklarını belirlemiştir (Kalman, White 2001).

Son olarak, yine circulant metotla kübik, kuartik ve kuadratik polinomların çözümleri aranmış, matris cebirleri ve polinomlar arasındaki ilişki teorik olarak anlatılmıştır (Kalman, White 2001).

Biz bu çalışmada, circulant matrislerin özdeğerlerinin polinomlar yardımıyla bulunuşunu ve polinomların köklerinin circulant matrislerin özdeğerleri ile olan ilişkisini inceledik.

2. BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda geçen bazı tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.1. $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ reel sayılar ve n doğal sayı olmak üzere,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (2.1)$$

biçimindeki ifadelere reel katsayılı polinom ve

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (2.2)$$

ifadesine de denklem denir.

(2.2) denkleminin, $n.$ dereceli terimin katsayısına bölünmesiyle elde edilen,

$$x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

şeklindeki yeni denkleme normal yada monik denklem denir.

Tanım 2.2. A, n-kare bir matris olmak üzere,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$$

polinomunda x değişkeni yerine A matrisi yazılarak elde edilen $P(A)$ ifadesine A matrisinin bir polinomu denir ve

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_r A^r$$

ile gösterilir (Bozkurt, Türen 2003).

Tanım 2.3. $w^n = 1$ denkleminin köklerinin $w_k = (1, \frac{360k}{n})$, $k = 0,1,2,...,n-1$ olduğunu biliyoruz. Bu değerlere birimin $n.$ kökleri denir (Ardahan, 1993).

Tanım 2.4. A, nxn bir matris olsun. $Ax = \lambda x$ olmak üzere, $Ax - \lambda x = 0$ eşitliği $(A - \lambda I)x = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikteki $A - \lambda I$ katsayı matrisinin determinantına A'nın karakteristik denklemi, bu denklemin köklerine de A matrisinin özdeğerleri denir ve karakteristik denklem:

$$\left|A - \lambda I\right| = \Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$$

ile ifade edilir.

Ayrıca $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğindeki x bir vektör olup, A'nın öz vektörü olarak tanımlanır.

Tanım 2.5. I_n, nxn mertebeli birim matris olmak üzere, birim matrisin satırlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen matrislere permütasyon matris denir. Dolayısıyla, permütasyon matrislerin kuvvetleri de yine permütasyon matristir.

Teorem 2.1. $n.$ dereceden herhangi bir monik polinomun kökleri toplamı x^{n-1} teriminin katsayısıdır. Yani x ler,

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

kökü olmak üzere

için $\sum_{i=1}^{n} x_i = a_{n-1}$ dir (Rostermundt, 2005).

Teorem 2.2. A, nxn bir matris ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olsun. A matrisinin köşegeni üzerindeki elemanların toplamı iz(A), özdeğerlerinin toplamına eşittir (Rostermundt, 2005).

3. BÖLÜM
CİRCULANT MATRİSLER VE POLİNOMLAR

3.1. Circulant Matris

$C=(c_k)_{nxn}$ olmak üzere, elemanları $j-i\equiv k(\bmod n)$ şeklinde tanımlı matrise circulant matris denir ve açık olarak

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & . & . & . & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & . & . & . & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & . & . & . & c_{n-3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_1 & c_2 & c_3 & . & . & . & c_0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

şeklinde gösterilir.

Genel anlamda, bir nxn circulant matris n elemanlı bir vektör ile temsil edilebilir ve bu vektör matrisin ilk satırını oluşturur. Böylece takip eden satırlar önceki satırın son elemanını başa alarak devam eder. $2x2$, $3x3$ ve $4x4$ boyutundaki genel circulant matrisler aşağıdaki gibi gösterilirler:

$$C=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}.$$

3.2. Üreteç Circulant Matris

Bir nxn circulant matris oluşturabilmek için öncelikle nxn üreteç circulant matrisi tanımlamak gerekir.

Üreteç matris W: ilk satırı $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}_{1xn}$ olan circulant matristir (www.donkalmon.net/preprints).

Çalışmamız kübik, kuadratik ve kuartik polinomlarla sınırlı olduğu için, $2x2$, $3x3$ ve $4x4$ mertebeli üreteç matrisleri vermemiz yeterli olacaktır.

- $2x2$ mertebeli bir circulant üreteç:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, W^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $3x3$ mertebeli bir circulant üreteç:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, W^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $4x4$ mertebeli bir circulant üreteç:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, W^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Görüldüğü üzere W, $n.$ merteben bir üreteç matris iken W^n birim matristir.

3.3. Bir Circulant Matrisin Oluşumu

İlk satırı $\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & . & . & . & c_{n-1} \end{bmatrix}$ olan nxn mertebeli bir circulant matrisi oluşturmak için herhangi bir

$$q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}$$

polinomunu tanımlayalım. Öyle ki katsayıları C matrisinin ilk satırından oluşsun ve derecesi C matrisinin mertebesinden bir düşük olsun.

Örneğin $2x2$ mertebeli bir circulant matris oluşturmak için, 1. dereceden $q(t) = a + bt$ polinomunu tanımlayalım. Böylece $C = q(W)$ olacaktır.

$$\begin{aligned} C &= q(W) \\ &= aI + bW \\ &= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

$3x3$ mertebeli bir circulant matris oluşturmak için,

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ W^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ve} \quad q(t) = a + bt + ct^2$$

olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} C &= q(W) \\ &= aI + bW + cW^2 \end{aligned}$$

$$= a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $4x4$ mertebeli bir circulant matris oluşturmak için,

$$W = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ W^2 = \begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ W^3 = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

ve $q(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ olsun.

$$\begin{aligned} C &= q(W) \\ &= aI + bW + cW^2 + dW^3 \\ &= a\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\\c&d&a&b\\b&c&d&a\end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.4. Birimin $n.$ Dereceden Kökleri

Burada birimin $n.$ dereceden köklerini nasıl bulunacağını kısaca izah edelim. Birimin $n.$ dereceden kökleri $z^n = 1$ denkleminin çözümleridir. Bu çözümler bize polinomlar yardımıyla circulant matrislerin özdeğerlerini hesaplamada kolaylık sağlayacaktır.

$z^n = 1$ denkleminin n tane çözümü olduğunu biliyoruz ancak biz birimin 2., 3. ve 4. dereceden kökleriyle ilgileniyoruz. Bu yüzden, $z^2 = 1$, $z^3 = 1$ ve $z^4 = 1$ denklemlerinin çözümleri bizim için yeterlidir.

• $z^2 = 1$ denkleminin köklerinin $\{+1,-1\}$ olduğunu biliyoruz.

$n > 2$ olduğunda karşımıza kompleks çözümler gelecektir.

• $z^3 = 1$ denklemini çözelim. Bunun için kompleks düzlemde koordinatları (a,b) olan $z = a + ib$ kompleks sayısını alalım. Bu kompleks sayının Euler ve kutupsal formları sırasıyla,

$$z = a + ib = r.e^{i\theta} = (r,\theta)$$

şeklindedir. Buradan,

$$z^3 = (r.e^{i\theta})^3 = e^{i2k\pi} = 1$$
$$r^3.e^{i3\theta} = e^{i2k\pi} = 1$$

olup,

$$r^3 = 1 \quad \text{ve} \quad e^{i3\theta} = e^{i2k\pi}$$

dir.

Sonuç olarak, $r = 1$ ve $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ olarak elde edilir. $z = r.e^{i\theta}$ almıştık. $r = 1$ ve $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ yerine yazılırsa $z = e^{\frac{i2k\pi}{3}}$ elde edilir.

Şimdi $k = 0,1,2$ için z_0, z_1 ve z_2 köklerini bulalım.

$k = 0$ için $\quad z_0 = e^0 = 1$,

$k = 1$ için $\quad z_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$k = 2$ için $\quad z_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Son olarak $z^4 = 1$ denkleminin köklerini bulalım. Aynı kabulleri kullanırsak;

$$z = a + ib = r.e^{i\theta} = (r, \theta)$$

şeklinde yazarız. Buradan,

$$z^4 = (r.e^{i\theta})^4 = e^{i2k\pi} = 1$$
$$r^4.e^{i4\theta} = e^{i2k\pi} = 1$$

olup,

$$r^4 = 1 \quad \text{ve} \quad e^{i4\theta} = e^{i2k\pi}$$

dir.

Sonuç olarak, $r = 1$ ve $\theta = \frac{k\pi}{2}$ olarak elde edilir. $z = r.e^{i\theta}$ almıştık. $r = 1$ ve $\theta = \frac{k\pi}{2}$ yerine yazılırsa $z = e^{\frac{ik\pi}{2}}$ elde edilir.

Şimdi $k = 0,1,2,3$ için z_0, z_1, z_2 ve z_3 köklerini bulalım.

$k = 0$ için $\quad z_0 = e^0 = 1$,

$k=1$ için $\quad z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$,

$k=2$ için $\quad z_2 = e^{i\pi} = -1$,

$k=3$ için $\quad z_3 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$.

3.5. W Üreteç Matrisinin Özdeğerleri

Herhangi bir C circulant matrisinin özdeğerlerini bulabilmek için bu circulant matrisin üretecinin özdeğerlerini bilmemiz yeterli gelir. W matrisinin özdeğeri λ ise $q(t)$ polinomundan elde edilen $q(\lambda)$, $q(W)$'nin yani C circulant matrisinin özdeğeridir. Üreteç matrislerin özdeğerleri şöyledir:

- $2x2$ mertebeli üreteç circulant W'nin özdeğerleri:

$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $\det(W - \lambda I) = 0$ olmalıdır.

$$\det(W - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda^2 = 1$ denkleminin kökleri W üreteç matrisinin özdeğerleridir ki bu kökler birimin 2. dereceden kökleridir.

• $3x3$ mertebeli üreteç circulant W 'nin özdeğerleri:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere, } \det(W - \lambda I) = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\det(W - \lambda I) = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

$$\lambda^3 = 1$$

Özdeğerler birimin 3. dereceden kökleridir. (Bölüm 3.4) de gösterdiğimiz gibi $3x3$ mertebeli bir üreteç W 'nin özdeğerleri:

$$\lambda = 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

şeklindedir.

• $4x4$ mertebeli üreteç circulant W 'nin özdeğerleri:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere, } \det(W - \lambda I) = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\det(W-\lambda I)=\left|\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right|=0$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&0&-\lambda&1\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\lambda^4+\begin{vmatrix}0&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^4-1=0$$

$$\lambda^4=1$$

Özdeğerler birimin 4. dereceden kökleridir. Yani W ’nin özdeğerleri:

$$\lambda=1,-1,i,-i$$

şeklindedir.

Circulant matrislerin üreteçlerinin özdeğerlerini bildiğimize göre artık circulant matrislerin özdeğerlerini bulabiliriz.

3.6. Polinom Yardımıyla Bir Circulant Matrisin Özdeğerlerini Bulma

C bir circulant matris, w_n birimin $n.$ dereceden bir kökü, $q(t)$, C circulant matrisinin ilk satırıyla tanımlanmış bir polinom olmak üzere, C ’nin özdeğerleri $q(w_n)$ ’lerdir.

Şimdi yukarıda tanımladığımız kavramlardan hareketle, bir circulant matrisin özdeğerlerini veren formülü yazabiliriz.

● $2x2$ mertebeli bir circulant matrisin özdeğerleri:

$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ için $q(t) = a + bt$ şeklinde tanımlanır. $w \in \{1, -1\}$ olduğundan w_1 ve w_2 $q(t)$ polinomunda yerine yazılırsa C circulant matrisinin özdeğerleri:

$$q(1) = a + b$$

ve

$$q(-1) = a - b$$

şeklindedir.

● $3x3$ mertebeli bir circulant matrisin özdeğerleri:

$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ için $q(t) = a + bt + ct^2$ şeklinde tanımlanır.

$w \in \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ olduğundan w_1, w_2 ve w_3, $q(t)$ polinomunda yerine yazılırsa C circulant matrisinin özdeğerleri:

$$q(1) = a + b + c$$

$$q(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) = a - \frac{1}{2}(b + c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b - c)$$

ve

$$q(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}) = a - \frac{1}{2}(b + c) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b - c)$$

şeklindedir.

● $4x4$ mertebeli bir circulant matrisin özdeğerleri:

$$C=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$$ için $q(t)=a+bt+ct^2+dt^3$ şeklinde tanımlanır.

$w\in\{1,-1,i,-i\}$ olduğundan w_1, w_2, w_3 ve w_4, $q(t)$ polinomunda yerine yazılırsa C circulant matrisinin özdeğerleri:

$$q(1)=a+b+c+d$$

$$q(-1)=a-b+c-d$$

$$q(i)=a-c+(b-d)i$$

ve

$$q(-i)=a-c-(b-d)i$$

şeklindedir.

Örnek 3.6.1. Aşağıda verilen C circulant matrisinin özdeğerlerini hesaplayalım.

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

C circulant matrisinin ilk satırından

$$q(t)=1+2t$$

polinomunu tanımlayabiliriz. $2x2$ mertebeli W üreteç matrisinin özdeğerleri $\{+1,-1\}$ idi. Buna göre $q(w)$ 'ler:

$$q(1) = 1 + 2 = 3$$

ve

$$q(-1) = 1 - 2 = -1$$

dir.

Örnek 3.6.2. Aşağıda verilen C circulant matrisinin özdeğerlerini hesaplayalım.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{3x3}$$

C circulant matrisinin ilk satırından

$$q(t) = 3 + t - t^2$$

polinomunu tanımlayabiliriz. $3x3$ mertebeli W üreteç matrisinin özdeğerleri $\left\{1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$ idi. Buna göre $q(w)$ 'ler:

$$q(1) = 3 + 1 - 1 = 3$$

$$q(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) = 3 + i\sqrt{3}$$

ve

$$q(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = 3 - i\sqrt{3}$$

dir.

Örnek 3.6.3. Aşağıda verilen C circulant matrisinin özdeğerlerini hesaplayalım.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}$$

C circulant matrisinin ilk satırından

$$q(t) = 1 + 2t - t^2 + 3t^3$$

polinomunu tanımlayabiliriz. $4x4$ mertebeli W üreteç matrisinin özdeğerleri $\{1,-1,+i,-i\}$ idi. Buna göre $q(w)$ 'ler:

$$q(1) = 1 + 2 - 1 + 3 = 5 \qquad q(-1) = 1 - 2 - 1 - 3 = -5$$

$$q(i) = 1 + 2i + 1 - 3i = 2 - i \qquad q(-i) = 1 - 2i + 1 + 3i = 2 + i$$

dir.

4. BÖLÜM
CİRCULANT MATRİSLER VE POLİNOMLARIN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, circulant matrisler yardımıyla polinomların çözümleri incelenecektir. Bu çözümlerde kullanılacak ortak yöntem

- C genel bir circulant matris,
- $P(x)$ kökleri aranan polinom,
- $\det(xI-C)$ genel circulant matrisin karakteristik polinomu,
- w_j ler birimin $n.$ dereceden kökleri,
- $q(t)$, C circulant matrisinin özdeğer polinomu

olmak üzere, şu şekildedir:

I. Verilen polinomun derecesini mertebe kabul eden genel circulant matris alınır.
II. Alınan genel circulant matrisin karakteristik polinomu bulunur.
III. Verilen polinom ile bulunan karakteristik polinom eşitlenerek, C circulant matrisinin elemanları olan sabitler bulunur.
IV. Elemanları belli olan bu circulant matrisin özdeğerleri hesaplanır ki bu özdeğerler verilen polinomun köklerine karşılık gelir.

Bu yöntemi ikinci dereceden polinomlara uygulamak oldukça kolaydır. Ancak derecesi 2 den büyük olan polinomlarda ön işlemlere ihtiyaç vardır. Öncelikle verilen $n.$ dereceden polinomun $(n-1)$ dereceli terimi yok edilir. Bunun ardından karakteristik polinomdaki $(n-1).$ teriminde yok edilmesi gerekir. Bunun için alınan C circulant matrisinin ilk elemanı 0 (sıfır) alınır ki böylece kökler toplamının yani köşegen üzerindeki elemanların toplamının sıfır olması sağlanır. Burada $(n-1).$ terimleri yok etme sebebi polinom çözümü ile circulant matrisleri ilişkilendirme isteğinden kaynaklanmaktadır. Derecesi 2 den büyük olan polinomlarda $(n-1).$

terimi yok ederek çözüme ulaşan bu metodu 1500'lü yıllarda Cordano bulmuştur ve bu yöntem üçüncü dereceden denklem çözüm metotları arasında yer almaktadır.

Çalışmamızda kullanılacağından bu yöntemle ilgili kısaca bilgi vermemiz iyi olacaktır. Üçüncü dereceden denklem çözme metotlarından Cardan metodu aşağıdaki gibidir:

Genel üçüncü dereceden

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminde $x = x - \frac{a}{3}$ değişken değişimi yapılırsa;

$$x^3 + (\frac{-a^2}{3} + b)x + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{-a^2}{3} + b = p \quad \text{ve} \quad \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = q$$

dersek,

$$x^3 + px + q = 0$$

denklemi elde edilir. Yine bu son denklemde $x = u + v$ değişimi yapılarak,

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv + p) = 0$$

olur. Bu denklemin kanonik forma uyması için

$$u^3 + v^3 = -q \quad (1) \qquad \text{ve} \qquad (u+v)(3uv+p) = 0 \quad (2)$$

olması gerekir. Yani, $p = -3uv$ ve $v = \frac{-p}{3u}$ olmalıdır ki v (1) de yerine yazılırsa,

$$u^3 + v^3 = u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = -q$$

elde edilir ve

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

denklemine ulaşılır. u^3 e göre ikinci dereceden olan bu denklemde

$$u = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} \quad \text{ve} \quad v = \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3}$$

dür. Buradan u ve v için 3'er değer bulunur ki $x = u + v$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$x = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3}$$

elde edilir. Bulunan bu Cardan formülünden 9 değer karşımıza çıkar. Ancak bunlardan sadece 3'ü bizim denklemimizin köküdür. Birimin üçüncü dereceden 3 tane kökü vardır. Bunlar 1, $w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $w^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. Bu da karşımıza u^3 ün 3 tane kökünü çıkarır; u, wu ve w^2u.

Eğer $u+v$, $p(x)$ polinomunun bir kökü ise

$$u=wu \text{ için } v=\frac{-p}{3wu}=w^{-1}v=w^2v$$

ve

$$u=w^2u \text{ için } v=\frac{-p}{3w^2u}=w^{-2}v=wv$$

elde edilir ki bu 3 çözümü tekrar yazarsak,

$$x_1=u+v$$

$$x_2=wu+w^2v$$

$$x_3=w^2u+wv$$

elde edilir. Buradan tekrar değişken değişimi yapılarak asıl x'lere gidilir.

Şunu da belirtelim ki $K=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ olduğunu varsayarsak,

- $K>0$ ise denklemin biri reel, ikisi kompleks eşlenik olmak üzere üç kökü vardır.
- $K=0$ ise denklemin ikisi eşit üç reel kökü vardır.
- $K<0$ ise denklemin üç farklı reel kökü vardır.

Tekrar belirtelim ki, literatürde circulant matrisler yardımıyla polinom çözebilmek için kullanabileceğimiz tek denklem çözme metodu Cardan metodudur. Ancak Cardan çözümleri dördüncü derece polinomlardan öteye gitmemiştir. Bu yüzden circulant matrisler yardımıyla polinomların çözümleri dördüncü dereceden polinomlarla sınırlı kalmıştır.

Şimdi bu çözüm yollarını inceleyeceğiz.

4.1. İkinci Dereceden Polinomlar ve Circulant Matrisler

Genel ikinci dereceden

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

polinomunu ve Genel $2x2$ mertebeli

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_{2x2}$$

circulant matrisini ele alalım.

C circulant matrisinin karakteristik polinomu

$$\det(xI - C) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

şeklindedir. Verilen genel ikinci dereceden $p(x)$ polinomu ile genel C circulant matrisinin karakteristik polinomunu eşitlersek;

$$x^2 + \alpha x + \beta = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

olur. Buradan,

$$-2a = \alpha \quad (4.1.1) \quad \text{ve} \quad a^2 - b^2 = \beta \quad (4.1.2)$$

elde edilir. (4.1.1) den $a = -\dfrac{\alpha}{2}$ olup $a^2 = \dfrac{\alpha^2}{4}$ dür. Bulunan bu değer (4.1.2) de yerine yazılırsa,

$$a^2 - b^2 = \beta \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4} - b^2 = \beta \Rightarrow b^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \beta \Rightarrow b = \mu\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}$$

şeklinde bulunur.

Artık a ve b 'yi biliyoruz. Bulduğumuz bu değerleri circulant matriste yazarsak,

$$C = \begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha}{2} & \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4} - \beta} \\ \sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4} - \beta} & -\dfrac{\alpha}{2} \end{bmatrix}_{2x2}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu circulant matrisin özdeğerleri, verilen $p(x)$ polinomunun kökleri olacaktır. O halde C circulant matrisinin özdeğerlerini

$$q(t) = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}\,.\mathrm{t}$$

polinomuyla bulalım. Bilindiği gibi birimin ikinci dereceden kökleri μ1 dir. Bu değerleri $q(t)$ polinomunda yerine yazarsak,

$$q(1) = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} \quad \text{ve} \quad q(-1) = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}$$

bulunur ki bu değerler polinomun kökleridir.

Örnek 4.1.1. $p(x) = x^2 + 3x - 10$ polinomunun köklerini circulant matrisler yardımıyla hesaplayalım.

Çözüm için genel $C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_{2x2}$ circulant matrisini ele alalım. Bu circulant matrisin karakteristik polinomu

$$\det(xI - C) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

şeklindedir. Verilen $p(x)$ polinomu ile C circulant matrisinin karakteristik polinomunu eşitlersek,

$$x^2 + 3x - 10 = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

olur. Buradan, $a = -\frac{3}{2}$ bulunur. Bulunan bu değer $a^2 - b^2 = -10$ denkleminde yerine yazılırsa, $b = \mu\frac{7}{2}$ olarak bulunur. Kolaylık için $b = \frac{7}{2}$ olarak alalım ve a ve b değerlerini C circulant matrisinde yerine yazalım;

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}_{2x2}$$

elde edilir. Şimdi bu C circulant matrisinin özdeğer polinomu

$$q(t) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}t$$

dir. Bu $q(t)$ polinomunda t yerine birimin ikinci dereceden kökleri olan $\mu 1$ i yazarsak;

$$q(1) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2 \quad \text{ve} \quad q(-1) = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5$$

bulunur ki bu değerleri $p(x)$ polinomunun kökleridir.

Örnek 4.1.2. $p(x) = 3 + 4x^2$ polinomunun köklerini circulant matrisler yardımıyla hesaplayalım.

Öncelikle $p(x)$ polinomunu monik polinoma dönüştürelim:

$$p(x) = 3 + 4x^2 = \frac{3}{4} + x^2$$

Yine $C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}_{2x2}$ circulant matrisini ele alalım. Bu circulant matrisin karakteristik polinomu

$$\det(xI - C) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

şeklindedir. Verilen $p(x)$ polinomu ile C circulant matrisinin karakteristik polinomunu eşitlersek,

$$\frac{3}{4} + x^2 = x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

olur. Buradan, $a = 0$ ve $b = \frac{i\sqrt{3}}{2}$ olarak bulunur. a ve b değerlerini C circulant matrisinde yerine yazalım;

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}_{2x2}$$

elde edilir. Şimdi bu C circulant matrisinin özdeğer polinomu

$$q(t) = \frac{i\sqrt{3}}{2} t$$

dir. Bu $q(t)$ polinomunda t yerine birimin ikinci dereceden kökleri olan $\mu 1$ i yazarsak;

$$q(1) = \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ve} \quad q(-1) = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

bulunur ki bu değerler $p(x)$ polinomunun kökleridir.

4.2. Üçüncü Dereceden Polinomlar ve Circulant Matrisler

Genel üçüncü dereceden

$$p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

polinomunu ve Genel $3x3$ mertebeli

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}_{3x3}$$

circulant matrisini ele alalım.

$p(x)$ polinomunda $x = x - \dfrac{\alpha}{3}$ değişken değişimi yapılırsa,

$$x^3 + (\frac{3\beta - \alpha^2}{3})x + (\frac{2\alpha^3 - 9\beta\alpha + 27\gamma}{27}) = 0$$

denklemi elde edilir. Burada $p = \dfrac{3\beta - \alpha^2}{3}$ ve $q = \dfrac{2\alpha^3 - 9\beta\alpha + 27\gamma}{27}$ yazarsak,

$$x^3 + px + q = 0$$

elde edilir.

Görüldüğü üzere, $(n-1)$. terim yok edilerek oluşturulan yeni denklemde Teorem 2.1 den kökler toplamı sıfırdır.

Unutmayalım ki, bulacağımız kökler aynı zamanda C circulant matrisinin özdeğerleri olacaktır. Teorem 2.2 ye göre aldığımız C circulant matrisinin özdeğerlerinin toplamının da sıfır olması gerekir. Yani kökler toplamı ile özdeğerler toplamı eşit olmalıdır. Bu yüzden aldığımız C circulant matrisinin karakteristik polinomunda $x = x - a$ değişimi yapılarak C circulant matrisini

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

şeklinde değiştiriyoruz.

Böylece elimizde $p(x) = x^3 + px + q$ polinomu ve $C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$ matrisi vardır.

C circulant matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(xI - C) = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx = 0$$

şeklindedir. Verilen $p(x)$ polinomu ile genel C circulant matrisinin karakteristik polinomunu eşitlersek;

$$x^3 + px + q = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx$$

olur. Buradan,

$$b.c = -\frac{p}{3} \qquad \text{ve} \qquad b^3 + c^3 = -q$$

elde edilir. Bu sistemi çözmek için bilinmeyenleri b^3 ve c^3 olarak kabul edelim. Birinci eşitlikten c'yi çekerek, küpünü alalım ve ikinci eşitlikte yerine yazalım.

Böylece, $b^3 + q - \frac{p^3}{27b^3} = 0$ bulunur. Yani $b^6 + qb^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ olur. b^3'ü bilinmeyen olarak kabul edersek ikinci dereceden olan bu denklemin kökleri

$$b = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} \quad \text{ve} \quad c = \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3}$$

bulunur. Bulduğumuz bu değerleri circulant matriste yerine yazarak bir özdeğer polinomu tanımlarsak;

$$q(t) = bt + ct^2$$

elde edilir. Şimdi bu özdeğer polinomunda birimin üçüncü dereceden köklerini yerine yazarak C circulant matrisinin özdeğerlerini bulalım. $w_j \in \left\{ 1, -\frac{1}{2} \mu \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$q(1) = b + c = \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3},$$

$$\begin{aligned} q(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) &= -\frac{1}{2}(b+c) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} \right) + \\ &\quad i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} - \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{1/3} \right), \end{aligned}$$

ve

$$q(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{1}{2}(b+c)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{1/3}+\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{1/3}\right)-$$

$$i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{1/3}-\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]^{1/3}\right)$$

elde edilir. Bulduğumuz bu özdeğerler indirgenmiş $p(x)$ polinomunun kökleridir. Asıl polinomun kökleri ise

$$x_1=q(1)-\frac{\alpha}{3}\,,\quad x_2=q(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{\alpha}{3}\quad \text{ve}\quad x_3=q(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{\alpha}{3}$$

şeklindedir.

Örnek 4.2.1. $p(x)=x^3+x^2-x-1$ polinomunun köklerini circulant matrisler yardımıyla hesaplayalım.

$p(x)$ polinomunda $x=x-\frac{1}{3}$ lineer değişken değişimi yaparak,

$$p(x)=(x-\frac{1}{3})^3+(x-\frac{1}{3})^2-(x-\frac{1}{3})-1=x^3-\frac{4}{3}x-\frac{16}{27}$$

bulunur ki böylece x^2'li terim yok edilir. Aldığımız $C=\begin{bmatrix}0&b&c\\c&0&b\\b&c&0\end{bmatrix}_{3x3}$ circulant matrisinin karakteristik polinomu $x^3-b^3-c^3-3bcx$ idi. Bu iki polinomu eşitlersek;

$$x^3-\frac{4}{3}x-\frac{16}{27}=x^3-b^3-c^3-3bcx$$

elde edilir. Buradan $b.c=\frac{4}{9}$ ve $b^3+c^3=\frac{16}{27}$ elde edilir. Birinci eşitlikten c'yi çekerek, küpünü alalım ve ikinci eşitlikte yerine yazalım.

$$b^6-\frac{16}{27}b^3+\frac{64}{729}=0$$

elde edilir. Buradan

$$b=\left[\frac{1}{2}\frac{16}{27}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{16}{27}\right)^2-\frac{64}{729}}\right]^{1/3}=\frac{2}{3}$$

ve

$$c=\left[\frac{1}{2}\frac{16}{27}-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{16}{27}\right)^2-\frac{64}{729}}\right]^{1/3}=\frac{2}{3}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu değerleri circulant matriste yerine yazarsak,

$$C=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}_{3x3}$$

elde edilir. O halde, C circulant matrisinin özdeğerlerini veren polinom

$$q(t)=\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}t^2$$

şeklindedir. Bu polinomda birimin üçüncü dereceden köklerini yerine yazarsak

$$q(1)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3},$$

$$q(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{2}{3}$$

ve

$$q(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{2}{3}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu özdeğerler indirgenmiş $p(x)$ polinomunun kökleridir. Asıl polinomun kökleri ise

$$x_1=q(1)-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1\,,$$

$$x_2=q(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{3}=-1$$

ve

$$x_3=q(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{3}=-1$$

şeklindedir.

Örnek 4.2.2. $p(x)=x^3+6x-2$ polinomunun köklerini circulant matrisler yardımıyla hesaplayalım.

Denklem x^2'li terim içermediğinden indirgemeye gerek yoktur. Çözüme polinomu $C=\begin{bmatrix}0&b&c\\c&0&b\\b&c&0\end{bmatrix}_{3x3}$ circulant matrisinin karakteristik denklemine eşitleyerek başlayabiliriz.

$$x^3+6x-2=x^3-b^3-c^3-3bcx$$

elde edilir. Buradan $b.c=-2$ ve $b^3+c^3=2$ elde edilir. Birinci eşitlikten c'yi çekerek, küpünü alalım ve ikinci eşitlikte yerine yazalım.

$$b^6-2b^3-8=0$$

elde edilir. Buradan

$$b=\left[\frac{2+\sqrt{4+32}}{2}\right]^{1/3}=4^{1/3}$$

ve

$$c=\left[\frac{2-\sqrt{4+32}}{2}\right]^{1/3}=(-2)^{1/3}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu değerlerin circulant matrisite yerine yazarsak, oluşturulan özdeğer polinomu

$$q(t)=4^{1/3}t+(-2)^{1/3}t^2$$

şeklindedir. Bu polinomda birimin üçüncü dereceden köklerini yerine yazarsak

$$q(1)=4^{1/3}+(-2)^{1/3},$$

$$q(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{1}{2}(4^{1/3}+(-2)^{1/3})+i\frac{\sqrt{3}}{2}(4^{1/3}-(-2)^{1/3})$$

ve

$$q(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{1}{2}(4^{1/3}+(-2)^{1/3})-i\frac{\sqrt{3}}{2}(4^{1/3}-(-2)^{1/3})$$

elde edilir. Bulduğumuz bu özdeğerler indirgenmiş $p(x)$ polinomunun kökleridir.

Örnek 4.2.3. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ polinomunun köklerini circulant matrisler yardımıyla hesaplayalım.

Öncelikle $p(x)$ polinomunda $x = x + 2$ lineer değişken değişimi yaparak,

$$p(x) = x^3 - x$$

bulunur ki böylece x^2'li terim yok edilir. Bu polinomu $C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$ circulant matrisinin karakteristik polinomu ile eşitlersek;

$$x^3 - x = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx$$

elde edilir. Buradan $b.c = \frac{1}{3}$ ve $b^3 + c^3 = 0$ elde edilir. Birinci eşitlikten c'yi çekerek, küpünü alalım ve ikinci eşitlikte yerine yazalım.

$$b^6 + \frac{1}{27} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$b = \left[\sqrt{-\frac{1}{27}} \right]^{1/3} = 0{,}5 + 0{,}28i \quad \text{ve} \quad c = 0{,}5 - 0{,}28i$$

elde edilir. Bulduğumuz bu değerleri circulant matriste yerine yazarsak,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0{,}5+0{,}28i & 0{,}5-0{,}28i \\ 0{,}5-0{,}28i & 0 & 0{,}5+0{,}28i \\ 0{,}5+0{,}28i & 0{,}5-0{,}28i & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

elde edilir. O halde, C circulant matrisinin özdeğerlerini veren polinom

$$q(t)=(0{,}5+0{,}28i)t+(0{,}5-0{,}28i)t^2$$

şeklindedir. Bu polinomda birimin üçüncü dereceden köklerini yerine yazarsak

$$q(1)=0{,}5+0{,}28i+0{,}5-0{,}28i=1,$$

$$q(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=q(-0{,}5+0{,}86i)=-0{,}9816\cong -1$$

ve

$$q(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=q(-0{,}5-0{,}86i)=0$$

elde edilir. Bulduğumuz bu özdeğerler indirgenmiş $p(x)$ polinomunun kökleridir. Asıl polinomun kökleri ise

$$x_1=q(1)+2=1+2=3,$$

$$x_2=q(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+2=-1+2=1$$

ve

$$x_3=q(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+2=0+2=2$$

şeklindedir.

4.3.Dördüncü Dereceden Polinomlar ve Circulant Matrisler

Genel dördüncü dereceden

$$p(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

polinomunu ve Genel $4x4$ mertebeli

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}_{4x4}$$

circulant matrisini ele alalım.

$p(x)$ polinomunda $x = x - \dfrac{\alpha}{4}$ değişken değişimi yaparsak ve genelliği bozmamak için katsayıları β, γ ve δ kabul edersek dördüncü derece indirgenmiş polinom

$$p(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

şeklini alır.

Kökler toplamının özdeğerler toplamına eşit olması gerektiğinden C circulant matrisinin ilk terimi olan a'yı sıfır kabul edersek

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

matrisini elde ederiz. Oluşan yeni circulant matrisin karakteristik polinomu

$$\det(xI - C) = x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2$$

olur. Yeni $p(x)$ polinomu ile bulunan karakteristik polinomu eşitlersek, katsayılar arasında aşağıdaki bağıntıları buluruz:

$$4bd + 2c^2 = -\beta ,$$
$$4c(b^2 + d^2) = -\gamma$$

ve

$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = \delta .$$

Son eşitlikte düzenlemeler yaparsak,

$$c^4 - (b^2 + d^2)^2 + 4(bd)^2 - 4bdc^2 = \delta$$

şeklini alır. Birinci ve ikinci eşitliği yukarıdaki eşitlikte yerine yazar ve düzenlersek:

$$c^4 - \frac{\gamma^2}{16c^2} + \frac{(\beta + 2c^2)^2}{4} + (2c^2 + \beta)c^2 = \delta$$

ve

$$c^6 + \frac{\beta}{2}c^4 + \left(\frac{\beta^2}{16} - \frac{\delta}{4}\right)c^2 - \frac{\gamma^2}{64} = 0$$

bulunur. Bu eşitlik yardımıyla bulunan b, c ve d değerlerini circulant matriste yerine yazarak bir özdeğer polinomu tanımlarsak;

$$q(t) = bt + ct^2 + dt^3$$

elde edilir. Şimdi bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden köklerini yerine yazarak C circulant matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$q(1) = b + c + d\,,$$

$$q(-1) = b + c - d\,,$$

$$q(i) = bi - c - id$$

ve

$$q(-i) = -bi - c + id$$

bulunur ki buradan başta yaptığımız $x = x - \dfrac{\alpha}{4}$ dönüşümü tekrar yapılarak $p(x)$ polinomunun köklerine ulaşılır.

Örnek 4.3.1. $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ polinomunun köklerini circulant matrisler yardımıyla hesaplayalım.

Denklem x^3’lü terim içermediğinden indirgemeye gerek yoktur. Çözüme polinomu $C = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$ circulant matrisinin karakteristik denklemine eşitleyerek başlayabiliriz.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2$$

olup, buradan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$4bd + 2c^2 = 10 \qquad (1)$$

$$4c(b^2 + d^2) = 0 \qquad (2)$$

$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = 9 \qquad (3)$$

(1) ve (2) nolu eşitlikler (3) nolu eşitlikte yerine yazılırsa $c^6 - 5c^4 + 4c^2 = 0$ eşitliğine ulaşılır ki buradan $c = 1$ in denklemin bir kökü olduğu açıktır. Kolaylık olması için $c = 1$ alalım. Tekrar (1) ve (2) nolu eşitliklere dönersek;

$$4bd = 8 \Rightarrow bd = 2 \tag{4}$$

ve

$$b^2 + d^2 = 0 \tag{5}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada b ile d kompleks eşlenik kökler olup,

$$b = 1 + i \quad \text{ve} \quad d = 1 - i$$

bulunur.

Bulduğumuz c, b ve d değerlerini C circulant matriste yerine yazarak

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 1 & 1-i \\ 1-i & 0 & 1+i & 1 \\ 1 & 1-i & 0 & 1+i \\ 1+i & 1 & 1-i & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

elde edilir.Buradan özdeğer polinomu tanımlarsak;

$$q(t) = (1+i)t + t^2 + (1-i)t^3$$

elde edilir. Şimdi bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden köklerini yerine yazarak C circulant matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$q(1) = 1 + i + 1 + 1 - i = 3\,,$$

$$q(-1) = -1 - i + 1 - 1 + i = -1\,,$$

$$q(i) = i - 1 - 1 - i - 1 = -3$$

ve

$$q(-i) = -i + 1 - 1 + i + 1 = 1$$

bulunur ki bu özdeğerler aynı zamanda $p(x)$ polinomunun kökleridir.

Örnek 4.3.2. $p(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27$ polinomunun köklerini circulant matrisler yardımıyla hesaplayalım.

$p(x)$ polinomunda öncelikle $x = x + 2$ değişken değişimi yaparsak

$$p(x) = (x+2)^4 - 6(x+2)^2 + 8(x+2) - 27$$

ve buradan

$$p(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$$

indirgenmiş polinomuna ulaşılır.

Çözüm için genel indirgenmiş $4x4$ Circulant olarak

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

matrisini alır ve karakteristik polinomu hesaplarsak

$$x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2$$

bulunur. Burada son elde ettiğimiz $p(x)$ polinomu ile circulant matrisin karakteristik polinomunu eşitlersek aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$4bd + 2c^2 = 6 \qquad (1)$$

$$4c(b^2 + d^2) = -8 \qquad (2)$$

$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = -3 \qquad (3)$$

(1) ve (2) nolu eşitlikler (3) nolu eşitlikte yerine yazılırsa $c^6 - 3c^4 + 3c^2 - 1 = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu denklemin köklerinden biri olan -1 için $c = -1$ kabul ederek çözüme devam edersek (1) ve (2) nolu eşitliklerden

$$bd = 1 \text{ ve } b^2 + d^2 = 2$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $b = d = 1$ bulunur.

Bulduğumuz b, c ve d değerlerini C circulant matriste yerine yazarak

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

elde edilir.Buradan özdeğer polinomu tanımlarsak;

$$q(t) = t - t^2 + t^3$$

elde edilir. Şimdi bu özdeğer polinomunda birimin dördüncü dereceden köklerini yerine yazarak C circulant matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$q(1) = 1 - 1 + 1 = 1$,

$q(-1) = -1 - 1 - 1 = -3$,

$q(i) = i + 1 - i = 1$

ve

$q(-i) = -i + 1 + i = 1$

bulunur. Burada asıl $p(x)$ polinomunun köklerini bulmak için tekrar $x_j = q(j) + 2$ dönüşümü yaparsak,

$$x_1 = q(1) + 2 = 1 + 2 = 3\,,$$

$$x_2 = q(-1) + 2 = -3 + 2 = -1\,,$$

$$x_3 = q(i) + 2 = 1 + 2 = 3$$

ve

$$x_4 = q(-i) + 2 = 1 + 2 = 3$$

değerlerini buluruz ve böylece çözüm tamamlanır.

5.BÖLÜM
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, circulant matrisler tanıtıldıktan sonra, ilk olarak circulant matrislerin özdeğerlerinin polinomlar yardımıyla bulunuşu incelenmiştir. Herhangi bir matrisin özdeğerlerinin hesaplanması matris cebiri gerektiren bir işlem olmasına karşın; circulant matrislerin öz değerlerini hesaplamada kullanılan bu yöntem, circulant matrisler ile polinomlar arasındaki ilişkiye ışık tutmuştur. Çalışmada ikinci olarak circulant matrisler ile polinom çözümleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Polinom çözümleri cebirin temel konusu olup yüzyıllardır farklı metotlar ele alınmıştır. Özellikle derecesi 5 den büyük olan polinomların çözümleri daima sıkıntılı olmuştur. Bu yüzden polinom çözümleri ile circulant matrisler arasında bulunan bu ilişki zahmetli olmasına rağmen oldukça etkileyicidir.

Circulant matrisler ile yakın benzerlik gösteren matrislerle (örneğin Toeplitz matrisler gibi) polinomların çözümleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/Fall2002/dfrank/presentation.pdf

www.math.cudenver.edu/rrosterm/circulant/circulant.htm

Kalman, D. and White, J., 2001, Polinomial Equations and Circulant Matrices, Fortcoming Monthly article: November, pp. 821-840.

www.donkalmon.net/preprints

Bozkurt, D. ve Türen, B., 2003, Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfı Yayınları, Konya.

Ardahan, H., 1993, Kompleks Sayılar Teorisi ve Elemanter Fonksiyonlar, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya.