T. C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$A\ X\ B = C$ MATRİS DENKLEMİNİN İTERATİF ÇÖZÜMLERİ

Orhan Veli ŞAHİNBAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz–2010
KONYA

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$AXB = C$ MATRİS DENKLEMİNİN İTERATİF ÇÖZÜMLERİ

Orhan Veli ŞAHİNBAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 30.07.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Kemal AYDIN	Prof.Dr. Şaziye YÜKSEL	Yrd.Doç.Dr. Ahmet DUMAN
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

A X B = *C* MATRİS DENKLEMİNİN İTERATİF ÇÖZÜMLERİ

Orhan Veli ŞAHİNBAY

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Kemal AYDIN

2010, 40 Sayfa

Jüri
Danışman : Doç. Dr. Kemal AYDIN
Jüri 1 : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Jüri 2 : Yrd. Doç. Dr. Ahmet DUMAN

Bu çalışmada, $A\ X\ B = C$ matris denkleminin iteratif çözümlerini inceledik. Lineer cebirsel denklem sistemlerini çözmek için Keskin ve Aydın (2007) de verilen "İteratif Boyut İndirgeme Metodu"yla bu problemin iteratif çözümlerini hesaplamak için bir metod geliştirdik. Ayrıca bazı nümerik örnekler de verdik.

Bu metod üzerine kurgulanan bir algoritma ve bir bilgisayar programı verdik. Bu çalışmada verilen metod ve algoritma, bir düzenli matrisin tersini IDDM ile hesaplamak için Çıbıkdiken ve Aydın (2008) verilen metod ve algoritmanın modifikasyonu ve genelleştirilmesidir.

Anahtar Kelimeler: Matris denklemi, İteratif metot, Boyut indirgeme metodu.

ABSTRACT
Ms. Thesis

ITERATIVE SOLUTIONS OF THE MATRIX EQUATION *A X B = C*

Orhan Veli ŞAHİNBAY

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Kemal AYDIN

2010, 40 Pages

Jury
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Kemal AYDIN
Jury 1 : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Jury 2 : Asist. Prof. Dr. Ahmet DUMAN

In this study, we have investigated the iterative solutions of matrix equation $A\ X\ B = C$. We have developed a method to calculate the iterative solutions of this problem with Iterative Decreasing Dimension Method (IDDM) that its given in Keskin and Aydın (2007) to solve the linear algebraic equations systems. So we also have given some numerical examples.

Additionally, we have given an algorithm in based on this method and a computer implementation. Given method and algorithm are the modification and the generalization of the method and the algorithm in Çıbıkdiken and Aydın (2008) to calculate inverse of given regular matrix with IDDM.

Keywords: Matrix Equation, Iterative Method, Decreasing Dimension Method

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Kemal AYDIN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım esnasında beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Doç.Dr. Kemal AYDIN'a ve "Maple Programı"nın hazırlanmasındaki katkılarından dolayı Dr. Ali Osman ÇIBIKDİKEN'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Orhan Veli ŞAHİNBAY

KONYA–2010

KULLANILAN SEMBOLLER

Y_l	indirgenen sistemin çözüm vektörü	m-vektör
$I_l^{(k)}$	indirgenen sistemin sağ taraf vektörü	m-vektör
$0_{p\times q}$	sıfır matrisi	$p\times q$ matris
$I_{p\times p}$	birim matrisi	$p\times p$ kare matris
$u_l^{(k)}$	$I_l^{(k)}$ nın 1.elemanından oluşan vektör	1-vektör
$v_l^{(k)}$	$I_l^{(k)}$ nın diğer elemanlarından oluşan vektör	$(m-1)$-vektör
$Y_{lö}^{(k)}$	$A_1^{(k)}\,Y_l^{(k)} = u_l^{(k)}$ sisteminin *bir* özel çözümü	m-vektör
$Y_{lh}^{(k)}$	$A_1^{(k)}\,Y_l^{(k)} = 0$ sisteminin çözümü	m-vektör
$(B^T)_1^{(k)}$	$(B^T)^{(k)}$ matrisinin 1. satır vektöründen oluşan matris	$1\times m$ matris
$b_{1s}^{(k)}$	$(B^T)_1^{(k)}$ matrisinin sıfırdan farklı ilk elemanı	skaler
$(B^T)_2^{(k)}$	$(B^T)^{(k)}$ matrisinin diğer satır vektörlerinden oluşan matris	$(m-1)\times m$ matris
$(X^T)_{lö}^{(k)}$	$(B^T)_1^{(k)}(X^T)_l^{(k)} = u_l^{(k)}$ sisteminin bir özel çözümü	m −vektör
$(X^T)_{lh}^{(k)}$	$(B^T)_1^{(k)}(X^T)_l^{(k)} = 0$ sisteminin çözümü	m −vektör

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Lineer denklem sistemleri matematikte olduğu kadar fizik, mühendislik, iktisat gibi alanlarda sıkça karşılaşılan problemlere model olmuştur. Kararlılık ve kontrol teorisi gibi birçok uygulama alanında, çözümlerine göre karar verilen matris denklemleri ile karşılaşılmaktadır. Genel olarak Sylvester matris denklemleri, Lyapunov matris denklemleri bu tür matris denklemlerine birer örnektir.

Ayrıca $A\,X\,B = C$, $A\,X\,B + C\,X\,D = E$, $A\,X\,B + C\,X^T D = E$ ve $A\,X = B$, $X\,C = D$, $X - A\,X\,B = C$ gibi matris denklemleri de bilimin farklı alanlarında kullanılmaktadır. Son yıllarda, $A\,x = f$ lineer denklem sistemleri için literatürde var olan bazı iteratif yöntemler kullanılarak

$$A\,X\,B = C\,;\quad A, B\,, C \text{ n-kare matris}$$

matris denkleminin iteratif çözümleri çalışılan bir problemdir. Bu konuda, literatürde elde edilmiş çok sayıda bilimsel çalışmalar da bulunmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, $A\ X\ B = C$ matris denkleminin çözümlerinin daha önce incelenmemiş iteratif bir yöntemle çözümlerini araştırmak ve literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırmaktır.

Kontrol teorisi ve kararlılık teorisinde sıkça karşılaşıldığı gibi birçok mühendislik probleminin kontrol edilebilirliğinin veya kararlı olup olmadığının tespit edilmesinde matris denklemlerinin çözümlerinin incelenmesinin önemli bir yer tuttuğu iyi bilinmektedir. Mesela

$$\frac{dx}{dt} = A\,x(t)\,;\, A - n \text{ kare matris},\ x\ \text{- } N \text{ vektör}$$

diferensiyel denklem sistemi ile ifade edilebilen bütün problemlerin kararlı olup olmadığının tespiti için farklı kararlılık kriterlerinin yanında

$$A^*H + HA + I = 0$$

Lyapunov Matris Denkleminin $H = H^* > 0$ olan çözümünün olup olmaması da önemli bir kriter olarak uygulanmaktadır. Bu kriter literatürde İkinci Lyapunov Kriteri olarak ta bilinmektedir.

$$A\,X\,B + C\,X\,D = F$$

Genelleştirilmiş Sylvester Matris Denkleminin genel olarak sistem teoride uygulama alanları oldukça geniştir. Sürekli ve kesikli sistemler için Lyapunov matris denklemleri, genelleştirilmiş Sylvester Matris Denklemlerinin birer özel durumları olduğu da dikkate alınırsa

$$A\,X\,B = C\,;\quad A,\,B\,,\,C \text{ n-kare matris}$$

matris denkleminin çözümlerinin var olup olmaması, varsa tam çözümünün veya istenilen yaklaşıklıkla çözümün bulunması oldukça önemlidir. Sistem teoride karşılaşılan bu tür problemlerde matrislerin boyutları büyük olabilmekte ve tam çözüm bulmak zorlaşabilmekte veya maaliyetli olabilmektedir. Bu yüzden bu tür problemlerde genellikle iteratif yöntemler tercih edilmektedir.

1.1. Literatür Özeti

Son yıllarda, $A\,x = f$ lineer denklem sistemleri için literatürde var olan direk veya iteratif yöntemler kullanılarak $A\,X\,B + C\,X\,D = F$ Genelleştirilmiş Sylvester Matris Denklemi ve *bazı özel durumlarının* çözümleri üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmıştır.

Bulgak ve Bulgak (2001) de, lineer cebirin kavramları verilmiş, ayrıca lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri için iteratif yöntemler verilmiştir.

Wang ve Jiang (2000) çalışmalarında, lineer denklem sistemlerinin çözümü için, *boyut indirgeme metodu* olarak adlandırılan bir metot önermişlerdir. Bu yöntemin özellikle büyük boyutlu lineer denklem sistemlerinin çözümünü kolaylaştırdığı ve boyutunu indirgediği iddia edilmiştir.

Zhang (2002) de, Wang ve Jiang (2000) de öne sürülen boyut indirgeme metodunun aslında Schur Ayrışım Metodu'ndan (Schur Decomposition Method) farklı olmadığı, bu metodun bir türü olduğu ve aslında Wang ve Jiang'ın boyut indirgeme metodunun bir boyut indirgeme metodu olmadığı ifade edilmiştir. Ayrıca Zhang (2002) e göre, boyut indirgeme metodu, bulunması gereken daha fazla bilinmeyen olduğundan, Schur Ayrışım Metodu'ndan (Schur Decomposition Method) daha külfetlidir.

Keskin (2005) ve Keskin ve Aydın (2007) de, $A\,x = f$ lineer denklem sistemi için boyut indirgeme algoritmaları ve Schur Ayrışım Yöntemi incelenerek, Wang ve Jiang (2000) de önerilen metodun olumsuzluklarını ortadan kaldıran ve her bir adımda bir boyut indirgeyen yeni bir "*İteratif Boyut İndirgeme Metodu* - IDDM" metot ve bu metot için bir "*İteratif Boyut İndirgeme Algoritması* - IDDA" verilmiş, bazı metotlarla da karşılaştırmaları nümerik örneklerle yapılmıştır.

Bulgakov ve Godunov (1978) de, lineer denklem sistemleri için çözüm yöntemi olan Conjugate Gradient Yöntem yardımıyla uygulamada oldukça öneme sahip, Sylvester Matris Denkleminin bir özel durumu olan $A^{*}H + HA + I = 0$ Lyapunov Matris Denkleminin çözümleri için algoritma vermişlerdir.

Bulgakov ve Godunov (1985) de, Bulgakov ve Godunov (1978) de verilen algoritmanın hata analizi yapılmıştır.

Xu ve ark. (1998) de Genelleştirilmiş Sylvester matris denklemi $A\,X\,B + C\,X\,D = F$ ve $A\,X\,B = F$ Sylvester matris denklemlerinin iteratif metodlarla çözümleri incelenmiştir.

Mukaidani ve ark. (2001) de genelleştirilmiş Lyapunov matris denklemi ve Riccati matris denklemi için bir iteratif yöntem tartışılmıştır.

Jiang ve Wei (2003) de, A, B, $C \in C^{n\times n}$ olmak üzere $X - A\,X\,B = C$ ve $X - A\,\bar{X}\,B = C$ matris denklemlerinin açık çözümleri karakteristik polinom yöntemiyle elde edilmiştir.

Ding ve Chen (2005) de, lineer denklem sistemlerinin iteratif çözümleri için bilinen Jacobi ve Gauss-Siedel yöntemleri çift Sylvester matris denklemlerin çözümlerine genişletilmiştir.

Peng ve ark. (2005) de, $A\,X\,B = C$ matris denkleminin optimal yaklaşık çözümleri ve simetrik çözümleri için bir iteratif yöntem geliştirilmiş, bu yöntemle verilen matris denklemi *uygun* olduğunda denklemin çözülebilirliğinin otomatik olarak elde edildiği iddia edilmektedir.

Peng (2005) de, $A\,X\,B = C$ matris denkleminin simetrik çözümlerini bulmak için $R = AXB - C$ kalan matrisinin normunun minimizasyonu için bir iteratif yöntem verilmiştir. Bu yöntemin simetrik bir başlangıç matrisi ile başlandığında yuvarlama hataları olmaksızın sonlu iterasyonla çözümün elde edildiği ifade edilmiştir.

Sheng ve Chen (2007) de, $(A\,X\,B,\ C\,X\,D) = (E,\ F)$ şeklinde verilen çift matris denkleminin çözümleri için etkili bir iteratif yöntem verilmiş, bu yöntemle aynı zamanda matris denklemlerinin çözülebilirliğinin tespit edilebildiği gösterilmiştir.

Wang ve ark. (2007) de, $A\,X\,B + C\,X^{T}\,D = E$ matris denkleminin çözümü için iki iteratif algoritma verilmiş, bu algoritmalardan birisi matris denklemi *uygun* iken, diğeri ise *uygun değil* iken kullanılmaktadır ve bu algoritmalarla yuvarlama hataları olmaksızın sonlu iterasyonla çözümün elde edildiği ifade edilmektedir.

Fanliang ve ark. (2008) de ($A\ X = B$, $X\ C = D$) matris denklem çiftinin çözümleri incelenmiş, ayrıca çözülebilirlik için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Ding ve ark. (2008) de, Ding ve Chen (2005) de yapılan genişletme çalışması bazı özel denklemler için geliştirilmiş, ayrıca iteratif algoritmaların hata analizi de yapılmıştır. Algoritmaların etkinlikleri örneklerle incelenmiştir.

Çıbıkdiken ve Aydın (2008) de, IDDM yardımıyla $A\ X = I$ (A - n kare düzenli, I – birim matris) matris denklemi çözülerek ters matris hesaplayan algoritma ve bilgisayar programı verilmiştir.

Biz bu çalışmada, Keskin (2005) ve Keskin ve Aydın (2007) de tanıtılan IDDM yöntemiyle ve bu yöntemin Çıbıkdiken ve Aydın (2008) de $A\ X = I$ (A - n kare düzenli, I – birim matris) matris denklemine uygulanmasına benzer olarak

$$A\,X\,B = C\ ;\quad A, B, C \in \boldsymbol{R}^{n\times n},\ \ A, B\ \text{ düzenli matris}$$

matris denkleminin iteratif çözümünü inceleyeceğiz.

1.2. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, problem tanıtılmış ve literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmada geçen bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $f \in \boldsymbol{R}^{n}$, A düzenli matris olmak üzere $A\,x = f$ lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü için geliştirilen IDDM nin (Keskin, 2005; Keskin ve Aydın, 2007) tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ düzenli matris, I n-kare birim matris olmak üzere $A\ X = I$ matris denkleminin çözümüne IDDM nin uygulanması ile elde edilen ters matris bulma yöntemi ve algoritması (Çıbıkdiken ve Aydın 2008) tanıtılmıştır. Beşinci bölümde ise Keskin (2005), Keskin ve Aydın (2007) de tanıtılan IDDM yöntemiyle ve bu yöntemin Çıbıkdiken ve Aydın (2008) de $A\ X = I$ (A - n kare düzenli, I – birim matris) matris denklemine uygulanmasına benzer olarak

$$A\,X\,B = C\ ;\quad A, B, C \in \boldsymbol{R}^{n\times n},\ \ A, B\ \text{ düzenli matris}$$

matris denkleminin iteratif çözümü için bir algoritma ve bilgisayar programı verilmiştir.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada geçen bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Bu kavramlar, cisim ve vektör uzay kavramları biliniyor kabul edilmek üzere, lineer bağımlılık ve bağımsızlık, vektör uzayının bir tabanı, lineer denklem sistemlerinin çözümü ve çözümünün varlığı, homojen lineer denklem sistemlerinin çözüm uzayı gibi temel kavramlardır. Literatürde iyi bilinen bu kavramlar lineer cebir kitaplarının hepsinde rahatlıkla bulunabilecek kavramlardır. Bu bölümde verilen temel bilgiler Akbulut (1985), Morris (1990), Taşçı (1999), Bulgak ve Bulgak (2001) kaynaklarından alınmıştır.

2.1. Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

V, *K* cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ V olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği sadece $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ iken sağlanıyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine veya $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesine lineer bağımsızdır denir. Aksi taktirde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine veya $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesine lineer bağımlıdır denir.

2.2. Alt Vektör Uzayı ve Taban

V, *K* cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ V olmak üzere

$$\text{U} = \{y : y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;,\; \alpha_i \in K \; (i = 1, 2, \ldots, n)\} \subset \text{V}$$

Kümesi, V deki bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre *K* cismi üzerinde bir vektör uzaydır. Bu tür vektör uzaylarına V vektör uzayının *alt vektör uzayı* denir.

Ayrıca U kümesine $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi tarafından *gerilmekte*dir veya *üretilmekte*dir denir ve genellikle U = *span*$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şeklinde gösterilir.

Bir vektör uzayını geren ve lineer bağımsız olan vektörlerin kümesine vektör uzayın *bir bazı* veya *bir tabanı* adı verilir. Bir vektör uzayının bir bazı *n* tane vektörden oluşuyorsa vektör uzayının *boyutu n* dir denir.

2.3. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü ve Çözümlerin Varlığı

A $m \times n$ boyutlu bir matris, f m boyutlu vektör ve x n boyutlu bilinmeyen vektörü olmak üzere

$$A\,x = f \tag{2.1}$$

lineer denklem sistemini ele alalım. (2.1) lineer denklem sistemini *sağlayan* her hangi bir x vektörüne *lineer denklem sisteminin bir çözümü* denir. $x_{ö}$, (2.1) sisteminin bir çözümü ve x_h, da $A\,x = 0$ denklem sisteminin bir çözümü ise o takdirde $x = x_{ö} + x_h$ vektörü (2.1) lineer denklem sisteminin genel çözümüdür.

Lineer denklem sistemlerinin çözümleri için,

- *tek* çözümü var,
- *sonsuz* çözümü var,
- *çözümü yok*,

durumları söz konusudur.

Bu durumları kısaca açıklayalım; Bir matrisin rankı, matrisin lineer bağımsız satır sayısı ve $[A{:}f]$ matrisinin de ek matris olduğunu hatırlayarak, $A\,x = f$ lineer denklem sistemi için

$$\mathrm{rank}[A{:}f] = \mathrm{rank}(A)$$

şartı sağlanıyorsa sistem *tutarlı*dır, aksi halde *tutarsız*dır denir. Sistemin tutarlı olması durumunda çözümü mevcut, tutarsız olması durumunda ise çözümü yoktur. Sistemin tutarlı olması durumunda ise,

- $n = r$ ise sistemin tek çözümü,
- $n > r$ ise sistemin n-r parametreye bağlı sonsuz çözümü,

vardır.

2.4. Homojen Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Uzayı

$A\,x = 0$ homojen lineer denklem sisteminin çözümlerinden oluşan

$$\mathrm{U} = \{x : A\,x = 0\}$$

kümesine homojen lineer denklem sisteminin *çözüm uzayı* denir ve çözüm uzayı n boyutlu vektör uzayın alt vektör uzayıdır.

Örnek 2.1. ***R*** cismi üzerinde, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ lineer denklem sisteminin çözüm uzayını ve bu uzayın bir bazını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm. Verilen lineer denklem sistemini

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (0)$$

şeklinde de yazabiliriz. rank(1 -1 1) = $r = 1$ ve $n = 3$ olduğundan 2 parametreye bağlı sonsuz çözüm mevcuttur. Verilen sistemden $x_2 = x_1 + x_3$ olup, buradan

$$x_1 = a,\ x_3 = b\ ,\ a, b \in \boldsymbol{R} \Rightarrow x_2 = a + b$$

olur. Böylece çözüm uzayı

$$U = \{x = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \boldsymbol{R}\ \} = \{x = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b \in \boldsymbol{R}\ \}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

olduğu açıktır ve vektörler lineer bağımsız olduğundan çözüm uzayının bir bazı

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

kümesidir. U nun boyutu ise 2 dir.

3. İTERATİF BOYUT İNDİRGEME METODU (IDDM)

Bu bölümde, Keskin ve Aydın (2007) da verilmiş olan IDDM metodunun bir özeti verilmiştir. Ayrıca bu bölümde Keskin ve Aydın (2007) daki semboller kullanılmıştır.

3.1. Semboller

k	iterasyon sayısı ($k = 1,2,\dots,n$)	$k = 1(1)n$
m	indirgenen katsayı matrisinin boyutu	$m = n - k + 1$
$A^{(k)}$	indirgenen katsayı matrisi	$m \times m$ matris
$X^{(k)}$	indirgenen sistemlerin çözüm vektörü	$(n - k + 1) \times 1$ vektör
$f^{(k)}$	indirgenen sistemin sağ taraf vektörü	$m \times 1$ vektör
$A_1^{(k)}$	$A^{(k)}$ matrisinin 1. satır vektöründen oluşan matris	$1 \times m$ matris
$a_{1s}^{(k)}$	$A_1^{(k)}$ nin sıfırdan farklı ilk elemanı	skaler
$A_2^{(k)}$	$A^{(k)}$ matrisinin diğer satır vektörlerinden oluşan matris	$(m-1) \times m$ matris
$u^{(k)}$	$f^{(k)}$ vektörünün 1. elemanından oluşan vektör	1×1 vektör
$v^{(k)}$	$f^{(k)}$ vektörünün diğer elemanlarından oluşan vektör	$(m-1) \times 1$ vektör
$a_{ij}^{(k)}$	$A^{(k)}$ matrisinin, *i-j*. elemanı	skaler
$x_i^{(k)}$	$X^{(k)}$ vektörünün *i*. elemanı	skaler
$f_i^{(k)}$	$f^{(k)}$ vektörünün *i*. elemanı	skaler
$X_0^{(k)}$	$A_1^{(k)} X^{(k)} = u^{(k)}$ lineer denklem isteminin özel çözümü	1× m vektör
$R^{(k)}$	$A_1^{(k)} X^{(k)} = 0$ homojen lineer denklem sisteminin çözüm uzayının baz vektörlerinden oluşan matris	$m \times (m-1)$ matris

3.2. Metot

Keskin ve Aydın (2007) de, Wang ve Jiang (2000) de tanıtılan boyut indirgeme yönteminin A düzenli matrisinin parçalanışına bağlı olarak bazı olumsuz taraflarını ifade etmiş, A düzenli matrisinin farklı parçalanışını kullanarak bahsedilen olumsuzlukları ortadan kaldırmış, her bir adımda bir boyut indirgeyen metod verilmiştir.

Bu metod kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir;

$Ax = f$; A, *n* boyutlu düzenli matris, x ve f, *n* boyutlu vektör lineer cebirsel denklem sistemini ele alalım. $k = 1(1)n$ iterasyon sayısı, $m = n - k + 1$ ise indirgenen katsayı matrisi $A^{(k)}$ matrisi ve $f^{(k)}$ indirgenen sistemin sağ taraf vektörünün boyutlarıdır.

$$A_1^{(k)} = (a_{1j}^{(k)})^{j=1(1)m},\ A_2^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{i=2(1)m}^{j=1(1)m},\ v^{(k)} = (f_i^{(k)})_{i=2(1)m}$$

olmak üzere indirgenen sistemin katsayı matrisi ve sağ taraf vektörü

$$A^{(k)} = \begin{cases} A & k = 1 \\ A_2^{(k-1)} R^{(k-1)} & k = 2(1)n \end{cases};\quad f^{(k)} = \begin{cases} f & k = 1 \\ v^{(k-1)} - A_2^{(k-1)} X_0^{(k-1)} & k = 2(1)n \end{cases}$$

indirgeme denklemleriyle verilmektedir. *İndirgenmiş lineer denklem sistemi* ise

$$A^{(k)} x^{(k)} = f^{(k)}$$

olarak elde edilmektedir. Bu indirgenmiş lineer denklem sisteminin bir özel çözümü ise

$$X_0^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{f_1^{(k)}}{a_{1s}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$$

ile verilmektedir.

$$R^{(k)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r_{1\times(m-1)}^{(k)} \\ I_{(m-1)\times(m-1)} \end{pmatrix}, & s = 1 \\ \begin{pmatrix} I_{(s-1)\times(s-1)} & 0_{(s-1)\times(m-s)} \\ 0_{1\times(s-1)} & r_{1\times(m-s)}^{(k)} \\ 0_{(m-s)\times(s-1)} & I_{(m-s)\times(m-s)} \end{pmatrix}, & s = 2(1)m-1 \\ \begin{pmatrix} I_{(m-1)\times(m-1)} \\ 0_{1\times(m-1)} \end{pmatrix}, & s = m \end{cases}$$

şeklinde verilen matris ise $A_1^{(k)} x^{(k)} = 0$ homojen lineer denklem sisteminin çözüm uzayının baz vektörlerinden oluşan bir matristir.

Böylece verilen $Ax = f$ lineer denklem sisteminin çözümü,

$$X = X^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) X_0^{(i)} \quad ; \quad \prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} = \begin{cases} R^{(1)} R^{(2)} \ldots R^{(i-1)}; & i > 1 \\ I; & i = 1 \end{cases}$$

ile verilmektedir (Keskin, 2005; Keskin ve Aydın, 2007).

3.3. IDDM İçin Bir Uygulama

$$6x_1+2x_2+x_3= -5$$
$$-x_1-3x_2+2x_3= 1$$
$$-2x_1+x_2-3x_3= -5$$

lineer denklem sistemini yukarıdaki metot ile çözelim.

0. adım (Giriş Elemanları):

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad n = 3$$

değerleri girilir. Burada A düzenli matristir.

Adım 1. $k = 1$ için $m = n - k + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$ hesaplanır.

$A^{(1)}=A$, $f^{(1)}=f$; $f_i^{(1)} = f_i$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ (i = 1, 2, …, m ; j = 1, 2, … , m) alınır.

Yeni lineer denklem sistemi;

$$A^{(1)} X^{(1)} = f^{(1)}$$

olur.

1.1. $A_1^{(1)} = [6 \quad 2 \quad 1]$, $A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$u^{(1)} = [-5]$, $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

1.2. $1 \le j \le 3$ için $a_{1j}^{(1)} \neq 0$ olup olmadığı kontrol edilirse

$$a_{11}^{(1)} = 6 \neq 0 \,, \qquad s = s_1 = 1$$

olur.

1.3. $X_0^{(1)}$seçilirse; $X_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ olur.

1.4. $r^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{1(s+1)}^{(1)}}{a_{1s}^{(1)}} & -\frac{a_{1(s+2)}^{(1)}}{a_{1s}^{(1)}} \end{bmatrix}$ den

$$r^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

1.5. $R^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

1.6. $X^{(2)}$ parametrik olarak; $X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}^T$ şeklinde alınır.

Adım 2. $k = 2$ için $m = n - k + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ olur. $A^{(2)}$ ve $f^{(2)}$

$$A^{(2)} = A_2^{(1)} R^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{10}{6} & -\frac{16}{6} \end{bmatrix}$$

$$f^{(2)} = v^{(1)} - A_2^{(1)} X_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{40}{6} \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Yeni lineer denklem sistemi;

$$A^{(2)} X^{(2)} = f^{(2)}$$

olur.

2.1. $A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{6} & \frac{13}{6} \end{bmatrix}$, $A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{10}{6} & -\frac{16}{6} \end{bmatrix}$, $u^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{40}{6} \end{bmatrix}$ olur.

2.2. $1 \leq j \leq 2$ için $a_{1j}^{(2)} \neq 0$ olup olmadığı kontrol edilirse

$$a_{11}^{(2)} = -\frac{16}{6} \neq 0, \quad s = 1$$

olur.

2.3. $X_0^{(2)}$seçilirse; $X_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}^T$ olur.

2.4. $r^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{1(s+1)}^{(2)}}{a_{1s}^{(2)}} \end{bmatrix}$ den $r^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{13}{16} \end{bmatrix}$ olarak hesaplanır.

2.5. s=1 olup $R^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & 1 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.6. $X^{(3)}$ parametrik olarak; $X^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1^{(3)} \end{bmatrix}^T$ şeklinde alınır.

Adım 3. $k = 3$ için $m = n - k + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$ olur. $A^{(3)}$ ve $f^{(3)}$ hesaplanırsa;

$$A^{(3)} = A_2^{(2)} R^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{10}{6} & -\frac{16}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{16} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{126}{96} \end{bmatrix}$$

$$f^{(3)} = v^{(2)} - A_2^{(2)} X_0^{(2)} = \left[-\frac{40}{6}\right] - \left[\frac{10}{6} \quad -\frac{16}{6}\right] \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix} = \left[-\frac{630}{96}\right]$$

şeklinde hesaplanır. Yeni lineer denklem sistemi; $A^{(3)}\, X^{(3)} = f^{(3)}$ olup, $X^{(3)}$ hesaplanırsa;

$$X^{(3)} = \left[x_1^{(3)}\right] = \left[\frac{f_1^{(3)}}{a_{11}^{(3)}}\right] = \left[\frac{-\frac{630}{96}}{-\frac{126}{96}}\right] = \left[\frac{630}{126}\right] = X_0^{(3)}$$

olacaktır.

Adım 4.(Çıkış Elemanı) Aradığımız çözüm

$$X = X^{(1)} = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) X_0^{(i)} = I X_0^{(1)} + R^{(1)} X_0^{(2)} + R^{(1)} R^{(2)} X_0^{(3)}$$

$$X = X^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{13}{16} \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{630}{126}\right] = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

4. IDDM YARDIMIYLA BİR MATRİSİN TERSİNİ BULMA

Bu bölümde, Çıbıkdiken ve Aydın (2008) da verilmiş olan, IDDM kullanarak verilen düzenli matrisin tersini bulan metodun bir özeti verilmiştir. Ayrıca bu bölümdeki semboller, 3.1. kısmındaki semboller ve bu sembollere ek olarak bazı semboller aşağıda verilmiştir.

4.1. Semboller

Y_l	indirgenen sistemin çözüm vektörü	m-vektör
$I_l^{(k)}$	indirgenen sistemin sağ taraf vektörü	m-vektör
$0_{p\times q}$	sıfır matrisi	$p\times q$ matris
$I_{p\times p}$	birim matrisi	$p\times p$ kare matris
$u_l^{(k)}$	$I_l^{(k)}$ nın 1.elemanından oluşan vektör	1-vektör
$v_l^{(k)}$	$I_l^{(k)}$ nın diğer elemanlarından oluşan vektör	$(m-1)$-vektör
$Y_{lö}^{(k)}$	$A_1^{(k)}\, Y_l^{(k)} = u_l^{(k)}$ sisteminin *bir* özel çözümü	m-vektör
$Y_{lh}^{(k)}$	$A_1^{(k)}\, Y_l^{(k)} = 0$ sisteminin çözümü	m-vektör

4.2. Metot

$$I_l = (I_{il}),\ \ i, l = 1(1)n\ ;\ I_{il} = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$A\, Y_l = I_l\ \ ;\ \ l = 1(1)n$$

lineer denklem sistemlerini ele alalım. Şimdi $l = 1$ *için*

$$A\, Y_1 = A^{(1)}\, Y_1^{(1)} = I_1^{(1)} = I_1$$

şeklinde elde edilen sisteme 3.2. kısımda tanıtılan IDDM metodu uygulanarak sisteminin genel çözümü

$$Y_1 = Y_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)}\right) Y_{1ö}^{(i)}$$

vektörü bulunur. Burada $Y_{1ö}^{(1)}$ vektörü $A_1^{(1)}\, Y_1^{(1)} = u_1^{(1)}$ sisteminin bir özel çözümüdür.

$$A\, Y_l = I_l\,, \quad l = 2(1)n$$

sistemlerinin her birine IDDM tekrar tekrar uygulanarak

$$Y_l = Y_l^{(1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)}\right) Y_{lö}^{(i)}, \quad l = 2(1)n$$

vektörleri elde edilir.

Şimdi $A\ Y = I$ matris denkleminin çözümü olan A matrisinin tersini veren teoremi verelim.

Teorem 1. A düzenli matris, I–birim matris olmak üzere $A\ Y = I$ sisteminin çözümü,

$$Y = A^{-1} = [Y_1\ Y_2 \ldots Y_n]\,; \quad Y_l = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)}\right) Y_{lö}^{(i)}, \quad l = 1(1)n$$

dir. Burada $\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} = \begin{cases} R^{(1)} R^{(2)} \ldots R^{(i-1)} & ;\ i > 1 \\ I & ;\ i = 1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanmaktadır (Çıbıkdiken ve Aydın, 2008).

4.3. IDDM Yardımıyla Matris Tersi İçin Bir Uygulama

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım.

Veri: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Adım 1. $k = 1$ alınır, $n = 3,\ m = 3$ olur.

1.1.1. $A_1^{(1)} = [2 \quad 3 \quad -4]$, $A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

1.1.2. $1 \le j \le 3$ için $a_{1j}^{(1)} \ne 0$ olup olmadığı kontrol edilirse $a_{11}^{(1)} = 2 \ne 0$ ve $s = s_1 = 1$ olur.

1.1.3. $r^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$ olarak hesaplanır.

1.1.4. $R^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

1.1.5. $A^{(2)} = A_2^{(1)} R^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur.

$\boldsymbol{k = 2}$ **alınır**, $m = 2$ olur.

1.2.1. $A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

1.2.2. $1 \leq j \leq 2$ için $a_{1j}^{(2)} \neq 0$ olup olmadığı kontrol edilirse

$$a_{11}^{(2)} = -\frac{3}{2} \neq 0, \quad s = s_2 = 1$$

olur.

1.2.3. $r^{(2)} = [2]$, olarak hesaplanır.

1.2.4. $R^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

1.2.5. $A^{(3)} = A_2^{(2)} R^{(2)} = [-3]$ bulunur.

Adım 2. $\boldsymbol{l = 1}$ için $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur.

2.1.1. $I_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.1.2. $\boldsymbol{k=1}$, $m=3$, $s=1$

2.1.2.1.1. $I_1^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_1^{(1)} = [1]$, $v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.1.2.1.2. $Y_{1ö}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.1.2.1.3. $I_1^{(2)} = v_1^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{1ö}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.1.2. $\boldsymbol{k=2}$, $m=2$, $s=1$

2.1.2.2.1. $I_1^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $v_1^{(2)} = [0]$ bulunur.

2.1.2.2.2. $Y_{1ö}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.1.2.2.3. $I_1^{(3)} = v_1^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{1ö}^{(2)}$ olup $I_1^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.1.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-3]$, $I_1^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$ olup $Y_{1ö}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.1.3.

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{1ö}^{(i)}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

olur.

***l* = 2 için,** $I_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur.

2.2.1. $I_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.2.2. ***k*=1**, *m*=3, *s*=1

2.2.2.1.1. $I_2^{(1)} = \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_2^{(1)} = [0]$, $v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.2.2.1.2. $Y_{2ö}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.2.2.1.3. $I_2^{(2)} = v_2^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{2ö}^{(1)}$ olup $I_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.2.2. ***k*=2**, *m*=2, *s*=1

2.2.2.2.1. $I_2^{(2)} = \begin{pmatrix} u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_2^{(2)} = [1]$, $v_2^{(2)} = [0]$ bulunur.

2.2.2.2.2. $Y_{2ö}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.2.2.2.3. $I_2^{(3)} = v_2^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{2ö}^{(2)}$ olup $I_2^{(3)} = \left[-\frac{4}{3}\right]^T$ bulunur.

2.2.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-3]$, $I_2^{(3)} = \left[-\frac{4}{3}\right]^T$ olup $Y_{2ö}^{(3)} = \left[\frac{4}{9}\right]^T$ bulunur.

2.2.3.

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{2ö}^{(i)}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{4}{9}\right] = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

olur.

$l = 3$ için, $I_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olur.

2.3.1. $I_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.3.2. ***k*=1**, *m*=3, *s*=1

2.3.2.1.1. $I_3^{(1)} = \begin{pmatrix} u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_3^{(1)} = [0]$, $v_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.3.2.1.2. $Y_{3ö}^{(1)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ bulunur.

2.3.2.1.3. $I_3^{(2)} = v_3^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{3ö}^{(1)}$ olup $I_3^{(2)} = [0 \quad 1]^T$ bulunur.

2.3.2. ***k*=2**, *m*=2, *s*=1

2.3.2.2.1. $I_3^{(2)} = \begin{pmatrix} u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_3^{(2)} = [0]$, $v_3^{(2)} = [1]$ bulunur.

2.3.2.2.2. $Y_{3ö}^{(2)} = [0 \quad 0]^T$ bulunur.

2.3.2.2.3. $I_3^{(3)} = v_3^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{3ö}^{(2)}$ olup $I_3^{(3)} = [1]^T$ bulunur.

2.3.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-3]$, $I_3^{(3)} = [1]^T$ olup $Y_{3ö}^{(3)} = \left[-\frac{1}{3}\right]^T$ bulunur.

2.3.3.

$$Y_3 = \sum_{i=1}^{3}\left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)}\right) Y_{3ö}^{(i)}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

olur.

Adım 3. $Y = A^{-1} = [\ Y_1\ Y_2\ Y_3\ ] = \begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ elde edilir.

5. $A\,X\,B = C$ MATRİS DENKLEMİNİN IDDM YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrisleri n boyutlu düzenli matrisler ve C, n boyutlu her hangi bir matris olmak üzere,

$$A\,X\,B = C \tag{5.1}$$

şeklindeki matris denklemini ele alalım. $X\,B = Y$ olarak alırsak matris denklemi

$$A\,Y = C \tag{5.2}$$

matris denklemine dönüşür. A düzenli olduğundan Y matrisinin varlığı ve tekliği açıktır ve iyi bilinmektedir. Y matrisi bulunduğunda X $B = Y$ matris denklemi elde edilir. X^T matrisi

$$B^T X^T = Y^T \tag{5.3}$$

matris denkleminin çözümü olmak üzere (5.1) in çözüm matrisinin X matrisi olduğu kolaylıkla görülür.

5.1. Semboller

Bu bölümde kullanılan semboller, 3.1. ve 4.1. kısımlarındaki sembollere ilaveten bazı semboller aşağıda ek olarak verilmiştir.

$(B^T)_1^{(k)}$	$(B^T)^{(k)}$ matrisinin 1. satır vektöründen oluşan matris	$1 \times m$ matris
$b_{1s}^{(k)}$	$(B^T)_1^{(k)}$ matrisinin sıfırdan farklı ilk elemanı	skaler
$(B^T)_2^{(k)}$	$(B^T)^{(k)}$ matrisinin diğer satır vektörlerinden oluşan matris	$(m-1) \times m$ matris
$(X^T)_{lö}^{(k)}$	$(B^T)_1^{(k)}(X^T)_l^{(k)} = u_l^{(k)}$ sisteminin bir özel çözümü	m −vektör
$(X^T)_{lh}^{(k)}$	$(B^T)_1^{(k)}(X^T)_l^{(k)} = 0$ sisteminin çözümü	m −vektör

5.2. Yöntem

Bu kısımda $A\ X\ B = C$ matris denklemi için verilecek olan yöntem, Keskin ve Aydın (2007) de $A\ x = f$ lineer denklem sistemi için verilen IDDM yöntemi ve Çıbıkdiken ve Aydın(2008) de IDDM nin $A\ X = I$ (I-birim matris) matris denklemine uygulanması için verilen modifiye yöntemin iç içe uygulanmasıyla elde edilen bir genelleştirme niteliğindedir.

Şimdi $A\,X\,B = C$ matris denklemini ele alalım. İlk olarak

$$X\,B = Y$$

dönüşümü ile

$$A\,Y = C$$

matris denklemine ulaşılır. Daha açık bir şekilde yazarsak

$$[AY_1 \quad AY_2 \quad \dots \quad AY_n] = \;[C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n]; \;\; C_l = (c_{il}),\; i,l = 1(1)n$$

şeklinde ifade edebiliriz. Böylece verilen matris denklemini

$$AY_l = C_l,\;\; l = 1(1)n\,;\, Y_l = (y_{il}),\;\; C_l = (c_{il}),\;\; i = 1,2,\dots,n \tag{5.4}$$

şeklinde n tane lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürmüş oluruz.

Şimdi $\boldsymbol{l = 1}$ için (5.4) sistemine IDDM yi adım adım uygulayalım:

$\boldsymbol{l = 1}$ için (5.4) sistemini

$$AY_1 = A^{(1)}Y_1^{(1)} = C_1^{(1)} = C_1 \tag{5.5}$$

şeklinde yeniden yazalım. (5.5) sistemini,

$$A_1^{(1)}Y_1^{(1)} = u_1^{(1)}\,;\;\; A_1^{(1)} = \left(a_{1j}^{(1)}\right)^{j=1(1)n},\;\; u_1^{(1)} = \left(c_{11}^{(1)}\right) \tag{5.6}$$

ve

$$A_2^{(1)}Y_1^{(1)} = v_1^{(1)};\;\;\; A_2^{(1)} = \;\left(a_{ij}^{(1)}\right)_{i=2(1)n}^{j=1(1)n},\;\;\; v_1^{(1)} = \left(c_{i1}^{(1)}\right)_{i=2(1)n} \tag{5.7}$$

olacak şekilde ikiye bölelim. (5.6) sisteminin bir özel çözümü

$$Y_{1\ddot{o}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{c_{11}^{(1)}}{a_{1s}^{(1)}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \tag{5.8}$$

olarak seçilebilir. Burada $a_{1s}^{(1)}(1 \le s \le n)$, $A_1^{(1)}$ matrisinin sıfırdan farklı ilk elemanıdır.

(5.7) sisteminin homojen çözümü

$$Y_{1h}^{(1)} = R^{(1)}Y_1^{(2)} \tag{5.9}$$

olarak bulunur. Burada $Y_1^{(2)},\; y_{i1}\; (i = 1(1)n,\; i \neq s)$ parametrik değişkenlerden oluşan $(n-1)$ boyutlu vektör ve $R^{(1)}$ çözüm uzayının baz vektörlerinden oluşan

$$R^{(1)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r^{(1)}_{1\times(n-1)} \\ I_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix}, & s=1 \\ \begin{pmatrix} I_{(s-1)\times(s-1)} & 0_{(s-1)\times(n-s)} \\ 0_{1\times(s-1)} & r^{(1)}_{1\times(n-s)} \\ 0_{(n-s)\times(s-1)} & I_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix}, & s=2(1)n-1 \\ \begin{pmatrix} I_{(n-1)\times(n-1)} \\ 0_{1\times(n-1)} \end{pmatrix}, & s=n \end{cases}$$

şeklinde $n \times (n-1)$ matristir. Burada

$$r^{(1)}_{1\times(n-s)} = r^{(1)} = \begin{pmatrix} r^{(1)}_{1(s+1)} & r^{(1)}_{1(s+2)} & \cdots & r^{(1)}_{1n} \end{pmatrix};\ r^{(1)}_{1j} = -\frac{a^{(1)}_{1j}}{a^{(1)}_{1s}}\ , j = s+1(1)n$$

dir. (5.5) sisteminin genel çözümü ise

$$Y^{(1)}_1 = Y^{(1)}_{1ö} + Y^{(1)}_{1h} = Y^{(1)}_{1ö} + R^{(1)}Y^{(2)}_1 \tag{5.10}$$

oluşan matristir. $Y^{(1)}_1$ çözümünü (5.7) de yerine yazar ve düzenlersek $(n-1)$ boyutlu

$$A^{(2)}Y^{(2)}_1 = C^{(2)}_1 \tag{5.11}$$

yeni denklem sistemine ulaşılır. Burada

$$A^{(2)} = A^{(1)}_2 R^{(1)},\ \ C^{(2)}_1 = v^{(1)}_1 - A^{(1)}_2 Y^{(1)}_{1ö}$$

olur. (5.6)-(5.10) arası adımlar (5.11) sistemine uygulanırsa biri diğerini takip eden sistemler

$$A^{(k)} = A^{(k-1)}_2 R^{(k-1)}\ , \qquad C^{(k)}_1 = v^{(k-1)}_1 - A^{(k-1)}_2 Y^{(k-1)}_{1ö}\ , \qquad k = 2(1)n$$

olmak üzere

$$A^{(k)}Y^{(k)}_1 = C^{(k)}_1 \tag{5.12}$$

şeklinde elde edilir. $k = n$ olması durumunda ortaya çıkan lineer denklem sisteminin boyutunun 1 olacağı açıktır. Böylece $k = n(-1)2$ için $Y^{(k)}_1$ vektörlerini, $Y^{(k-1)}_1$ vektörlerinde yerine koyarsak (5.5) sisteminin çözümü

$$Y_1 = Y^{(1)}_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y^{(i)}_{1ö} \tag{5.13}$$

olarak bulunur. Buraya kadar olan kısım IDDM nin (5.5) sistemine adım adım uygulanmasıdır.

$\boldsymbol{l = 2(1)n\ için}$; $R^{(k)}\ ve\ A^{(k)}$ matrisleri sağ taraf vektörlerine bağlı olmadığından

$$AY_l = C_l, l = 2(1)n \qquad (5.14)$$

lineer cebirsel denklem sistemlerinde (5.6)-(5.13) arasındaki hesaplamalardan sadece

$$Y_{lö}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{c_{1l}^{(k)}}{a_{1s}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T, \; C_l^{(k)} = v_l^{(k-1)} - A_2^{(k-1)} Y_{lö}^{(k-1)}, \; k = 2(1)n$$

vektörlerini hesaplamak yeterli olacaktır. Bu vektörler hesaplandıktan sonra (5.14) sistemlerinin çözüm vektörleri

$$Y_l = Y_l^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{lö}^{(i)}, \quad l = 2(1)n \qquad (5.15)$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad \dots \quad Y_n]$$

matrisi hesaplanmış olur.

Şimdi *Y* matrisi bilindiğine göre artık $X\,B = Y$ matris denklemi yerine

$$B^T X^T = Y^T\,; \quad B^T = (b_{ji}),\; X^T = (x_{ji}),\; Y^T = (y_{ji}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

matris denklemini çözmek, verilen matris denklemini çözmeye yeterli olacaktır. Son matris denklemini, $(Y^T)_l = (y_{li}),\; l = 1(1)n\,;\; i = 1(1)n$ olmak üzere

$$[B^T (X^T)_1 \quad B^T (X^T)_2 \quad \dots \quad B^T (X^T)_n] = [(Y^T)_1 \quad (Y^T)_2 \quad \dots \quad (Y^T)_n]\,;$$

şeklinde de yazabilir. Böylece

$$B^T (X^T)_l = (Y^T)_l; \quad l = 1(1)n \qquad (5.16)$$

şeklinde *n* tane lineer cebirsel denklem sistemine ulaşılır.

Şimdi $\boldsymbol{l = 1}$ için (5.16) lineer cebirsel denklem sistemine IDDM yi adım adım uygulayalım:

$\boldsymbol{l = 1}$ için (5.16) sistemini

$$B^T (X^T)_1 = (B^T)^{(1)} (X^T)_1^{(1)} = (Y^T)_1^{(1)} = (Y^T)_1 \qquad (5.17)$$

şeklinde yeniden yazalım. (5.17) sistemini,

$$(B^T)_1^{(1)} (X^T)_1^{(1)} = u_1^{(1)}\,,\; (B^T)_1^{(1)} = \left(b_{j1}^{(1)} \right)^{j=1(1)n}, u_1^{(1)} = \left(y_{11}^{(1)} \right) \qquad (5.18)$$

$$(B^T)_2^{(1)} (X^T)_1^{(1)} = v_1^{(1)}\,,\; (B^T)_2^{(1)} = \left(b_{ji}^{(1)} \right)_{i=2(1)n}^{j=1(1)n}, v_1^{(1)} = \left(y_{1i}^{(1)} \right)_{i=2(1)n} \qquad (5.19)$$

olacak şekilde ikiye bölelim. (5.18) sisteminin bir özel çözümü

$$(X^T)^{(1)}_{1ö} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{y^{(1)}_{11}}{b^{(1)}_{s1}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \tag{5.20}$$

olarak seçilebilir. Burada $b^{(1)}_{s1}(1 \le s \le n)$, $(B^T)^{(1)}_1$ matrisinin sıfırdan farklı ilk elemanıdır. (5.19) sisteminin homojen çözümü

$$(X^T)^{(1)}_{1h} = R^{(1)}(X^T)^{(2)}_1 \tag{5.21}$$

olarak bulunur. Burada $(X^T)^{(2)}_1, x_{1i}\ (i = 1(1)n, i \ne s)$ parametrik değişkenlerden oluşan $(n-1)$ boyutlu vektör ve $R^{(1)}$ çözüm uzayının baz vektörlerinden oluşan

$$R^{(1)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r^{(1)}_{1\times(n-1)} \\ I_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix}, & s = 1 \\ \begin{pmatrix} I_{(s-1)\times(s-1)} & 0_{(s-1)\times(n-s)} \\ 0_{1\times(s-1)} & r^{(1)}_{1\times(n-s)} \\ 0_{(n-s)\times(s-1)} & I_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix}, & s = 2(1)n-1 \\ \begin{pmatrix} I_{(n-1)\times(n-1)} \\ 0_{1\times(n-1)} \end{pmatrix}, & s = n \end{cases}$$

şeklinde $n \times (n-1)$ matristir. Burada

$$r^{(1)}_{1\times(n-s)} = r^{(1)} = \begin{pmatrix} r^{(1)}_{1(s+1)} & r^{(1)}_{1(s+2)} & \cdots & r^{(1)}_{1n} \end{pmatrix};\ r^{(1)}_{1j} = -\frac{b^{(1)}_{j1}}{b^{(1)}_{s1}}\ , j = s + 1(1)n$$

dir. (5.17) sisteminin genel çözümü ise

$$(X^T)^{(1)}_1 = (X^T)^{(1)}_{1ö} + (X^T)^{(1)}_{1h} = (X^T)^{(1)}_{1ö} + R^{(1)}(X^T)^{(2)}_1 \tag{5.22}$$

oluşan matristir. $(X^T)^{(1)}_1$ çözümünü (5.19) de yerine yazar ve düzenlersek $(n-1)$ boyutlu

$$(B^T)^{(2)}(X^T)^{(2)}_1 = (Y^T)^{(2)}_1;\ (B^T)^{(2)} = (B^T)^{(1)}_2 R^{(1)}, (Y^T)^{(2)}_1 = v^{(1)}_1 - (B^T)^{(1)}_2 (X^T)^{(1)}_{1ö} \tag{5.23}$$

yeni denklem sistemine ulaşılır. (5.18)-(5.22) arası adımlar (5.23) sistemine uygulanırsa biri diğerini takip eden sistemler

$$(B^T)^{(k)} = (B^T)^{(k-1)}_2 R^{(k-1)}, \qquad (Y^T)^{(k)}_1 = v^{(k-1)}_1 - (B^T)^{(k-1)}_2 (X^T)^{(k-1)}_{1ö}, \qquad k = 2(1)n$$

olmak üzere

$$(B^T)^{(k)}(X^T)^{(k)}_1 = (Y^T)^{(k)}_1 \tag{5.24}$$

şeklinde elde edilir. $k = n$ olması durumunda ortaya çıkan lineer denklem sisteminin boyutunun 1 olacağı açıktır. Böylece $k = n(-1)2$ için $(X^T)_1^{(k)}$ vektörlerini, $(X^T)_1^{(k-1)}$ vektörlerinde yerine koyarsak (5.17) sisteminin çözümü

$$(X^T)_1 = (X^T)_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) (X^T)_{1ö}^{(i)} \tag{5.25}$$

olarak bulunur. Buraya kadar olan kısım IDDM nin (5.17) sistemine adım adım uygulanmasıdır.

$\boldsymbol{l = 2(1)n}$ için

$$(B^T)(X^T)_l = (Y^T)_l \;;\quad B^T=(b_{ji}),\ (X^T)_l = (x_{li}),\ Y^T = (y_{li}),\quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.26}$$

sistemlerinde (5.18)-(5.25) arasındaki hesaplamalardan sadece

$$(X^T)_{lö}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{y_{l1}^{(k)}}{b_{s1}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T,\ (Y^T)_l^{(k)} = v_l^{(k-1)} - (B^T)_2^{(k-1)}(X^T)_{lö}^{(k-1)},\quad \text{k}= 2(1)n$$

vektörlerini hesaplamak yeterli olacaktır. Bu vektörler hesaplandıktan sonra (5.26) sistemlerinin çözüm vektörleri

$$(X^T)_l = (X^T)_l^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) (X^T)_{lö}^{(i)}, \qquad l = 2(1)n \tag{5.27}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$X^T = [(X^T)_1 \quad (X^T)_2 \ \ \ldots \ \ (X^T)_n]$$

matrisi hesaplanmış olur. Buradan da $(X^T)^T$ işlemi sonucunda aranan X matrisi bulunmuş olur.

Şimdi $A\ X\ B = Y$ matris denkleminin çözümünü veren bir teoremi Keskin ve Aydın (2007) de ve Çıbıkdiken ve Aydın(2008) de verilen teoremlere benzer olarak verelim.

Teorem 2. $A, B \in M_n(\boldsymbol{R})$ düzenli matris, $C \in M_n(\boldsymbol{R})$ olmak üzere (5.1) matris denkleminin çözümü

$$X = [(X^T)_1 \quad (X^T)_2 \ \ \ldots \ \ (X^T)_n]^T$$

matrisidir. Burada

$$(X^T)_l = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)}\right) X_{lö}^{(i)}\,; \quad (X^T)_{lö}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{y_{l1}^{(k)}}{b_{s1}^{(k)}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T, \; l = 1(1)n,$$

$y_{l1}^{(k)}$ elemanı

$$Y_1^{(k)} = \sum_{i=k}^{n}\left(\prod_{j=k}^{i-1} R^{(j)}\right) Y_{1ö}^{(i)}$$

vektörünün l inci elemanı (*diğer bir ifadeyle* k ıncı iterasyonda elde edilen $Y^{(k)}$ matrisinin l inci satırın 1 elemanı),

$$Y_{1ö}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{c_{11}^{(i)}}{a_{1s}^{(i)}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$c_{11}^{(i)}$ elemanı ise $C_1^{(i)}$ vektörünün 1 inci elemanı ve

$$\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} = \begin{cases} R^{(1)}R^{(2)}\ldots R^{(i-1)} & ; \; i > 1 \\ I & ; \; i = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. İspat, Keskin ve Aydın (2007) de ve Çıbıkdiken ve Aydın (2008) de verilen Teorem 1 in ispatından ve 5.2. kısımdaki yöntemin açıklamasından açıktır.

Not: Yukarıda verilen teorem, IDDM nin tekrarlamalı kullanımı ile Çıbıkdiken ve Aydın (2008) de incelenen $A\,X = I$ matris denkleminin çözümünü veren teoremin genelleştirilmesi niteliğindedir.

5.3. Algoritma

Giriş Elemanları: n boyutlu A, B, C matrisleri; A, B - düzenli matris

Adım 1. $k = 1(1)n-1$, $m = n - k + 1$; $A^{(1)} = A$

1.k.1. $A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_1^{(k)} \\ A_2^{(k)} \end{pmatrix}$; $A_1^{(k)} = (\,a_{1j}^{(k)}\,)^{j=1(1)m}$, $A_2^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i=2(1)m}^{j=1(1)m}$

1.k.2. $a_{1s}^{(k)}$ bul. $a_{1s}^{(k)}$, $a_{1j}^{(k)} \neq 0$, $j = 1(1)m$ ilk eleman. $s_k = s$ al.

1.k.3. Eğer $1 \le s < m$ ise,

$$r^{(k)} = (\,r_{1\times(s+1)}^{(k)} \quad r_{1\times(s+2)}^{(k)} \quad \ldots \quad r_{1\times m}^{(k)}\,)\,;\; r_{1j}^{(k)} = -\frac{a_{1j}^{(k)}}{a_{1s}^{(k)}} \;\; ; j = s+1(1)m$$

1.**k**.4. $R^{(k)}$ hesapla.

$$R^{(k)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r^{(k)}_{1\times(m-1)} \\ I_{(m-1)\times(m-1)} \end{pmatrix} & s=1 \\ \begin{pmatrix} I_{(s-1)\times(s-1)} & 0_{(s-1)\times(m-s)} \\ 0_{1\times(s-1)} & r^{(k)}_{1\times(m-s)} \\ 0_{(m-s)\times(s-1)} & I_{(m-s)\times(m-s)} \end{pmatrix} & s = 2(1)m-1 \\ \begin{pmatrix} I_{(m-1)\times(m-1)} \\ 0_{1\times(m-1)} \end{pmatrix} & s=m \end{cases}$$

1.**k**.5. $A^{(k+1)} = A_2^{(k)} R^{(k)}$ hesapla.

Adım 2. $l = 1(1)n$; $C=[\, C_1\ C_2\ \dots\ C_n]$

2.l.1. $C_l^{(1)} = C_l$, $C_l = (c_{il})$, $i = 1(1)n$,

2.l.2. **k** $= 1(1)n-1$, $m = n - k + 1$, $s = s_k$

2.l.2.**k**.1. $C_l^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} \\ v_1^{(k)} \end{pmatrix}$; $u_1^{(k)} = (c_{1l}^{(k)})$, $v_1^{(k)} = (c_{il}^{(k)})\ {}_{i=2(1)m}$

2.l.2.**k**.2. $Y_{l\ddot{o}}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dfrac{c_{1l}^{(k)}}{a_{1s}^{(k)}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$

2.l.2.**k**.3. $C_l^{(k+1)} = v_l^{(k)} - A_2^{(k)} Y_{l\ddot{o}}^{(k)}$

2.l.2. **k = n** ; $A^{(n)} = (a_{11}^{(n)})$, $C_l^{(n)} = (c_{1l}^{(n)})$, $Y_{l\ddot{o}}^{(n)} = \left(\dfrac{c_{1l}^{(n)}}{a_{11}^{(n)}} \right)$

2.l.3. $Y_l = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{l\ddot{o}}^{(i)}$

Adım 3. $Y = [\, Y_1\ Y_2\ \dots\ Y_n\,]$

Adım 4. $A{:=}B^{\mathrm{T}}$, $C{:=}Y^{\mathrm{T}}$ al ve Adım 1 e git.

Çıkış Elemanı: Çözüm $X = Y^{\mathrm{T}}$ dir.

Bu kısımda verilen algoritma, Keskin ve Aydın (2007) ve Çıbıkdiken ve Aydın (2008) de verilen algoritmaların modifikasyonu niteliğindedir.

Şimdi bir örnek üzerinde algoritmayı uygulayalım.

Örnek 5.1.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -15 & 10\\ 15 & -6 & 1\\ 15 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

matris denklemini IDDM ile çözelim.

0. adım (Giriş Elemanları)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 6\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}9 & -15 & 10\\ 15 & -6 & 1\\ 15 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

değerleri girilir. Burada *A*,*B* düzenli matristir.

Adım 1. $k = 1$ alınır, $n = 3,\ m = 3$ olur.

1.**1**.1. $A_1^{(1)} = [1 \quad 2 \quad 0]$, $A_2^{(1)} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 6\end{bmatrix}$ olur.

1.**1**.2. $1 \leq j \leq 3$ için $a_{1j}^{(1)} \neq 0$ olup olmadığı kontrol edilirse $a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$ ve

$s = s_1 = 1$ olur.

1.**1**.3. $r^{(1)} = [-2 \quad 0]$ olarak hesaplanır.

1.**1**.4. $R^{(1)} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ bulunur.

1.**1**.5. $A^{(2)} = A_2^{(1)}R^{(1)}$ den $A^{(2)} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ bulunur.

$k = 2$ alınır, $m = 2$ olur.

1.**2**.1. $A_1^{(2)} = [1 \quad 4] \qquad A_2^{(2)} = [2 \quad 6]$ olur.

1.**2**.2. $1 \leq j \leq 2$ için $a_{1j}^{(2)} \neq 0$ olup olmadığı kontrol edilirse $a_{11}^{(2)} = 1 \neq 0$ ve

$s = s_2 = 1$ olur.

1.**2**.3. $r^{(2)} = [-4]$, olarak hesaplanır.

1.**2**.4. $R^{(2)} = [-4 \quad 1]^T$ bulunur.

1.2.5. $A^{(3)} = A_2^{(2)} R^{(2)}$ den $A^{(3)} = [-2]$ bulunur.

Adım 2. ***$l = 1$ için,*** $C_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$ olur.

2.1.1. $C_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$

2.1.2. ***k*=1**, *m*=3, *s*=1

2.1.2.1.1. $C_1^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_1^{(1)} = [9]$, $v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.1.2.1.2. $Y_{1ö}^{(1)} = [9 \quad 0 \quad 0]^T$ bulunur.

2.1.2.1.3. $C_1^{(2)} = v_1^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{1ö}^{(1)}$ olup $C_1^{(2)} = [15 \quad 24]^T$ bulunur.

2.1.2. ***k*=2**, *m*=2, *s*=1

2.1.2.2.1. $C_1^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_1^{(2)} = [15]$, $v_1^{(2)} = [24]$ bulunur.

2.1.2.2.2. $Y_{1ö}^{(2)} = [15 \quad 0]^T$ bulunur.

2.1.2.2.3. $C_1^{(3)} = v_1^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{1ö}^{(2)}$ olup $C_1^{(3)} = [-6]^T$ bulunur.

2.1.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-2]$, $C_1^{(3)} = [-6]^T$ olup $Y_{1ö}^{(3)} = [3]^T$ bulunur.

2.1.3.

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{1ö}^{(i)} = [3 \quad 3 \quad 3]^T$$

$l = 2$ için, $C_2 = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ olur.

2.2.1. $C_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

2.2.2. ***k*=1**, *m*=3, *s*=1

2.2.2.1.1. $C_2^{(1)}=\begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_2^{(1)} = [-15]$, $v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.2.2.1.2. $Y_{2ö}^{(1)} = [-15 \quad 0 \quad 0]^T$ bulunur.

2.2.2.1.3. $C_2^{(2)} = v_2^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{2ö}^{(1)}$ olup $C_2^{(2)} = [-6 \quad -12]^T$ bulunur.

2.2.2. ***k*=2**, *m*=2, *s*=1

2.2.2.2.1. $C_2^{(2)}=\begin{pmatrix} u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_2^{(2)} = [-6]$, $v_2^{(2)} = [-12]$ bulunur.

2.2.2.2.2. $Y_{2ö}^{(2)} = [-6 \quad 0]^T$ bulunur.

2.2.2.2.3. $C_2^{(3)} = v_2^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{2ö}^{(2)}$ olup $C_2^{(3)} = [0]^T$ bulunur.

2.2.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-2]$, $C_2^{(3)} = [0]^T$ olup $Y_{2ö}^{(3)} = [0]^T$ bulunur.

2.2.3.

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{2ö}^{(i)} = [-3 \quad -6 \quad 0]^T$$

***l* = 3 için,** $C_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ olur.

2.3.1. $C_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

2.3.2. ***k*=1**, *m*=3, *s*=1

2.3.2.1.1. $C_3^{(1)}=\begin{pmatrix} u_3^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_3^{(1)} = [10]$, $v_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.3.2.1.2. $Y_{3ö}^{(1)} = [10 \quad 0 \quad 0]^T$ bulunur.

2.3.2.1.3. $C_3^{(2)} = v_3^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{3ö}^{(1)}$ olup $C_3^{(2)} = [1 \quad 4]^T$ bulunur.

2.3.2. ***k*=2**, *m*=2, *s*=1

2.3.2.2.1. $C_3^{(2)}=\begin{pmatrix} u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_3^{(2)} = [1]$, $v_3^{(2)} = [4]$ bulunur.

2.3.2.2.2. $Y_{3ö}^{(2)} = [1 \quad 0]^T$ bulunur.

2.3.2.2.3. $C_3^{(3)} = v_3^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{3ö}^{(2)}$ olup $C_3^{(3)} = [2]^T$ bulunur.

2.3.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-2]$, $C_3^{(3)} = [2]^T$ olup $Y_{3ö}^{(3)} = [-1]^T$ bulunur.

2.3.3.

$$Y_3 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{3ö}^{(i)} = [0 \quad 5 \quad -1]^T$$

Adım 3. $Y = [\ Y_1\ Y_2\ Y_3\ ] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Adım 4. $A{:=}B^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $C{:=}Y^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ al.

Bu aşamada yeni *A* ve *C* matrisleri için yukarıdaki adımlar tekrar uygulanıp, sonuçta elde edilen *Y* matrisinin transpozu istenen *X* çözümü olacaktır.

0. adım (Giriş Elemanları)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

değerleri girilir. Burada *A* düzenli matristir.

Adım 1. $k = 1$ alınır, $n = 3,\ m = 3$ olur.

1.1.1. $A_1^{(1)} = [2 \quad 1 \quad 1]$, $A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ olur.

1.1.2. $1 \le j \le 3$ için $a_{1j}^{(1)} \neq 0$ olup olmadığı kontrol edilirse $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$ ve

$s = s_1 = 1$ olur.

1.1.3. $r^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ olarak hesaplanır.

1.1.4. $R^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

1.1.5. $A^{(2)} = A_2^{(1)} R^{(1)}$ den $A^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ bulunur.

$\boldsymbol{k = 2}$ **alınır**, $m = 2$ olur.

1.2.1. $A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ $\quad A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ olur.

1.2.2. $1 \leq j \leq 2$ için $a_{1j}^{(2)} \neq 0$ olup olmadığı kontrol edilirse $a_{11}^{(2)} = -\frac{3}{2} \neq 0$

ve $s = s_2 = 1$ olur.

1.2.3. $r^{(2)} = [1]$, olarak hesaplanır.

1.2.4. $R^{(2)} = [1 \quad 1]^T$ bulunur.

1.2.5. $A^{(3)} = A_2^{(2)} R^{(2)}$ den $A^{(3)} = [-2]$ bulunur.

Adım 2. $\boldsymbol{l = 1}$ **için,** $C_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ olur.

2.1.1. $C_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.1.2. $\boldsymbol{k=1}$, m=3, s=1

2.1.2.1.1. $C_1^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ v_1^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_1^{(1)} = [3]$, $\quad v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.1.2.1.2. $Y_{1ö}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.1.2.1.3. $C_1^{(2)} = v_1^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{1ö}^{(1)}$ olup $C_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.1.2. $\boldsymbol{k=2}$, m=2, s=1

2.1.2.2.1. $C_1^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_1^{(2)} = \left[-\frac{3}{2}\right]$, $v_1^{(2)} = \left[-\frac{3}{2}\right]$ bulunur.

2.1.2.2.2. $Y_{1ö}^{(2)} = [1 \quad 0]^T$ bulunur.

2.1.2.2.3. $C_1^{(3)} = v_1^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{1ö}^{(2)}$ olup $C_1^{(3)} = [-2]^T$ bulunur.

2.1.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-2]$, $C_1^{(3)} = [-2]^T$ olup $Y_{1ö}^{(3)} = [1]^T$ bulunur.

2.1.3.

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{1ö}^{(i)} = [0 \quad 2 \quad 1]^T$$

l = 2 için, $C_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$ olur.

2.2.1. $C_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$

2.2.2. ***k*=1**, *m*=3, *s*=1

2.2.2.1.1. $C_2^{(1)} = \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_2^{(1)} = [3]$, $v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.2.2.1.2. $Y_{2ö}^{(1)} = \left[\frac{3}{2} \quad 0 \quad 0\right]^T$ bulunur.

2.2.2.1.3. $C_2^{(2)} = v_2^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{2ö}^{(1)}$ olup $C_2^{(2)} = \left[-\frac{9}{2} \quad \frac{7}{2}\right]^T$ bulunur.

2.2.2. ***k*=2**, *m*=2, *s*=1

2.2.2.2.1. $C_2^{(2)} = \begin{pmatrix} u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_2^{(2)} = \left[-\frac{9}{2}\right]$, $v_2^{(2)} = \left[\frac{7}{2}\right]$ bulunur.

2.2.2.2.2. $Y_{2ö}^{(2)} = [1 \quad 1]^T$ bulunur.

2.2.2.2.3. $C_2^{(3)} = v_2^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{2ö}^{(2)}$ olup $C_2^{(3)} = [2]^T$ bulunur.

2.2.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-2]$, $C_2^{(3)} = [2]^T$ olup $Y_{2ö}^{(3)} = [-1]^T$ bulunur.

2.2.3.

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{2ö}^{(i)} = [1 \quad 2 \quad -1]^T$$

$l = 3$ için, $C_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ olur.

2.3.1. $C_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

2.3.2. ***k*=1**, *m*=3, *s*=1

2.3.2.1.1. $C_3^{(1)} = \begin{pmatrix} u_3^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix}$ olup $u_3^{(1)} = [3]$, $v_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ bulunur.

2.3.2.1.2. $Y_{3ö}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.3.2.1.3. $C_3^{(2)} = v_3^{(1)} - A_2^{(1)} Y_{3ö}^{(1)}$ olup $C_3^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}^T$ bulunur.

2.3.2. ***k*=2**, *m*=2, *s*=1

2.3.2.2.1. $C_3^{(2)} = \begin{pmatrix} u_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix}$ olup $u_3^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, $v_3^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ bulunur.

2.3.2.2.2. $Y_{3ö}^{(2)} = [-1 \quad 0]^T$ bulunur.

2.3.2.2.3. $C_3^{(3)} = v_3^{(2)} - A_2^{(2)} Y_{3ö}^{(2)}$ olup $C_3^{(3)} = [-2]^T$ bulunur.

2.3.2. ***k*=3** ; $A^{(3)} = [-2]$, $C_3^{(3)} = [2]^T$ olup $Y_{3ö}^{(3)} = [1]^T$ bulunur.

2.3.3.

$$Y_3 = \sum_{i=1}^{3} \left(\prod_{j=1}^{i-1} R^{(j)} \right) Y_{3ö}^{(i)} = [1 \quad 0 \quad 1]^T$$

Adım 3. $Y = [\, Y_1 \; Y_2 \; Y_3 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Çıkış Elemanı: Çözüm $X := Y^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.4. Maple Programı

```
> restart;
> with(linalg, blockmatrix);
> with(LinearAlgebra, SubMatrix, MatrixMatrixMultiply, MatrixVectorMultiply,RowDimension, SubVector,
Transpose);

> çöz:=proc(A::Matrix,B::Matrix,C::Matrix)
  # Bu prosedür, A ve B düzenli n-matrisler olmak üzere AXB=C matris denkleminin çözümünü hesaplar.
  global altçöz,X;
  X:=Transpose(altçöz(Transpose(B),Transpose(altçöz(A,C))));
  print("Soru :AXB=C matris denkleminin çözümü X matrisi nedir?"); print("A"=A,"B"=B,"C"=C);
  print("AY=C","Y"=altçöz(A,C)); print("XB = Y", "X" = X);
end proc:

> altçöz:=proc(A::Matrix,Z::Matrix)
  #altçöz prosedürü Çıbıkdiken ve Aydın(2008) daki bul prosedürünün I birim matrisi yerine C sağtaraf matrisi
alınarak elde edilen halidir.
  global C,n,B,A1,A2,k,m,z,c,s,r,H1,H2,B1,B2,B3,B4,B5,B6,R,l,e,i,d,u,v,Y0,RR,Y,S,j;
  n:=RowDimension(A); B[1]:=A;  printf("A[1]="); print(B[1]);

for k from 1 to n-1 do m:=n-k+1;
    A1[k]:=SubMatrix(B[k],1..1,1..m); A2[k]:=SubMatrix(B[k],2..m,1..m);
     for z from 1 to m do if A1[k][1,z]<>0 then c[k]:=z; break; end if: end do:
    s:=c[k];   r[k]:=Matrix(1,1..m-s);
     for z from 1 to m-s do r[k][1,z]:=-B[k][1,s+z]/B[k][1,s]; end do:
    H1:=Matrix(m-1,m-1,shape=identity); H2:=Matrix(1,m-1,0);
    B1:=Matrix(s-1,s-1,shape=identity); B2:=Matrix(s-1,m-s,0); B3:=Matrix(1,s-1,0);
    B4:=r[k]; B5:=Matrix(m-s,s-1,0); B6:=Matrix(m-s,m-s,shape=identity);
    if s=1 then R[k]:=convert(blockmatrix(2,1,[r[k], H1]), Matrix); end if:
    if s=m then R[k]:=convert(blockmatrix(2,1,[H1,H2]),Matrix); end if:
    if s>=2 and s<=m-1 then R[k]:=convert(blockmatrix(3,2,[B1,B2,B3,B4,B5,B6]),Matrix); end if:
    B[k+1]:=MatrixMatrixMultiply(A2[k],R[k]);
    printf("R[%d]=", k); print(R[k]); printf("A[%d]=", k+1); print(B[k+1]);
end do:

  for l from 1 to n do e[l]:=Vector(1..n);
    for i from 1 to n do e[l][i]:=Z[i][l]; end do:
    d[l][1]:=e[l];
    for k from 1 to n-1 do m:=n-k+1;
     s:=c[k]; u[l][k]:=SubVector(d[l][k],1);
     v[l][k]:=SubVector(d[l][k],2..m); Y0[l][k]:=Vector(1..m);
     for z from 1 to m do Y0[l][k][z]:=0; end do:
     Y0[l][k][s]:=u[l][k][1]/A1[k][1,s];d[l][k+1]:=v[l][k]-MatrixVectorMultiply(A2[k],Y0[l][k]);
    end do:
    Y0[l][n]:=d[l][n]/B[n][1,1]; RR[0]:=Matrix(n,n,shape=identity); Y[l]:=Y0[l][1];
     for i to n-1 do
```

```
     RR[i]:=R[i]; RR[i]:=MatrixMatrixMultiply(RR[i-1],RR[i]);
     S[i]:=MatrixVectorMultiply(RR[i],Y0[l][i+1]); Y[l]:=Y[l]+S[i];
   end do:
 end do:

 C:=Y[1];
 for j from 2 to n do C:=convert(blockmatrix(1,2,[C,Y[j]]),Matrix); end do:

end proc:
```

5.5. Nümerik Çözümler

Örnek 5.5.1.

> Aa:=Matrix([[1,2,0],[0,1,4],[-1,0,6]]); Bb:=Matrix([[2,-1,1],[1,-2,1],[1,1,-2]]); Cc:=Matrix([[9,-15,10],[15,-6,1],[15,3,-6]]);

$$Aa := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ Bb := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ Cc := \begin{bmatrix} 9 & -15 & 10 \\ 15 & -6 & 1 \\ 15 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

> çöz(Aa,Bb,Cc); "Soru : $A\ X\ B = C$ matris denkleminin çözümü X matrisi nedir?"

$$"A"=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, "B"=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, "C"=\begin{bmatrix} 9 & -15 & 10 \\ 15 & -6 & 1 \\ 15 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

- $A[1]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, R[1]=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A[2]=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, R[2]=\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}; A[3]=[-2]$
- $A[1]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, R[1]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A[2]=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}, R[2]=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; A[3]=[-2]$

$$"\ A\ Y = C\ ", "\ Y\ " = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$"\ X\ B = Y\ ", "\ X\ " = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek 5.5.2.

> As:=Matrix([[1,2,1],[1,1,4],[1,-1,3]]); Bs:=Matrix([[2,0,1],[1,-2,2],[3,1,-2]]);
Cs:=Matrix([[1,1,1],[5,-6,1],[15,3,-6]]);

$$As := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, Bs := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, Cs := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 15 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

> çöz(*As*,*Bs*,*Cs*); "Soru : $A\ X\ B = C$ matris denkleminin çözümü X matrisi nedir?"

$$"A"=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, "B"=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, "C"=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 15 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

- $A[1]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, R[1]=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A[2]=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, R[2]=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; A[3]=\begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$

- $A[1]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, R[1]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A[2]=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}, R[2]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; A[3]=\begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \end{bmatrix}$

$$"A\ Y = C\ ", "Y\ "=\begin{bmatrix} 11 & 10 & -6 \\ -\frac{34}{7} & -\frac{20}{7} & 3 \\ -\frac{2}{7} & -\frac{23}{7} & 1 \end{bmatrix},$$

$$"X\ B = Y\ ", "\ X\ "=\begin{bmatrix} \frac{60}{11} & -\frac{47}{11} & \frac{16}{11} \\ -\frac{81}{77} & \frac{64}{77} & -\frac{92}{77} \\ -\frac{139}{77} & \frac{145}{77} & \frac{37}{77} \end{bmatrix}$$

Örnek 5.5.3.

> An:=Matrix([[1,2,1,1],[2,1,2,1],[3,0,-1,4],[1,-1,3,4]]); Bn:=Matrix([[1,-2,3,1],[2,5,0,1],[-1,1,-2,2],[1,3,1,-2]]);
Cn:=Matrix([[1,4,3,-2],[1,1,1,1],[2,5,-6,1],[6,-2,3,-6]]);

$$\text{An:=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{Bn:=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{Cn:=} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

> çöz(An,Bn,Cn); "Soru : $A\ X\ B = C$ matris denkleminin çözümü X matrisi nedir?"

- $A[1]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $R[1]=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $A[2]=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -1\\ -6 & -4 & 1\\ -3 & 2 & 3\end{bmatrix}$,

  $R[2]=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; $A[3]=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $R[3]=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ 1\end{bmatrix}$; $A[4]=\begin{bmatrix}\frac{11}{2}\end{bmatrix}$

- $A[1]=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ -2 & 5 & 1 & 3\\ 3 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$, $R[1]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; $A[2]=\begin{bmatrix}9 & -1 & 5\\ -6 & 1 & -2\\ -1 & 3 & -3\end{bmatrix}$,

  $R[2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{5}{9}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; $A[3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{26}{9} & -\frac{22}{9}\end{bmatrix}$, $R[3]=\begin{bmatrix}-4\\ 1\end{bmatrix}$; $A[4]=[-14]$

$$\text{"AY=C","Y"}=\begin{bmatrix}-\frac{23}{33} & \frac{13}{66} & -\frac{137}{66} & \frac{175}{66}\\ -\frac{2}{33} & \frac{68}{33} & \frac{50}{33} & -\frac{34}{33}\\ \frac{7}{11} & -\frac{25}{22} & \frac{35}{22} & -\frac{15}{22}\\ \frac{13}{11} & \frac{9}{11} & \frac{5}{11} & -\frac{21}{11}\end{bmatrix},$$

$$\text{"XB=Y","X"}=\begin{bmatrix}-\frac{53}{462} & \frac{74}{231} & \frac{235}{462} & -\frac{5}{7}\\ \frac{178}{231} & -\frac{160}{231} & \frac{104}{77} & \frac{40}{21}\\ \frac{101}{462} & -\frac{1}{77} & -\frac{227}{462} & -\frac{1}{21}\\ -\frac{265}{462} & \frac{67}{154} & -\frac{298}{231} & -\frac{17}{42}\end{bmatrix}$$

Not: "5.5. Nümerik Çözümler" başlığı altında verilen örneklerde Maple prosedürü uygulanmıştır. Bu örneklerin çözüm kısmında ilk elde edilen A ve R matrisleri (5.2) matris denklemi için bulunan değerlerdir. İkinci olarak elde edilen A ve R matrisleri ise (5.3) matris denkleminde A:=B^{T}, C:=Y^{T} alınmak suretiyle $B^T\ X^T = Y^T$ için bulunan değerlerdir.

6. SONUÇ ve DEĞERLENDİRMELER

Keskin ve Aydın (2007) de boyut indirgeme metodu (IDDM) olarak bilinen bir metot geliştirilmiş, burada IDDM metodu kısaca tanıtılmıştır. Çıbıkdiken ve Aydın (2008) de, IDDM metodu kullanılarak *n* boyutlu düzenli bir matrisin tersinin bulunması sağlanmıştır. Yukarıda yapılmış olan iki çalışma; bu tez çalışmasının oluşmasını sağlamıştır.

Bu çalışmada, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrisleri *n* boyutlu düzenli matrisler ve *C*, *n* boyutlu her hangi bir matris olmak üzere, IDDM kullanılarak $A\ X\ B = C$ matris denkleminin iteratif çözümlerini incelenmiş ve İteratif Boyut İndirgeme Metodu"yla bu problemin iteratif çözümlerini hesaplamak için bir metod geliştirilmiştir. Bu metod üzerine kurgulanan bir algoritma ve bir bilgisayar programı verilmiş, bazı nümerik örnekler de çözülmüştür.

Bu çalışmada verilen metod ve algoritma, bir düzenli matrisin tersini IDDM ile hesaplamak için Çıbıkdiken ve Aydın (2008) verilen metod ve algoritmanın modifikasyonu ve genelleştirilmesidir.

7. KAYNAKLAR

Akbulut F., 1985, *Lineer Cebir,* Cilt:1, *Birsen Yayınevi,* İstanbul.

Bulgak A., Bulgak H., 2001, *Lineer Cebir,* Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya.

Bulgakov A. Ya., Godunov S.K., 1978, *The stability of stable matrices,* Theory of cubature formulas and numerical mathematics, Pap. Conf. Differential equations and numerical mathematics, Novosibirsk 13-28.

Bulgakov A. Ya., Godunov S.K., 1985, *Allowance for computation errorsin a variant of the conjugate gradient method,* Numerical Methods of Linear Algebra, Novosibirsk, Nauka, pp.38-55(Russian).

Çıbıkdiken A. O., Aydın K., 2008, *IDDM yardımıyla ters matris hesaplama.,* SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (E-Dergi)., 3(1), 98-106.

Dehghan M., Hajarian M., 2008, *An iterative algorithm for the reflexive solutions of the generalized coupled Sylvester matrix equations and its optimal approximation.,* Applied Mathematics and Computation 202:571-588.

Ding F., Chen T., 2005, *Iterative least-squares solutions of coupled Sylvester matrix equations.,* Systems & Control Letters 54:95-107.

Ding F., Liu P.X., Ding J., 2008, *Iterative solutions of the generalized Sylvester matrix equations by the hierarchical identification principle.,* Applied Mathematics and Computation 197:41-50.

Fanliang L., Xiyan H., Lei Z., 2008, *The generalized reflexive solution for a class of matrix equations (AX=B,XC=D).,* Acta Mathematica Scientia 28B(1):185-193.

Jiang T., Wei M., 2003, *On solutions of the matrix equations* $X\text{-}AXB=C$ *and* $X\text{-}A\overline{X}B=C$.*,* Linear Algebra and its Applications 367:225-233.

Keskin T., 2005, *Lineer denklem sistemleri için boyut indirgeme algoritması,* Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Keskin T., Aydın K., 2007, *Iterative decreasing dimension algorithm,* Computers and Mathematics with Applications, 53(7) 1153-1158.

Morris, A.O., 1990, *Linear Algebra*, Second Edition, *Chapman And Hall,* Hong Kong.

Mukaidani H., Xu H., Mizukami K., 2001, *New iterative algorithm for algebraic Riccati equation related to H infinity control problem of singularly perturbed systems,* IEEE Transactions on Automatic Control 46(10) 1659-1666.

Taşçı D., 1999, *Lineer Cebir*, Selçuk Üniversitesi Vakfı Yayınları No:9,Konya.

Peng Z., 2005, *An iterative method fort the least squares symmetric solution of the linear matrix equation* $A\ X\ B = C$, Applied Mathematics and Computation 170:711-723.

Peng Y.X., Hu X.Y., Zhang L., 2005, *An iteration method fort he symmetric solutions and the optimal approximation solution of the matrix equation* $A\ X\ B = C$, Applied Mathematics and Computation 160:763-777.

Sheng X., Chen G., 2007, *A finite iterative method for solving a pair of linear matrix equation* $(AXB,CXD)=(E,F)$*.,* Applied Mathematics and Computation 189:1350-1358.

Wang H., Jiang J., 2000, *Solution of the system of linear algebraic equations by decreasing dimension*, Applied Mathematics and Computation 109:51-57.

Wang M., Cheng X., Wei M., 2007, *Iterative algorithms for solving the matrix equation* $AXB+CX^TD=E$*.*, Applied Mathematics and Computation 187:622-629.

Xu G., Wei M., Zheng D., 1998, *On solutions of matrix equation* $AXB+CYD=F$, Linear Algebra and Applications 279(1-3) 93-109.

Zhang J., 2002, *Comments on 'Solution of the system of linear algebraic equations by decreasing dimension'*, Applied Mathematics and Computation 128:95-98.