T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL KENARLI VE ALANLI KİRİŞLER ÇOKGENLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Metin TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

KONYA, 2008

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL KENARLI VE ALANLI KİRİŞLER ÇOKGENLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Metin TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

Bu tez 19/09/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Ahmet CİHANGİR
(DANIŞMAN)

Öğr.Gör.Dr. Ahmet DOĞAN
(ÜYE)

Yrd.Doç.Dr. Mustafa DOĞAN
(ÜYE)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RASYONEL KENARLI VE ALANLI KİRİŞLER ÇOKGENLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Metin TURAN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr Ahmet CİHANGİR

2008, iv + 53

Jüri : Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
Yrd. Doç. Dr. Mustafa DOĞAN
Öğr.Gör.Dr.Ahmet DOĞAN

Rasyonel kenarlı Heron üçgenleri notasyonundan hareketle bir kirişler dörtgeninin alanı için Brahmagupta'nın alan formülü kullanılmıştır. Kirişler beşgenleri ve altıgenlerinin alanı için de Robbins'in formülleri kullanılarak, rasyonel alanlı kirişler *n*-genlerine genellemeler yapılmıştır. Altıdan daha fazla kenarlı rasyonel alanlı *n*-genler için bir yaklaşım metodu araştırılmıştır. n nin çift olması durumunda Eulerian olmayan rasyonel alanlı kirişler $n-$ genlerinin üretiminin bir metodunu verilmiştir. Son olarak; rasyonel alanlı bütün kirişler $n-$ genlerini konjektür olarak sınıflandırıyoruz.

Anahtar kelimeler: Kiriş, çokgen, rasyonel, alan

ABSTRACT

M.Sc.Thesis

A RESEARCH ON CONSTRUCTION OF CYCLIC POLYGONS WITH RATIONAL SIDES AND AREA

Metin TURAN

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Primary School Mathematics Teaching

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR
2008, iv + 52 Pages
Jury: Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR
Asist. Prof. Dr. Mustafa DOĞAN
Lecturer Dr.Ahmet DOĞAN

Regarding with the notion of Heron triangles with rational sided Brahmagupta's formula is used fort the area of a cyclic quadrilateral. We generalise cyclic n-gons with rational area using Robbins Formula fort the area of cyclic pentagons and hexagons.A technical approach has been searched to calculate the area of n-gons which have more than six sides.In this study the method of generating cyclic n-gons with rational area, which aren't Eulerian and which have even-numbered sides has been given.Finally we conjacturally classify all rational area cyclic n-gons.

Keywords : cyclic, polygon, rational, area

ÖNSÖZ

Geometri biliminin tarihsel sürecine dikkat ettiğimizde onun insanoğlunun hayatında kullandığı nesneleri anlamaya yönelik bir bilim olduğunu görmekteyiz. Soyut ve somut algıların hakim olduğu bu bilim ile nesnelerin yer kapladığı mekânın tarifi yapılabilmektedir.

Teknolojik ilerlemeler bize gösteriyor ki matematik bilimi hızla ilerlemektedir. Özellikle bu tezde de dikkatimizi çeken sayılar teorisi ve geometri arasındaki ilişkiler keşfedildikçe daha keşfedilmeyi bekleyen nice kavramların olduğu görülmektedir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; çalışmayla ilgili kaynak taraması, tanımlar ve bağlantılı teoremler asıl kaynaklarından alınarak verilmiştir. İkinci bölümde rasyonel kenarlı ve alanlı Heron üçgenlerinin bazı cebirsel özellikleri üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde bir kirişler dörtgeninin alanını Brahmagupta alan formülünden hareketle elde etmeye çalıştık. Dördüncü bölümde Robbins beşgenleri, beşinci bölümde de Robbins altıgenlerinin genel özellikleri tanıtılmaya çalışıldı. Son bölümde kirişler beşgeni ve altıgeni için Robbins alan formüllerini kullanarak rasyonel alanlı kirişler *n*-genlerine genellemeye çalıştık. Bu çalışma, Ralph H. Buchholz ve James A. MacDougall tarafından oluşturulan "Rasyonel kenarlı ve alanlı kirişler çokgenleri" isimli makale üzerine kurulmuştur.

"Rasyonel Kenarlı Ve Alanlı Kirişler Çokgenleri Üzerine Bir Araştırma" isimli tez konusunun tespitinde ve hazırlanması sırasında maddi ve manevi her türlü yardımı esirgemeyen çok değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr Ahmet CİHANGİR' e ve her zaman yanımda olup bana destek veren aileme ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Metin TURAN
Ağustos 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **i**
ABSTRACT .... **ii**
ÖNSÖZ .... **iii**
İÇİNDEKİLER .... **iv**
1. GİRİŞ **1**
1.1. Kaynak Araştırması **1**
1.2. Ön Bilgiler **4**
2. HERON ÜÇGENLERİ **10**
2.1. Özel Rasyonel Alanlı Üçgenler **13**
3. BRAHMAGUPTA DÖRTGENLERİ **17**
3.1. Parçalanabilir Dörtgenler **18**
3.2. Brahmagupta Dörtgenlerinin Kısıtlı Aileleri **22**
3.3. Ayrıştırılamayan Dörtgenler **24**
4. ROBBİNS BEŞGENLERİ **30**
5. ROBBİNS ALTIGENLERİ **40**
5.1. Merkezi Köşegenler Üzerinde Parçalanışlar **41**
5.2. Köşegen Formülü **43**
6. GENEL KİRİŞLER n – GENLERİ **44**
6.1. Kirişler Çokgeni(Altıgen, Sekizgen, Ongen Ve Onikigen) Örnekleri **45**
6.2. İkizkenar Dörtgen Oluşturulması **47**
6.3. Bir Genel Euler Parametrizasyonu **49**
6.4. Genel Varsayımlar **50**
7. KAYNAKLAR **51**

1. GİRİŞ

Matematik ilminin temel işlevlerinden birkaçı; saymak, ölçmek ve karşılaştırma yapmak olarak ifade edilebilir. Saymak için doğal sayılara ihtiyacımız vardır. Bundan dolayı matematikte doğal sayılarla çalışmak insanoğluna her zaman daha ilginç gelmiştir. Bunun sonucunda; Sayılar teorisinde denklemlerin tamsayılarla çözülmesiyle ilgilenen Diophantine denklemleri ve geometride tamsayı kenarlı çokgenler (Pythagorean, Heron üçgenleri, Brahmagupta dörtgenleri, Robbins beşgenleri ve Robbins altıgenleri gibi) konuları çalışılmıştır. Bundan dolayı M.Ö. 200 yıllarında Arşimed, ileriye dönük olarak açık bir şekilde, bir üçgensel bölgenin kenarlarına bağlı olarak alanının hesaplamasına dair Heron formülünü ortaya koymuştur (Bartel 1975). M. S. 628 yılında, Brahmagupta, bir kirişler dörtgeninin alanı ile ilgili formülü ortaya koydu (Coxeter and Greitzer 1967).Bundan 13 yüzyıl sonra Robbins, matematik dünyasına, kirişler beşgenlerinin ve kirişler altıgenlerinin alanları için benzer formülleri verdi (Robbins 1994 ve Robbins 1995).

Bu çalışmada, rasyonel kenarlı ve rasyonel alanlı n – genlerin hangi özelliklerinin bulunduğunu araştırdık. Literatürde iyi çalışılmış olan $n = 3$ durumu genellikle Heron üçgeni, daha özel olarak da Pythagorean veya Brahmagupta üçgenleri olarak adlandırılır. Bu bağlamda, n – genimiz; $n = 4$ için Brahmagupta dörtgeni ve $n = 5$ *ve* $n = 6$ olduğu durumda ise sırasıyla Robbins beşgeni ve Robbins altıgeni olarak adlandırılır. Doğal olarak çokgenlerde kenar sayısı arttıkça iş karmaşıklaşmakta, dolayısıyla çalışmalarda daha zorlaşmaktadır.

1.1. Kaynak Araştırması

Bu çalışmamızda kaynak araştırması bölümüne bu alanın klasikleri olan eserleri tanıtarak başlıyoruz.

Dickson (1971) de; eserin basım yılına kadar olan sayılar teorisi ile ilgili gelişmeler, açık problemler ve çalışmalar özetlenmiştir. Bu kitap ilk olarak 1920 li yıllarda basılmış ve daha sonra ise yeni baskıları verilmiştir. Dolayısıyla başta Pythagorean, Brahmagupta ve rasyonel dik üçgenler gibi birçok özel üçgen olmak üzere, birçok rasyonel kenarlı çokgenlerle ilgili yapılan çalışmaları incelemiş ve geniş bir literatür özeti verilmiştir.

Sierpinski (1962) de; eserinde tamsayı kenarlı üçgenlerin özel çeşidi olan Pythagorean üçgenlerini alan, kenar, çevre v.b. yönleriyle incelemiştir. Ayrıca bu; Pythagorean üçgenleri ile ilgili olarak müstakil yazılmış ilk eserdir.

Guy (1994), Sayılar teorisinin geçmişten eserin basıldığı yıla kadar çözülememiş problemler ile bu problemlerle ilgili yayınları ve özetlerini veren bir eser ortaya koymuştur. Bu eserin Diophantine Denklemleri isimli bölümünde, başta Pythagorean ve Heron üçgenleri olmak üzere çokgenlerle ilgili çalışmaların özetleri ve çözülememiş problemler verilmiştir.

Beauregard ve Suryanarayan (1997**)** de; Heron üçgeninin kenar uzunlukları tamsayı olacak şekilde ve aritmetik dizinin sırasıyla üç elemanı ise bu üçgenlere aritmetik üçgenler denilmektedir. Bu makalede özellikle d-aritmetik üçgenler incelenmiştir. Pythagorean üçlülerinden d-aritmetik üçgeninin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir.

Buchholz ve MacDougall (1999) da; kenar uzunlukları geometrik veya aritmetik dizinin ardışık üç elemanı olan rasyonel alanlı üçgenler ve kirişler dörtgenleri çalışmıştır. Kenarları aritmetik dizinin ardışık üç elemanı olan üçgenlerin sonsuz bir ailesi için tam bir karekterizasyon verilmiştir. Kenarları geometrik dizinin ardışık üç elemanı olan hiçbir üçgenin olamayacağı gösterilmiştir. Ayrıca, kenar uzunlukları aritmetik veya geometrik dizinin ardışık üç elemanı olarak alınan bir kirişler dörtgeninin bulunamayacağı gösterilmiştir. Her iki tür dörtgenin varlığının araştırılmasında da eliptik eğriler kullanılmıştır.

Sastry (2000), bu çalışmada Heron üçgenlerinin ağırlık merkezi yolu ile farklı bir tanımlaması verilmiştir.

Sastry (2001 – 1) de; Heron üçgenini üretmek için Gergonne – Cevian ve kenarortay perspektifini ele alarak Heron üçgenlerinin λ – ailesini tanımlamıştır. Ayrıca Heron üçgenleri ile ilgili bazı problemlerin elemanter çözümlerini vermiştir.

Sastry (2001 – 2) de; Heron üçgenlerine $0< \theta < \pi$ olmak üzere açılar yolu ile farklı bir tanımlama getirilmiştir.

Sastry (2001 – 3) yaptığı çalışmada**;** *a, b, c* bir üçgenin kenarları ve yarı çevresi de $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ olmak üzere $A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ biçiminde üçgenler için verilen Heron alan formülünden yola çıkmıştır. Buradan ve

Brahmagupta' nın çalışmalarından hareketle; $n \geq 4$ ve $n \in \mathbb{N}$ için kenarları $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ve yarı çevre uzunluğu $s = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$ olan bir devirli n – genin alanını da Δ_n ile gösterilmek üzere, $\Delta_n = \sqrt{(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)\ldots(s-a_n)}$ biçiminde vermiştir.

Buchholz ve MacDougall (2001); rasyonel kenarlı ve alanlı kirişler n - genleri; $n = 3$ için heron üçgenlerine, $n = 4$ için Brahmagupta dörtgenlerine, $n = 5$ ve $n = 6$ için de Robins beşgenine ve Robins altıgenine dönüşecektir. Bu düşünceden hareketle bu tip bazı özel çokgensel bölgelerin alanları ve kenarları için daha önce elde edilen sonuçlar bu tip özel kirişler n-genler için genellenmiştir. Ayrıca, kenar sayısı altıdan fazla olan kirişler n – genleri için yapılan hesaplamalarda yaklaşım metotları kullanılmıştır.

Sastry (2002) de; Heron üçgenlerinden Brahmagupta dörtgenlerinin sonsuz bir ailesinin sayısal yolla üretilmesi verilmiştir.

Dragutin, Darko ve Vladimir (2004) Bu çalışmada Gauss ve Robins formüllerinin birleştirilmesiyle herhangi bir kirişler beşgeninin alanı için genellemeler vermiştir. Ayrıca üçgenler ve dörtgenler geometrisinden yüz yıllar sonra beşgenlerin trivial olmayan geometrisine ulaşılmıştır.

Sastry (2005 – 1) de; Pythagorean üçgenlerinden faydalanılarak; Heron üçgenlerinden, Brahmagupta dörtgenlerini ve Brahmagupta n–genlerini oluşturma yollarını vermiştir.

Sastry (2005 – 2) de; Heron dörtgenlerinin yeni bir ailesini Heron açıları yoluyla tanımlamaya çalışmıştır.

Ayoub (2006) eserinde; bir kirişler dörtgeninde, köşegenlerin de çevrel çemberinin kirişleri olduğu gerçeğinden hareketle; kirişler dörtgeninin kenarlarının üç farklı şekilde sıralanabileceği gösterilmiştir. Ayrıca kirişler dörtgeninin köşegenleri, alanı ve çevrel çemberinin yarıçapı hesaplanmıştır.

1.2. Ön Bilgiler

Bu kesimde, çalışmamızın daha sonraki bölümlerinde kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 1.2.1. *a, b* tam sayılar olmak üzere $a = b.c$ olacak şekilde bir *c* tam sayısı varsa *b, a* yı *böler* denir ve $b|a$ biçiminde gösterilir (Şenay 1989).

Tanım 1.2.2. $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun.

i) $d\,|\,a$ ve $d\,|\,b$ ise *d* ye *a* ile *b* nin bir *ortak böleni* denir.

ii) *d, a* ile *b* nin bir ortak böleni olsun. Eğer *a* ile *b* nin her *c* ortak böleni için $c\,|\,d$ ise, *d* ortak bölenine, *a ile b nin en büyük ortak böleni* (ebob) denir ve ebob(*a, b*) veya (*a, b*) ile gösterilir (Şenay 1989).

Tanım 1.2.3. *a* ve *b* gibi iki pozitif tam sayının en büyük ortak böleni 1 ise bu iki sayıya *aralarında asaldır* denir ve bu ebob(*a, b*) = (*a, b*) = 1 biçiminde gösterilir (Şenay, 1989).

Teorem 1.2.1 (Heron Formülü). *Kenar uzunlukları a, b, c ve yarı çevre uzunluğu da* $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ *olan bir ABC üçgensel bölgenin alanı A(ABC) ile gösterilir ve*

$$A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formül Yunan matematikçi Heron of Alexandria tarafından bulunduğu için *Heron alan formülü* olarak bilinir (Dickson, 1971).

Tanım 1.2.4. Kenar uzunlukları *a, b, c* tam sayıları ve alanı da tamsayı olan *ABC* üçgenine *Heron üçgeni,* (*a, b, c)* üçlüsüne de *Heron üçlüsü* denir (Kramer ve Luca 2001).

Teorem 1.2.2 (Kosinüs Teoremi). *Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve iç açıları da A, B, C ise;*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

dir (Ayres 1954).

Teorem 1.2.3 (Sinüs Teoremi). *Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c; iç açıları A, B, C ve çevrel çemberinin yarıçapı da R ise*;

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = 2R$$

dir (Ayres, 1954).

Tanım 1.2.5. $n \in Z^{+}$ ve $n \geq 3$ için, aynı düzlemde yalnız $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarında kesişen ve ardışık üç nokta doğrusal olmayacak şekilde $[A_1A_2]$, $[A_2A_3], \ldots, [A_nA_1]$ doğru parçalarının birleşim kümesine *çokgen* denir (Şahin 1997).

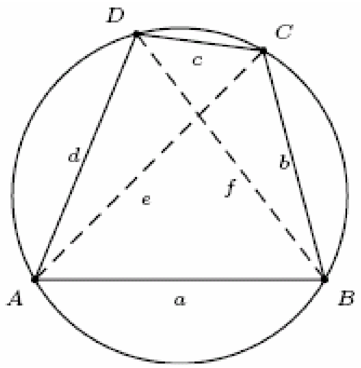
Tanım 1.2.6. Bir çokgenin kenarlarının uzantılarını aldığımızda, bu uzantılar çokgeni kesmiyorsa bu tip çokgen *dışbükey(konveks)*, eğer uzantılar çokgeni kesiyor ise bu tip çokgene de *içbükey(konkav) çokgen* denir (Şahin 1997).

Tanım 1.2.7. Herhangi üçü doğrusal olmayan *A, B, C, D* noktalarını birleştiren, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ doğru parçaları yalnız uç noktalarında kesişiyorlarsa, bu doğru parçalarının birleşimine *dörtgen* denir (Şahin 1997).

Tanım 1.2.8. Verilen bir ABCD dörtgeninde *A* ile *C* ve *B* ile *D* köşelerini birleştiren $[AC]$ ile $[BD]$ doğru parçalarına *ABCD* dörtgeninin *köşegenleri* denir (Şahin 1997).

Tanım 1.2.9. Bir çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına *kiriş* denir (Şahin 1997).

Tanım 1.2.10. Kenarları bir çemberin kirişleri olan dörtgene*, kirişler dörtgeni* denir. Ayrıca bütün kenarları bir çemberin kirişleri olan *n*-genlere kirişler *n*-geni denir. (Şahin 1997).



Şekil 1.2. Kirişler Dörtgeni

Şekildeki $[AB],[BC],[DC],[AD]$ doğru parçaları çemberin kirişleridir. Dolayısıyla, *ABCD* bir kirişler dörtgenidir. Yani kirişler dörtgeni; "köşeleri aynı çember üzerinde olan dörtgen" diye de tanımlanabilir.

Kirişler dörtgeninin köşegenleri her zaman çemberin merkezinden geçmez. Yalnızca kare, dikdörtgen, gibi özel dörtgenlerin köşegenleri merkezden geçer (Şahin 1997).

Teorem 1.2.4. *Bir ABC üçgeninde A, B, C açılar olmak üzere*;

i) $Sin2A = 2SinA.CosA = \dfrac{2TanA}{1+Tan^2 A}$,

ii) $Cos2A = 2Cos^2 A - 1 = \dfrac{1-Tan^2 A}{1+Tan^2 A}$,

iii) $Sin(A \pm B) = SinA.CosB \pm SinB.CosA$,

iv) $Cos(A \pm B) = CosA\ CosB \mp SinA.SinB$,

dir (Ayres 1954).

Tanım 1.2.11. *ABC* üçgeninin bir *A* dar açısı için*; SinA = Sin(π – A) ve CosA = – Cos(π – A)* dır (Ayres 1954).

Teorem 1.2.5. *Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve açıları da A, B, C ise;*

$$A(ABC) = \frac{1}{2} abSinC = \frac{1}{2} acSinB = \frac{1}{2} bcSinA$$

dir (Rich 1963).

Tanım 1.2.12. Çemberin merkezinden çıkan iki ışının oluşturduğu açıya *çemberin merkez açısı* denir. Merkez açının gördüğü yayın ölçüsüne de *merkez açının ölçüsü* denir (Rich 1963).

Tanım 1.2.13. Bir çemberin iç bölgesinde, köşesi çember üzerinde bulunan açıya çevre açı denir.(Rich 1963).

Tanım 1.2.14. Bir çemberin herhangi iki noktası arasındaki parçasına *yay* denir (Rich 1963).

Teorem 1.2.6. *n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden geçen köşegenler çokgeni (n – 2) tane üçgene ayırırlar* (Rich 1963).

Teorem 1.2.7. *ABCD köşe noktaları aynı çember üzerinde bulunan bir dörtgen (yani kirişler dörtgeni) olsun. Ayrıca bu dörtgenin; a, b, c, d kenar uzunluklarını, e ile f de köşegen uzunluklarını göstersin. Bu durumda* $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ *için;*

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{1.1}$$

biçiminde verilir. Ayrıca;

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \tag{1.2}$$

$$f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}, \tag{1.3}$$

dir (Sastry, 2002).

İspat. Teorem 1.2.4. ten kirişler dörtgeninde karşılıklı açıların bütünler olduğunu biliyoruz. Böylece B ve D açıları da karşılıklı açılar olduğuna göre ölçümleri toplamı 180^0 dir. Bunu alan formülünde yerine koyalım.

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcdCos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)} \tag{1.4}$$

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcdCos^2\left(\frac{180^0}{2}\right)} \tag{1.5}$$

olur ki burada $Cos\frac{180^0}{2} = 0$ olduğundan;

$$A(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{1.6}$$

elde edilir.

Tekrar Şekil 1.2. ye dönersek; B ve D açıları karşılıklı açılar olduğundan ölçümleri toplamı 180^0 dir. Bu da $CosB = -\,CosD$ olması anlamına gelir. Buradan;

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2abCosB \quad \text{ve} \quad e^2 = c^2 + d^2 - 2cdCosD \tag{1.7}$$

olur. Bu son iki ifadenin sol tarafları aynı olduğundan;

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2abCosB = c^2 + d^2 - 2cdCosD \tag{1.8}$$

yazabiliriz ki böylece;

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab} + \frac{c^2+d^2-e^2}{2cd} = CosB + CosD = 0 \tag{1.9}$$

elde ederiz. Yani;

$$\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-e^2}{2cd}=0 \tag{1.10}$$

dir. Burada gerekli işlemler yapıldığında;

$$e^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)} \tag{1.11}$$

ifadesine ulaşırız ki bu da;

$$e=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \tag{1.12}$$

olması demektir.

Benzer şekilde, A ve C açıları da dörtgende karşılıklı açılar olduğundan ölçümleri toplamı 180^0 dir. Bu da; $CosA = -Cos\,C$ olması anlamına gelir. Buradan da yukarıdakine benzer şekilde işlem yapıldığında;

$$f=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \tag{1.13}$$

bulunur. □

Eğer (3.7) ifadesinde $d = 0$ alınırsa; bu ifade a, b, c kenarlı bir üçgene dönüşür ki alan formülü de bilinen Heron alan formülüdür.

Teorem 1.2.8 (Ptolemy Teoremi). *Bir ABCD kirişler dörtgeninin kenar uzunluklarını* $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ *ile ve köşegen uzunluklarını da* $|AC| = e$, $|BD| = f$ *ile gösterelim. O zaman, kirişler dörtgenin köşegenlerinin çarpımı, karşılıklı kenarlarının çarpımlarının toplamına eşittir. Yani;*

$$ef = ac+bd \tag{1.14}$$

dir.

İspat. Yukarıda *ABCD* kirişler dörtgeninin köşegen uzunluklarının nasıl hesaplandığı verilmişti. Şimdi de bunlar birbirleri ile çarpılsın;

$$e=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \quad \text{ve} \quad f=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

ise;

$$ef=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\cdot\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}=\sqrt{(ac+bd)^2}=ac+bd$$

elde edilir ki ispat biter. □

2. HERON ÜÇGENLERİ

Kenarları *a, b, c* olan bir üçgensel bölgenin alanı için Teorem 1.2.1 ile verilen Heron' un alan formülünden; Alanı K_3 ve yarı çevreyi de $s=\frac{a+b+c}{2}$ ile gösterirsek o zaman,

$$K_3=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

olacaktır. 1670 de Bachet, iki Pythagorean üçgenini ortak dik kenarları boyunca birleştirerek bu eşitliğe rasyonel bir çözüm metodu bulmuş oldu (Dickson 1952). Bu Heron üçgenlerinin hepsi için bir üretim metodu olmasına rağmen, *p, q, r, s* nin rasyonel parametreler olduğu durum için ilk olarak Euler aşağıdaki bir formül verdi.

$$[a:b:c]=\left[(ps+qr)(pr-qs):rs\left(p^2+q^2\right):pq\left(r^2+s^2\right)\right] \qquad (2.1)$$

Tablo 2.1. (2.1) Formülüyle Üretilen Heron Üçgeni Örnekleri

p	q	r	s	a	b	c	s	K_3	p	q	r	s	a	b	c	s	K_3
2	1	1	1	3	5	4	6	6	4	1	1	1	15	17	8	20	60
2	2	2	1	12	16	20	24	96	4	2	1	1	12	20	16	24	96
3	1	1	1	8	10	6	12	24	4	1	2	1	42	34	20	48	336
3	2	1	1	5	13	12	15	30	4	1	1	2	18	34	20	36	144
3	1	2	1	25	20	15	30	150	4	2	2	1	48	40	40	64	768
3	1	1	2	7	20	15	21	42	4	1	2	2	60	68	32	80	960
3	1	2	2	32	40	24	48	384	4	2	2	2	48	80	64	96	1536
3	2	2	1	28	26	30	42	336	4	3	2	2	28	100	96	112	1344
3	2	2	2	20	52	48	60	480	5	1	1	1	24	26	10	30	120
3	1	3	1	48	30	30	54	432	5	4	4	4	144	656	640	720	46080
3	3	3	1	72	54	90	108	1944	5	2	2	1	72	58	50	90	1440
3	3	3	2	45	108	117	135	2430	6	1	1	1	35	37	12	42	210

Carmichael ise Eulerin dört parametreli formülüne karşı en kısa olarak kabul edilen

$$[a:b:c]=\left[n\left(m^2+k^2\right):m\left(n^2+k^2\right):(m+n)\left(mn-k^2\right)\right] \qquad (2.2)$$

Biçiminde üç parametreli formülü ortaya koydu.

Tablo 2.1. (2.2) Formülüyle üretilen Heron Üçgeni Örnekleri

n	m	k	a	b	c	s	K_3	n	m	k	a	b	c	s	K_3
2	1	1	4	5	3	6	6	4	1	1	8	17	15	20	60
2	2	1	10	10	12	16	48	4	2	1	20	34	42	48	336
3	1	1	6	10	8	12	24	4	2	2	32	40	24	48	384
3	2	1	15	20	25	30	150	4	3	1	40	51	77	84	924
3	2	2	24	26	10	30	120	4	3	2	52	60	56	84	1344
2	3	1	20	15	25	30	150	4	3	3	72	75	21	84	756

Rasyonel alanlı çokgenler hakkında araştırmaları incelediğimizde daha çok özel durumların çalışıldığını görürüz. Şimdi Heron üçgensel bölgenin alanı, çevresi ve parçalanabilirliğiyle ilgili aşağıdaki durumları verelim.

Lemma 2.1. *Üç tamsayı kenarlı bir Heron üçgensel bölgenin alanı tamsayıdır.*

İspat. Aralarında asal *u* ile *v* tamsayıları için alanın $K_3 = \frac{u}{v}$ olduğunu kabul edelim. O zaman Heron alan formülü;

$$16u^2 = v^2\left(a+b+c\right)\left(-a+b+c\right)\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)$$

olmasını gerektirir. $2 \nmid obeb(a,b,c)$ olmasını kabul etmemiz genelliği bozmaz. Aksi durumda v = 1 olurdu.

Sonra $obeb(u,\ v) = 1$ olduğundan $v^2|16$ bulunur ki buradan da $v|4$ olduğunu görürüz. Eğer v pozitif tamsayısına kısıtlanırsak üç durum söz konusu olur. Eğer v = 1 durumunu inceledik. Eğer $v = 2$ ise, yukarıdaki denklemde $a + b + c \equiv 0 (mod\ 2)$ olur ki bu durumda sağ taraftaki çarpanlardan her biri 2 ile bölünebilirdir. Böylece 2, u – a yı böler bulunur ki bu bir çelişkidir. En ilginç durum $v = 4$ olmasıdır. Böylece

$$\mathrm{u}^2 = (\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})(-\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})(\mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{c})(\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c})$$

olmasını gerektirir. $2 \nmid obeb(a,b,c)$ olduğundan *a, b* ve *c* lerden bir veya üçü de tek olması gerekir. Bu durumda,

$$u^2 = (2k_1 + 1).(2k_2 + 1).(2k_3 + 1).(2k_4 + 1)$$

olacak şekilde k_1, k_2, k_3, k_4 tamsayıları vardır. Fakat *u* nun tek olması $u^2 \equiv 1\ (mod\ 4)$ olmasını gerektireceğinden;

$$2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \equiv 0(mod\ 4)$$

elde edilir. k_i lerden *a, b, c* terimlerine tekrar dönersek;

$$\begin{aligned} 2\left(k_1+k_2+k_3+k_4\right) &= \left(a+b+c-1\right)+\left(-a+b+c-1\right)+\left(a+b+c-1\right)+\left(a+b+c-1\right) \\ &= 2\left(a+b+c-2\right) \\ &\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız ki bu bir çelişkidir. Böylece bir Heron üçgensel bölgenin alanının tamsayı olduğu gösterilmiş olur. □

Şimdide aşağıdaki durumu verelim.

Teorem 2.1. *Tamsayı kenarlı bir Heron üçgeninin çevre uzunluğu çifttir.*

İspat. Lemma 2.1 i, K_3 ün bir tamsayı olması için Heron alan formülünü P çevresine göre düzenlersek,

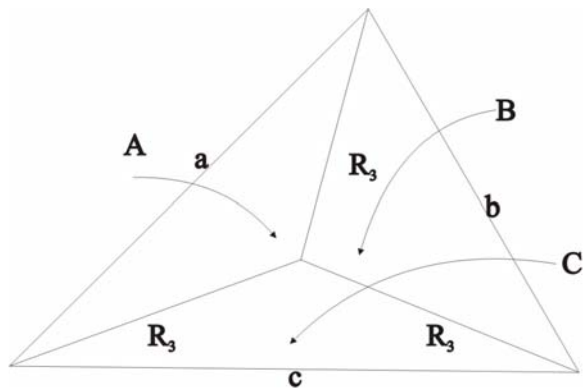
$$16K_3^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$$

elde edilir. Açık olarak, *mod* 2 ye göre her bir kenarı düşünürsek, $P^4 \equiv 0$ (*mod* 2) olması gerekeceğinden $P \equiv 0$ (*mod* 2) olacağı açıktır. □

Bu noktada, bir n – gen daha küçük rasyonel alanlı olan veya olmayan m-genlerden oluşturulabilirse o zaman burada yarıçapsal parçalanışın kullanışlı bir tanımını verelim.

Tanım 2.1. Rasyonel kenarlı ve alanlı bir kirişler n-geni, her biri çevrel çemberinin iki yarıçapı ve diğeri de n – genin bir kenarından oluşan n tane ikizkenar heron üçgenine bölünebiliyorsa *yarıçapsal parçalanabilirdir* denir.

Elbette biz parçalanabilir n – genler kadar, parçalanamayan n – genler ile de ilgileniyoruz. Şimdi daha sonra kullanacağımız bir sonucu verelim.



Şekil 2.1. Bir Heron Üçgeninin Yarıçapsal Parçalanışı

Teorem 2.2. *Herhangi bir Heron üçgeni yarıçapsal parçalanabilirdir.*

İspat. Kenarları a, b, c ve alanı da K_3 olan bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı olan R_3,

$$R_3 = \frac{abc}{4K_3(a,b,c)}$$

biçiminde verilir. Rasyonel kenarlı bir üçgenin çevrel çemberin yarıçapının da rasyonel olması için gerek ve yeter şart alanının tamsayı olması gerektiği açıktır. Sonra α, β, γ pozitif rasyonelleri ve m_1, m_2, m_3 kare çarpan ihtiva etmeyen tamsayıları için,

$$K_3\left(a, R_3, R_3\right) = A = \alpha\sqrt{m_1}\ ,$$

$$K_3\left(b, R_3, R_3\right) = B = \beta\sqrt{m_2}\ ,$$

$$K_3\left(c, R_3, R_3\right) = C = \gamma\sqrt{m_3}\ ,$$

olsun. (*a, b, c*) üçgen bölgenin alanını rasyonel kabul ettiğimizden,

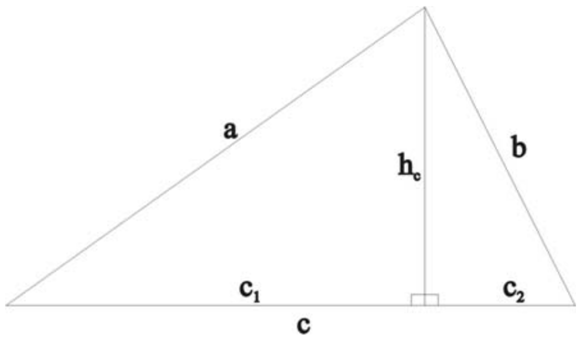
$$\alpha\sqrt{m_1} + \beta\sqrt{m_2} + \gamma\sqrt{m_3} \in \mathbb{Q}$$

olması gerektiğini gözlemleriz. Ve buradan da $\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3}$ lerin hepsinin rasyonel olması gerektiğini görürüz. □

2.1. Özel Rasyonel Alanlı Üçgenler

Bu kesimde kenarlarından ikisi rasyonel ve diğeri de ikinci dereceden irrasyonel olan rasyonel alanlı üçgenlerle ilgileneceğiz. Daha özel olarak; *a, b* $\in \mathbb{Q}$, $c \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ ve *m* de iki rasyonelin karelerinin toplamı olmak üzere, [*a, b, c*] kenarlı ve rasyonel alanlı üçgenler bulmak istiyoruz. Elbette, bu durumda üçgenlerin keyfi bir kümesi oldukça kullanışlı bir modele dönüşür.

Sonuçta ilk olarak tabanların parçalara ayrılmasına ve yüksekliğin de irrasyonel olmasına kısıtlanacağız.



Şekil 2.2. Özel Rasyonel Alanlı Üçgen

Teorem 2.3. *Herhangi rasyonel alanlı bir üçgenin kenarlarını a, b, c ile c kenarına ait yüksekliği* h_c *ile c kenarına ait yüksekliğin ayırdığı c ye ait parçaları da* c_1 *ve* c_2 *ile gösterelim. Eğer a, b* $\in \mathbb{Q}$, $c \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ *ise o zaman* $h_c, c_1, c_2 \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ *olur.*

İspat. Eğer üçgensel bölgenin alanını Δ ile gösterirsek o zaman

$$\Delta = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$h_a, h_b \in \mathbb{Q}$ olurken $h_c \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ olur. Ayrıca Pythagorean teoreminin iki uygulamasıyla,

$$c_1^2 = a^2 - h_c^2, \qquad c_2^2 = b^2 - h_c^2$$

elde edilir ki buradan c_1^2 ve c_2^2 nin her ikisi de rasyonel bulunur. Eğer $\overline{c}$ rasyoneli için $c = \overline{c}\sqrt{m}$ olduğunu kabul ederek, $c_1 + c_2 = c$ eşitliğinin karesini alırsak;

$$c_1 c_2 = \frac{\overline{c}^2 m - c_1^2 - c_2^2}{2}$$

elde edilir ki bu eşitliğin sağ tarafının rasyonel olduğu açık olarak görülür. $c - c_1$ ile c_2 nin yerini değiştirir ve rasyonel parçaları birleştirecek olursak;

$$c_1 = \left(\frac{\overline{c}^2 m + c_1^2 - c_2^2}{2\overline{c}m} \right) \sqrt{m}$$

elde edilir ki böylece $c_1 \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ bulunmuş olur. Benzer olarak $c_2 \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ bulunur. □

Carmichael(1952)'ın verdiği gibi aşağıda, böyle bütün üçgenleri parametrize etmeye çalışıyoruz. Böylece $a, b \in \mathbb{Q}$, $h, c_1, c_2, c \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ olmak üzere

$$h^2 = a^2 - c_1^2 = b^2 - c_2^2, \qquad c = c_1 + c_2$$

denklemlerini düşünelim. Sonra $\overline{h}, \overline{c}_1, \overline{c}_2$ ve $\overline{c}$ rasyonelleri için $h = \overline{h}\sqrt{m}$ $c_1 = \overline{c}_2\sqrt{m}$, $c = \overline{c}\sqrt{m}$ olsun. Yukarıda $h^2 = (a - c_1)(a + c_1)$ olduğundan, $u \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{m}\right)$ olmak üzere, $u := a + c_1$ biçiminde yeni bir değişkeni tanımlamamız genelliği bozmaz. Eğer $u = u_1 + u_2\sqrt{m}$ olarak alırsak;

$$a + \overline{c}_1\sqrt{m} = u_1 + u_2\sqrt{m} \qquad \text{ve} \qquad a - \overline{c}_1\sqrt{m} = \frac{\overline{h}^2 m}{u_1 + u_2\sqrt{m}}$$

ifadelerine ulaşırız. $m \notin \mathbb{Z}^2$ olmak üzere, bu iki denklemin katsayılarını eşitlersek;

$$a = u_1 = \frac{\overline{h}^2 m u_1}{u_1^2 - m u_2^2} \quad ve \quad \overline{c}_1 = u_2 = \frac{\overline{h}^2 m u_2}{u_1^2 - m u_2^2}$$

elde ederiz ki burada işaret sınırlaması yapılırsa,

$$u_1^2 - m u_2^2 = \overline{h}^2 m$$

elde edilir. Benzer şekilde $h^2=(b-c_2)(b+c_2)$ denkleminde $b+c_2=v_1+v_2\sqrt{m}$ olarak alındığında,

$$u_1^2-mu_2^2=\overline{h}^2m$$

sınırlamasına ulaşırız. Eğer $u_1=m\overline{u}_1$ *ve* $v_1=m\overline{v}_1$ değişkenlerini yukarıdaki ifadelere uygularsak;

$$m=\left(\frac{\overline{h}}{\overline{u}_1}\right)^2+\left(\frac{u_2}{\overline{u}_1}\right)^2=\left(\frac{\overline{h}}{\overline{v}_1}\right)^2+\left(\frac{u_2}{\overline{v}_1}\right)^2$$

ifadelerine ulaşılır. Böylece kare olmayan bir m tamsayısı yukarıdaki sınırlamalar altında görüldüğü gibi iki rasyonelin karelerinin toplamı yazılmış olur. Bu sınırlandırmalar yapılarak yukarıdaki ifade göz önüne alınırsa şu ifadeye ulaşırız.

Lemma 2.2. *Eğer* $m=u_0{}^2+v_0{}^2$ *ise* $m=u^2+v^2$ *ifadesinin* $p\in\mathbb{Q}$ *için genel çözümü;*

$$u=\frac{u_0p^2+2v_0p-u_0}{p^2+1},\ v=\frac{v_0p^2-2u_0p-v_0}{p^2+1}$$

biçiminde verilir.

İspat. Kiriş metodunu kullanalım.

m i doğru modelde sabit olarak düşüneceğiz ki bu durumda lemma 2.2 nin hipotezini gerçekleyen u_0 ve v_0 ı hesaplayabiliriz (Cremona – Rusin algoritması yoluyla). Böylece

$$\overline{h}=g_1\left(v_0p^2+2v_0p-u_0\right)$$
$$u_2=g_1\left(v_0p^2-2v_0p-v_0\right)$$
$$\overline{u}_1=g_1\left(p^2+1\right)$$

ve

$$\overline{h}=g_2\left(u_0q^2+2v_0q-u_0\right)$$
$$v_2=g_2\left(v_0q^2-2u_0q-v_0\right)$$
$$\overline{v}_1=g_2\left(q^2+1\right)$$

olacak şekilde g_1, g_2, p ve q rasyonel parametrelerinin bulunduğu gösterilebilir. Eğer bu iki denklem sistemi arasında $\overline{\mathrm{h}}$ yi yok edersek, $k=g_2/g_1\in\mathbb{Q}$ olmak üzere;

$$u_0p^2+2v_0p-u_0=k\left(u_0q^2+2v_0q-u_0\right)$$

konik eşitliğine ulaşırız. Sonra, eşitliğin her iki tarafını da tam kare haline getirirsek;

$$\frac{1}{u_0}\left(u_0 p+v_0\right)^2-\frac{u_0^2+v_0^2}{u_0}=k\left(\frac{1}{u_0}\left(u_0 q+v_0\right)^2-\frac{u_0^2+v_0^2}{u_0}\right)$$

ifadesine ulaşırız. Burada $\overline{P}:=u_0 p+v_0$, $\overline{Q}:=u_0 q+v_0$ afin dönüşümünü uygular ve yeniden düzenlersek;

$$\overline{P}^2-k\overline{Q}^2=\left(1-k\right)m$$

ifadesine ulaşırız. Bu son denklemde $\overline{P}=P/R$ *ve* $\overline{Q}=Q/R$ dersek o zaman ifademiz;

$$P^2-Q^2=\left(1-k\right)mR^2 \tag{2.3}$$

homojen ifadesine dönüşür. Hilbert sembolünün kullanılmasıyla (Parshin and Shafarevich 1990) bu denklemin bir rasyonel çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $p=\infty$ durumunu da içeren her p asalı için;

$$\left(k,\left(1-k\right)m\right)_p=1$$

olmasıdır. Elbette m pozitif olduğunda, reel çözümlerin bulunacağı açıktır. Bunun içinde sonlu sayıda asalın bulunduğunu göstermek yeterlidir. $\overline{h},u_2$ ve $\overline{h},v_2$ ile ilgili diğer üç durum için de gerekli düzenlemeler ve hesaplamalar sonucunda, (2.3) ifadesine benzer konik ifadeler bulunur ki burada sadece k nın değerleri farklı olacaktır.

Sonra eğer *k,* her p asalı için $\left(k,\left(1-k\right)m\right)p=1$ şartını sağlayan bir sabit rasyonel ise o zaman

$$u_0 p^2+2v_0 p-u_0=k\left(u_0 q^2+2v_0 q-u_0\right)$$

bir özel çözüme sahip olur ki buna $\left(p,q\right)=\left(p_0,q_0\right)$ diyelim. Burada; kiriş metodu kullanılarak p ile q yu, $u_{0\,,}v_{0\,,}p_0,q_{0\,,}k$ sabit değerlerine ve r ile s serbest parametrelerine bağlı olarak;

$$p=\frac{\left(-u_0 p_0-2v_0\right)r^2+2k\left(v_0 q_0+v_0\right)rs-kp_0 u_0 s^2}{u_0 u^2-ku_0 s^2},$$

$$q=\frac{-u_0 q_0 r^2-2\left(u_0 p_0+v_0\right)rs+k\left(v_0 q_0+2v_o\right)s^2}{u_0 r^2-ku_0 s^2}$$

biçiminde yazarız. □

3- BRAHMAGUPTA DÖRTGENLERİ

Bu bölümde özel tamsayı kenarlı bir kirişler dörtgeni olan Brahmagupta dörtgenlerinin bazı özellikleri üzerinde durulacaktır.

Teorem 1.2.8 de verildiği üzere kenarları *a, b, c* ve *d* olan bir kirişler dörtgeninin alanını K_4 ile gösterirsek, yarı çevre $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ olmak üzere bu dörtgenin kenarlarına bağlı Brahmagupta Alan formülü

$$K_4=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

dir. Burada dörtgenin; çevrel çemberinin yarıçapına bağlı parçalanışını aradığımızdan çevrel çemberinin yarıçapını veren;

$$R_4=\frac{\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}}{4K_4} \tag{3.1}$$

formülüne ihtiyacımız vardır ki bu formül ilk kez M.S. 1430 yıllarında Paramesvara tarafından türetilmiştir (Gupta 1989).

Eğer onun kenarlarından biri olan *d* yi sıfır kabul edersek dörtgenimiz üçgene dönüşür. Bu durumda yukarıdaki alan formülü, Heron alan formülüne ve çevrel çemberin yarıçap formülü de üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı ifadesi olan R_3 e dönüşür. Heron üçgenlerindekine benzer şekilde Brahmagupta dörtgenleri içinde aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1. *Dört tamsayı kenarlı herhangi bir Brahmagupta dörtgensel bölgenin alanı tamsayı ve çevresi de çifttir.*

İspat. Kenarlar tamsayı ve alan da rasyonel olduğunda

$$(4K_4)^2=8abcd+2(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)-a^4-b^4-c^4-d^4$$

ifadesine ulaşılır ki bu da $4K_4\in\mathbb{Z}$ olmasını gerektirir. Teorem 2.1. de olduğu gibi kenarların tek sayıdası tek olamayacağından bu toplam 4 modülüne göre 3 e kongruent olmaz. Böylece $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ tamsayı olduğu gibi alanı da tamsayı olur. □

Böylece dört veya daha fazla kenarlı *n* – genler için mümkün olan diğer bir parçalanış da köşegensel parçalanıştır. Şimdi bu tanımı verelim.

Tanım 1.2.16. Rasyonel kenarlı ve alanlı bir kirişler *n*-geni; eğer, bir ortak rasyonel köşegen kullanılarak en az iki rasyonel alanlı çokgene bölünebiliyorsa *köşegensel parçalanabilirdir* denir.

Burada köşegensel parçalanabilirlikle yarıçapsal parçalanabilirlik arasında bir ilişkinin olduğunu düşünebiliriz. Bu ilişki dörtgenler ve beşgenlerde mevcut olmasına rağmen altıgenlerde bulunmaması ilginçtir.

Şimdi ilk olarak bu durumu dörtgenlerde inceleyelim.

Benzeşmeyen Heron Üçgenlerine ayrılabilen iki farklı tip Brahmagupta dörtgeni vardır ki onların parçalanışı; biri parçalanabilir 3*x*4 üçgenine ve diğeri de parçalanamaz birim kareye benzer parçalanışa sahiptir. Onların her birini dönüşümlü düşünelim.

3.1. Parçalanabilir Dörtgenler

Bütün rasyonel kenarlı kirişler n – genlerinin yarıçapsal parçalanışını ilk olarak Euler ortaya koydu (Dickson 1952). Schubert (1905) de Brahmagupta dörtgenlerinin köşegensel parçalanışının parametrizasyonunu buldu. Daha geliştirilmiş son versiyonu da Sastry (2002 ve 2005) tarafından verildi. Eğer burada $n = 4$ alınırsa bu iki farklı parametrizasyon aynı hale gelir.

Kirişler dörtgeni için Euler metodunu özelleştirelim. Çevrel çemberinin yarıçapı rasyonel olduğunda, birim çember üzerindeki bütün dörtgenleri üretmek yeterli olacağından onları bir keyfi parametreye bağlı olarak artırmak yeterlidir. Euler p_1, p_2, p_3 biçiminde üç parametre seçmiş ve onları kullanarak $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ biçiminde üç açı üretmiştir. Bunu yaparken, yarım açı formülleri olan

$$\sin\theta_i = \frac{2p_i}{p_i^2+1} \text{ ve } \cos\theta_i = \frac{p_i^2-1}{p_i^2+1}$$

ifadeleri kullanılmıştır.

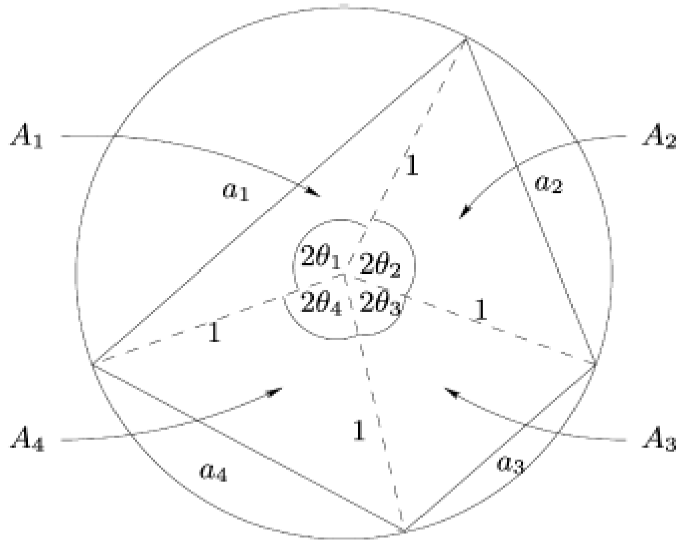
Eğer bir konveks dörtgen istiyorsak bu üç açı;

$$0 < \theta_i \le \frac{\pi}{2} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{i=1}^{3}\theta_i < \pi$$

şartlarını sağlamalıdır. Euler kalan θ_4 açısını da

$$\theta_4 = \pi - \sum_{i=1}^{3}\theta_i$$

biçiminde tanımlamıştır. θ_i açıları yarım açılar olarak tanımlandığından dörtgenin her birinin kenarına bu açıların iki katı karşılık gelirler ve çevrel çemberinin merkezindedirler(Bak Şekil 3.1).



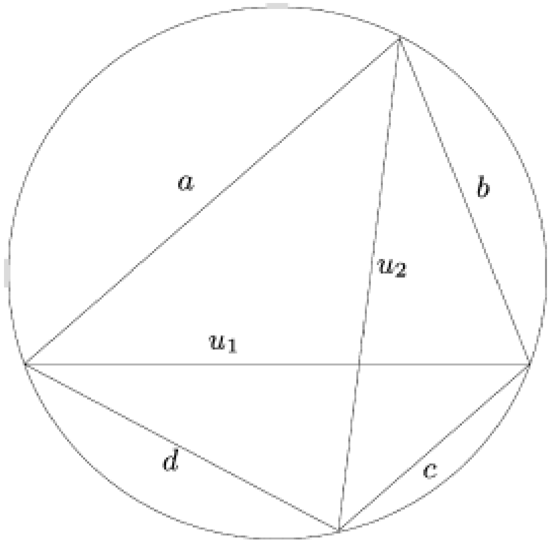
Şekil 3.1. Yarıçapsal Parçalanmış Bir Kirişler Dörtgeni

Burada θ_4 ün $\theta_4 < \frac{\pi}{2}$, $\theta_4 > \frac{\pi}{2}$ veya $\theta_4 = \frac{\pi}{2}$ değerleri olması durumuna göre, çevrel çemberinin merkezi sırasıyla dörtgenin iç bölgesinde, dış bölgesinde veya a_4 kenarı üzerinde olur. Sonra, *Sin(A±B)* ve *Cos(A±B)* değerlerinin rasyonelliği, *Sin A, Sin B, Cos A* ve *Cos B* değerlerinden elde edilir. Euler, *Sin* θ_4 ve *Cos* θ_4 değerlerinin her ikisinin de rasyonelliğini gösterdi. Böylece o bütün kenar uzunluklarını ve karşılık gelen dörtgenin parçalanmış alanlarını

$$a_i = \sqrt{2 - 2\cos 2\theta_i} = 2\sin\theta_i \text{ ve } A_i = \frac{1}{2}\sin 2\theta_i = \sin\theta_i \cos\theta_i$$

olarak vererek, onların rasyonel olduğunu hesaplayabildi. Böylece dörtgensel bölge rasyonel alanlı ve dörtgen rasyonel kenarlı olur.

Şimdi artık yarıçapsal parçalanabilir dörtgenler ile köşegensel parçalanabilir dörtgenler arasındaki ilişkiyi araştırabiliriz.. Ptolemy'nin (Teorem 1.2.8) teoremini hatırlar (Durell and Robson 1953) ve Şekil 3.1'e uygularsak, herhangi bir kirişler dörtgeni için $u_1 u_2 = ac + bd$ elde edilir. Buradan bir köşegeni rasyonel olduğunda diğerinin de rasyonel olması gerektiği ortaya çıkar.



Şekil 3.2. Bir Rasyonel Köşegen, İki Rasyonel Köşegen Olmasını Gerektirir.

Köşegensel parçalanışın iki farklı tipi arasındaki ilişkiyi düşünürsek, kolayca şu sonuca ulaşırız.

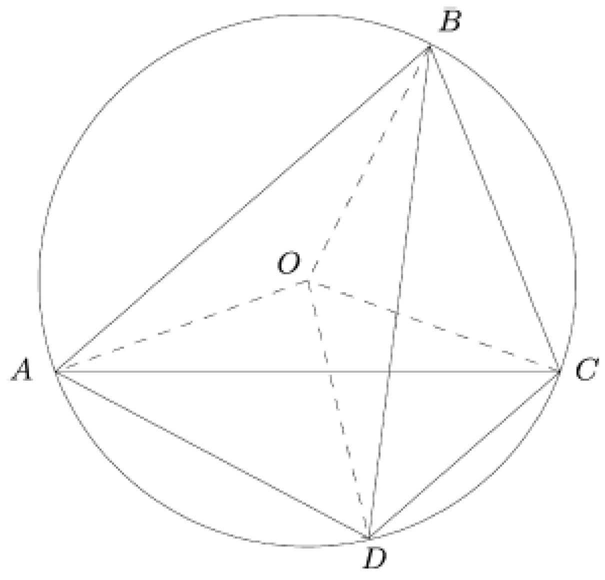
Lemma 3.2. *Bir rasyonel köşegenli herhangi bir Brahmagupta dörtgeni, bu köşegeni boyunca köşegensel parçalanabilirdir.*

İspat. Şekil 3.2 yi göz önüne alalım. u_1 rasyonel köşegen olsun. Eğer a ile b kenarları arasındaki açı α ve c ile d kenarları arasındaki açı β ise o zaman $\alpha + \beta = \pi$ olur. Ayrıca $\sin\alpha = \sin\beta$ olduğunu belirtelim. Buradan üçgen bölgelerin alanları $K_3(c, d, u_1) = (c.d.\text{Sin}\beta)/2$ ve $K_3(a, b, u_1) = (a.b.\text{Sin}\alpha)/2$ olacağından $K_4 = ((ab + cd)\text{Sin}\alpha)/2$ olarak bulunur. K_4 rasyonel kabul ettiğimizden $\sin\alpha$, $\sin\beta$ ile $K_3(c, d, u_1)$ ve $K_3(a, b, u_1)$ alanları da rasyonel olur. Diğer parçalanış için Teorem 1.2.8 kullanılır. □

Köşegensel parçalanış ile yarıçapsal parçalanışı ilişkilendirme amacımızın ilk kısmını ifade eden aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2. Köşegensel parçalanabilen herhangi bir dörtgen, yarıçapsal parçalanabilir bir dörtgendir.

İspat. Şekil 3.3 te verilen ABCD kirişler dörtgeni köşegensel parçalanabilir olsun.O zaman köşegensel parçalanabilir ABCD kirişler dörtgeninde; ABD, BCD, ACD, ABC üçgenleri Heron üçgenleri olur.



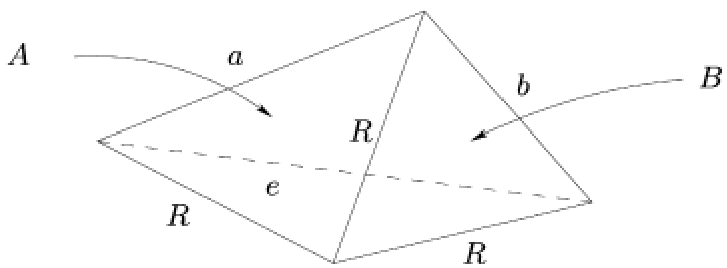
Şekil 3.3. Köşegensel Parçalanmış Bir Dörtgen

Teorem 2.2. den dolayı, onların her biri bir yarıçapsal parçalanışa sahip olur ve dörtgenin yarıçapsal parçalanışıyla elde edilen AOB, BOC, COD ve DOA üçgenleri Heron üçgenleridir.

Çevrel çemberinin merkezinin, kirişler dörtgeninin köşegeni üzerinde, dörtgenin bir kenarı üzerinde veya dışında olmasına göre değişen diğer üç durum için de ispat benzer şekilde yapılır. □

Tersini bulmak için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma 3.3. (Hughes). *Aynı ikizkenarlara sahip iki ikizkenar Heron üçgeni, bu ikizkenarlarından birisi boyunca birleştirilir ve heron üçgenlerinin diğer eş kenarları oluşan dörtgenin komşu kenarları eş olursa, dörtgenin diğer köşegeni de rasyonel olur. Yani Şekil 3.4. te verildiği gibi; eğer* $a, b, R, A, B \in \mathbb{Q}$ *ise* $e \in \mathbb{Q}$ *olur.*



Şekil 3.4. Birleştirilmiş İkizkenar Üçgenden Elde Edilmiş Bir Dörtgen

İspat. Dörtgenin a kenarının karşısındaki açı α ile b kenarının karşısındaki açı da β ile gösterilsin. Bu iki ikizkenar üçgenlerin her ikisi de Heron olduğundan yükseklikleri rasyonel olur. Bu yükseklikleri Sinüs teoremini kullanarak bulursak;

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2R},\ \sin\frac{\beta}{2}=\frac{b}{2R}\ \text{ ve }\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2A}{aR},\ \cos\frac{\beta}{2}=\frac{2B}{bR}$$

elde edilir. Yukarıdan α ile β nın Sin ve Cos değerleri rasyonel olacağından buradan hareketle e köşegenini hesaplarsak;

$$e=2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2R\left(Sin\frac{\alpha}{2}Cos\frac{\beta}{2}-Cos\frac{\alpha}{2}Sin\frac{\beta}{2}\right)$$

olur ki e nin rasyonel olduğu açıktır.(Bretschneider 1842 ve Coolidge 1939). □

Açık olarak lemma 3.3'e göre yarıçapsal ayrıştırılabilir bütün dörtgenler kesinlikle en az bir tane rasyonel köşegene sahip olmalıdır. Bunu lemma 3.2. ile birleştirecek olursak bizi aşağıdaki teoremin ispatına götürür.

Terorem 3.3. *Yarıçapsal parçalanabilir dörtgenler köşegensel parçalanabilirdir.*

Buna göre, Eulerian dörtgenleri (daha önce belirtildi) bütün yarıçapsal (veya köşegensel) parçalanabilir dörtgenler aracılığıyla tam olarak belirlenir. Buradan hareketle, bütün Brahmagupta dörtgenlerinin anlaşılması için birkaç kısıtlı aileyi inceleyeceğiz.

3.2. Brahmagupta Dörtgenlerinin Kısıtlı Aileleri

Bir dörtgenin kenarlarına çeşitli kısıtlamalar uygulandığında daha basit durumlara ulaşacağımızdan karşılaşılan sorulara daha uygun cevaplar verilebilir. Örneğin, eğer bir kirişler dörtgenin kenar uzunlukları sırasıyla bir aritmetik veya geometrik dizinin ardışık üç elemanı ise alanı rasyonel olamaz (Buchholz and MacDougall,1999).

Dörtgenin iki kenarı eş olması durumunda dörtgenimiz ikizkenar Brahmagupta dörtgenine dönüşeceğinden, bu dörtgenin kenarları tam olarak parametrize edilebilirdir. Buna göstermek için; dörtgenin kenarlarını [*a, b, c, d*] = [*a, b, c, c*] olarak alırsak; o zaman alanı;

$$K_4^2\left(a,b,c,c\right)=\left(a+b\right)^2\left(2c-a+b\right)\left(2c+a-b\right)$$

biçiminde verilir. Eğer $k=K_4/(a+b)$ olmak üzere;

$$k^2 = 4c^2 - (a-b)^2 \qquad (3.2)$$

olarak elde edilir. Bu son denklem homojen ikinci dereceden bir denklem üzerindeki bütün rasyonel noktalar olup, eğri üzerindeki rasyonel sabit bir noktadaki teğetin eğiminin kesişimi parametrize edilebilir. Eğer (A, B, C) ; = (a/k, b/k, c/k) alarak denklemi dehomojenize edersek; (A, B, C) ; = (0, 0, 1/2) özel çözümlü $4C^2 - (A - B)^2 = 1$ ikinci derece yüzeyine ulaşırız. Burada

$$(A, B, C) = (0, 0, 1/2) + \lambda(p, q, r)$$

alındığında λ nın afin yüzeyi p, q, r nin bir rasyonel fonksiyonu olur. O zaman p, q, r keyfi tamsayı parametreleri için doğrudan tamsayı paremetrizasyon;

$$\begin{aligned} ga &= 8pr \\ gb &= 8pq \\ gc &= 4p^2 + q^2 - 2qr + r^2 \\ gk &= 4p^2 - q^2 + 2qr - r^2 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

olarak verilir ki burada g, *basitçe* dört sağ kenarın en büyük ortak bölenidir. Bu çözüm ailesi; kullanışlı bir model oluşturduğundan, $n > 5$ için yarıçapsal parçalanamaz n – genlerin üretilmesinde kullanılacaktır.

İkinci bir örnek olarak; x, m, n rasyonelleri için, kenarları

$$[a,b,c,d] = [x-m, x+m, x-n, x+n]$$

biçiminde verilen diğer bir üç parametre ile kısıtlanmış bir aile düşünelim. Bu durumda, yarı çevre $s = 2x$, dolayısıyla alanı da basitçe

$$K_4^2(a,b,c,d) = (x^2 - m^2)(x^2 - n^2)$$

biçiminde bulunur. Genelliği bozmaksızın;

$$\begin{aligned} x^2 - m^2 &= \lambda\alpha^2 \\ x^2 - n^2 &= \lambda\beta^2 \end{aligned}$$

olacak şekilde α, β ve λ rasyonel parametreleri varsa Buradan alan direkt olarak $K_4 = \lambda\alpha\beta$ bulunacağından rasyonel olur. Böylece $x^2 = m^2 + \lambda\alpha^2$ ve $x^2 = n^2 + \lambda\beta^2$ denklemlerinin genel çözümleri, p, q, r, s rasyoneller olmak üzere;

$$\begin{aligned} [m:\alpha:x] &= \left[r^2 - \lambda s^2 : 2rs : r^2 + \lambda s^2\right], \\ [n:\beta:x] &= \left[p^2 - \lambda q^2 : 2pq : p^2 + \lambda q^2\right] \end{aligned}$$

biçiminde verilir. İki eşitliğin sağ taraflarının en büyük ortak böleni bir olduğundan ve sol tarafları da eşit olduğundan hareketle;

$$r^2 + \lambda s^2 = p^2 + \lambda q^2$$

elde edilir. Bu homojen ikinci dereceden denkleme kiriş metodu uygulanırsa çözüm;

$$[r : s : p : q] = [u^2 - \lambda v^2 + \lambda w^2 : 2uv : u^2 + \lambda v^2 - \lambda w^2 : 2uw]$$

olarak bulunur. Böylece, çözüm ailesi

$$\begin{aligned} x &= u^4 + 2\lambda u^2 v^2 + 2\lambda u^2 w^2 + \lambda^2 v^4 - 2\lambda^2 v^2 w^2 + \lambda^2 w^4, \\ m &= u^4 - 6\lambda u^2 v^2 + 2\lambda u^2 w^2 + \lambda^2 v^4 - 2\lambda^2 v^2 w^2 + \lambda^2 w^4, \\ n &= u^4 + 2\lambda u^2 v^2 - 6\lambda u^2 w^2 + \lambda^2 v^4 - 2\lambda^2 v^2 w^2 + \lambda^2 w^4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak elde edilir.

Tablo 3.1. (3.4) Formülüyle Üretilen Brahmagupta Dörtgeni Örnekleri

u	***v***	***w***	λ	***X***	***m***	***n***	***x-m=a***	***X+m=b***	***x-n=c***	***x+n=d***	***s***	K_4
3	1	1	2	153	9	9	144	162	144	162	306	23328
1	3	1	2	297	153	281	144	450	16	578	594	24480
1	2	3	2	153	89	9	64	242	144	162	306	19008
1	1	2	3	112	88	16	24	200	96	128	224	7680
1	2	3	3	304	208	88	96	512	216	392	608	64512
1	3	1	3	637	421	613	216	1058	24	1250	1274	82800
1	2	1	5	276	116	236	160	392	40	512	552	35840
1	2	3	5	756	596	396	160	1352	360	1152	1512	299520
1	4	3	5	1476	836	1116	640	2312	360	2592	2952	1175040
1	2	1	7	512	288	456	224	800	56	968	1024	98560
1	1	3	7	3277	3221	2773	56	6498	504	6050	6554	1053360
1	2	3	7	1408	1184	904	224	2592	504	2312	2816	822528

3.3. Ayrıştırılamayan Dörtgenler

Hiçbir rasyonel köşegeni ve çevrel çemberinin yarıçapı rasyonel olmayan yani birim kare gibi ayrıştırılamayan rasyonel alanlı dörtgenler hakkında ne söyleyebiliriz?

İlk olarak, sonsuz sayıda ayrıştırılamayan Brahmagupta dörtgenlerinin bulunduğunu belirtelim ki basitçe; $0 < u < \sqrt{2v+1}$ olacak şekildeki *u* ve *v* tamsayıları için kenarları 2*u* ve 2*v* olan dikdörtgenleri düşünebiliriz. Bu dörtgeninin çevrel çemberinin *R* yarıçapı, $R = \sqrt{u^2 + v^2}$ olur ki burada $v < R < v + 1$ olduğundan dolayı *R* rasyonel olamaz.

İkincisi; bu dörtgenlerin ayrıştırılamazlığına rağmen, köşegenlerinden biri onları iki rasyonel alanlı üçgene bölsün**.** Gerçekten bu *u* köşegeni ile ayırdığı bölgelerin alanlarını da A ve B ile gösterelim. Teorem 1.2.8 ile verilen Ptolemy teoreminden $u^2 \in \mathbb{Q}$ ve Heron alan formülünden de $A^2, B^2 \in \mathbb{Q}$ bulunur. Böylece;

$$A = \frac{(A+B)^2 + A^2 - B^2}{2(A+B)} \text{ ve } B = \frac{(A+B)^2 + B^2 - A^2}{2(A+B)}$$

eşitlikleri $A, B \in \mathbb{Q}$ olmasını gerektirir.

Son olarak; (3.1) Paramesvara formülü ile Brahmagupta formülünün birleştirilmesiyle; rasyonel alanlı olan veya olmayan herhangi bir rasyonel kenarlı kirişler dörtgeni için, çevrel çemberinin yarıçapının karesinin rasyonel olacağı açıktır. Böylece kare çarpan ihtiva etmeyen m pozitif tamsayısı için dörtgenin çevrel çemberinin yarıçapı;

$$R_4(a,b,c,d) \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$$

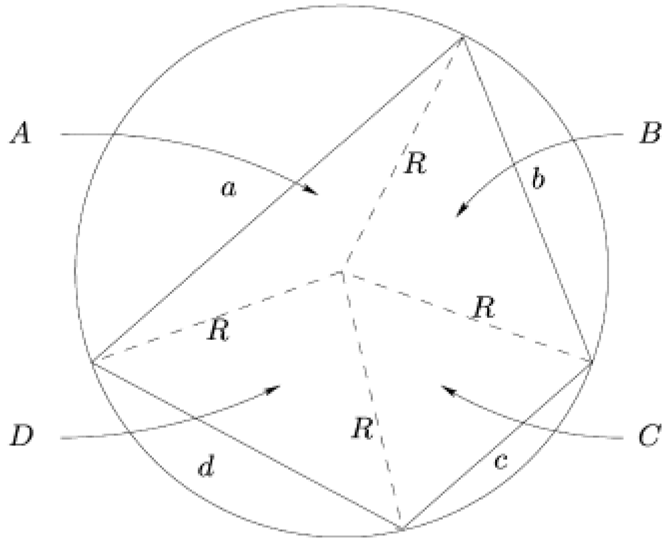
olarak hesaplarız. Dörtgenlerin farklı benzerlik sınıflarına odaklanırsak; $u, v \in \mathbb{Z}$ için $m = u^2 + v^2$ olmak üzere, R_4 sadece

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, ..., \sqrt{m}, ...$$

değerlerinden birisini alabilir(Bak Tablo 3.2.).

Tablo 3.2. Brahmagupta Dörtgenleri

a	***b***	***c***	***d***	***K₃***	***R₃***	***a***	***b***	***c***	***d***	***K₃***	***R₃***
1	1	1	1	1	$1/2\sqrt{2}$	6	6	5	5	30	$1/2\sqrt{61}$
2	2	1	1	2	$1/2\sqrt{5}$	7	5	5	1	16	$5/2\sqrt{2}$
3	3	1	1	3	$1/2\sqrt{10}$	7	7	1	1	7	$5/2\sqrt{2}$
3	3	2	2	6	$1/2\sqrt{13}$	7	7	2	2	14	$1/2\sqrt{53}$
4	4	1	1	4	$1/2\sqrt{17}$	7	7	3	3	21	$1/2\sqrt{58}$
4	4	3	3	12	$5/2$	7	7	4	4	28	$1/2\sqrt{65}$
5	5	1	1	5	$1/2\sqrt{26}$	7	7	5	5	35	$1/2\sqrt{74}$
5	5	2	2	10	$1/2\sqrt{29}$	7	7	6	6	42	$1/2\sqrt{85}$
5	5	3	3	15	$1/2\sqrt{34}$	8	5	5	2	20	$5/8\sqrt{41}$
5	5	4	4	20	$1/2\sqrt{41}$	8	6	3	1	12	$1/8\sqrt{1105}$
6	6	1	1	6	$1/2\sqrt{37}$						



Şekil 3.5. Yarıçapsal Parçalanmış Bir Kirişler Dörtgeni

Sonra, şekil 3.5. ile verilen [*a, R, R*] ikizkenar üçgenine Heron alan formülünü uygularsak;

$$A = \sqrt{s(s-R)(s-R)(s-a)} = (s-R)\sqrt{s(s-a)} = \frac{a}{4}\sqrt{4R^2 - a^2}$$

elde ederiz ki burada $s = R + \frac{a}{2}$ olacaktır. Benzer şekilde Şekil 3.5. deki dörtgenin yarıçapsal parçalanışıyla elde edilen üçgen bölgelerin alanları;

$$A = \frac{a}{4}\sqrt{4R^2 - a^2}, B = \frac{b}{4}\sqrt{4R^2 - b^2}, C = \frac{c}{4}\sqrt{4R^2 - c^2}, D = \frac{d}{4}\sqrt{4R^2 - d^2}$$

biçiminde verilir. Burada $R^2 \in \mathbb{Q}$ olması durumunda A^2, B^2, C^2, D^2 ve $A + B + C + D$ de rasyonel olur. Önemli bir sonuç olarak $A, B, C, D \in \mathbb{Q}$ olması durumunda bütün yarıçapsal üçgen bölgeler rasyonel alanlı hale gelir. Kare çarpan ihtiva etmeyen bir *m* tamsayısı için $R := \sqrt{m}$ almamız genelliği bozmayacağından α ve β rasyonel sayıları için *R*

$$4R^2 - \alpha^2 = \beta^2$$

denklemini sağlaması gerektiğinden *m* de

$$m = \alpha^2 + \beta^2$$

denklemini sağlar. Tamsayıların karakterizasyonu iyi çalışmış bir problemdir ve sonuçta kare çarpan ihtiva etmeyen tamsayıların bir alt kümesi tam olarak;

$$m = \prod_{i=1}^{r} p_i$$

biçiminde verilir ki burada p_i ler $4k+3$ biçiminde olmayan asallardır. İki tamsayı karelerinin toplamı olarak, u^2+v^2 biçiminde ifade edebileceğimiz her bir m için; basitçe $[2u, 2v, 2u, 2v]$ kenarlı bir dikdörtgen düşünüldüğünde daima $\sqrt{m}$ çevrel çember yarıçaplı bir Brahmagupta dörtgeni bulabiliriz.

Verilen bir çevrel çember yarıçaplı bütün Brahmagupta dörtgenlerini belirleyebilir miyiz?

Elbette kare çarpan ihtiva etmeyen ve trivial olmayan bir m için $R=\sqrt{m}$ olması durumu ile gerçekten ilgileniyoruz. Aşağıdaki lemmanın ve bu bilgilerin tam olarak uygun şekilde kullanılması Euler metodunun bir genellemesini bize verir.

Lemma 3.4. *Eğer* $m = u_0^2 + v_0^2$ *ise, bu durumda* $m = u^2+v^2$ *denkleminin genel çözümü* $p \in \mathbb{Q}$ *olmak üzere*

$$(u,\ v) = \left(\pm\frac{u_0 p^2 + 2v_0 p - u_0}{p^2+1}, \pm\frac{v_0 p^2 - 2u_0 p - v_0}{p^2+1} \right)$$

biçiminde verilir.

İspat. Kiriş metodunun kullanılmasıyla $(u,\ v) = (u_0,\ v_0) + \lambda(P,\ Q)$ ifadesinden

$\lambda = \dfrac{-2u_0 P - 2v_0 Q}{P^2+Q^2}$ olarak bulunur. Böylece P ve Q ya bağlı u ile v terimleri

$$(u,v) = \left(\frac{-u_0P^2 - 2v_0PQ + u_0Q^2}{P^2+Q^2}, \frac{v_0P^2 - 2u_0PQ - v_0Q^2}{P^2+Q^2} \right)$$

olarak verilir ki buradaki ifadelerin her ikisinde de pay ve paydalar ikinci dereceden homojen ifadelerdir. Eğer bu ifadede Q = 0 alınması durumunda $(-u_0,\ v_0)$ çözümüne ulaşılacağından $p := P/Q$ almamız genelliği bozmaz ve aradığımız çözüme ulaşırız.

Böylece $\sqrt{m}$ yarıçaplı bütün Brahmagupta dörtgenlerini oluşturmak için p_1, p_2 ve p_3 biçiminde 3 serbest parametre seçersek, bunlara θ_1, θ_2 ve θ_3 biçiminde üç açı karşılık gelir. Lemma 3.4 den hareketle karşılık gelen çözümler;

$$\sin\theta_i = \frac{u_0 p_i^2 + 2v_0 p_i - u_0}{\sqrt{m}\left(p_i^2+1\right)},\ \cos\theta_i = \frac{v_0 p_i^2 - 2u_0 p_i - v_0}{\sqrt{m}\left(p_i^2+1\right)}$$

larak bulunur ki burada u_0 ve v_0 $m = u_0^2 + v_0^2$ ifadesini sağlayan tamsayılardır. Bu üç açıya karşılık gelen bir dörtgenin üç kenarı

$$a = 2\sqrt{m}\sin\theta_1 = \frac{2(u_0 p_1^2 + 2v_0 p_1 - u_0)}{\left(p_1^2+1\right)},$$

$$b = 2\sqrt{m}\sin\theta_2 = \frac{2(u_0 p_2^2 + 2v_0 p_2 - u_0)}{\left(p_2^2+1\right)},$$

$$c = 2\sqrt{m}\sin\theta_3 = \frac{2(u_0 p_3^2 + 2v_0 p_3 - u_0)}{\left(p_3^2+1\right)}$$

olarak bulunur.

Eğer daha önceki gibi, kalan yarım açıyı θ_4 ile gösterir ve $\theta_4 = \pi - \sum_{i=1}^{3}\theta_i$ $\theta_4 = \pi - \sum_{i=1}^{3}\theta_i$ olduğunu göz önüne alır ve Euler tarafından kullanıldığı gibi aynı trigonometrik özdeşliği kullanırsak;

$$\sin\theta_4 = \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 + \sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_3 + \sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$$

bulunur. Kalan kenar $d = 2\sqrt{m}\sin\theta_4$ ve rasyonel olduğundan;

$$\begin{aligned}\frac{d}{2/m} = &\left(\frac{u_0 p_1^2 + 2v_0 p_1 - u_0}{p_1^2+1}\right)\left(\frac{v_0 p_2^2 - 2u_0 p_2 - v_0}{p_2^2+1}\right)\left(\frac{v_0 p_3^2 - 2u_0 p_3 - v_0}{p_2^2+1}\right)\\ &+\left(\frac{u_0 p_2^2 + 2v_0 p_2 - u_0}{p_1^2+1}\right)\left(\frac{v_0 p_1^2 - 2u_0 p_1 - v_0}{p_2^2+1}\right)\left(\frac{v_0 p_3^2 - 2u_0 p_3 - v_0}{p_2^2+1}\right)\\ &+\left(\frac{u_0 p_3^2 + 2v_0 p_3 - u_0}{p_1^2+1}\right)\left(\frac{v_0 p_1^2 - 2u_0 p_1 - v_0}{p_2^2+1}\right)\left(\frac{v_0 p_2^2 - 2u_0 p_2 - v_0}{p_2^2+1}\right)\\ &-\left(\frac{u_0 p_1^2 + 2v_0 p_1 - u_0}{p_1^2+1}\right)\left(\frac{u_0 p_2^2 + 2v_0 p_2 - u_0}{p_2^2+1}\right)\left(\frac{u_0 p_3^2 + 2v_0 p_3 - u_0}{p_2^2+1}\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzerlikten; $\sin\theta_i, \cos\theta_i, \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ olması ikizkenarlı bölgelerin her birinin alanı $A_i = 2\sin\theta_i\cos\theta_i$ biçiminde rasyonel olması gerektiğinden, dörtgenlerin her birinin alanı da rasyonel olması gerekir.

Öte yandan, eğer dörtgenlerin üretilmesindeki sırayı dikkate almazsak, bütün Brahmagupta dörtgenlerinin üretiminde kullanıldığı gibi u_0, v_0 gibi iki ekstra parametre düşünelim. Eğer m için iki farklı temsil mevcutsa, o zaman bu temsiller aynı dörtgenleri üretecektir. Burada $m = u_0^2 + v_0^2 = u_1^2 + v_1^2$ olarak kabul edersek, rasyonel kenarlardan biri iki yolla temsil edebiliriz. Yani;

$$a=\frac{2(u_0p^2+2v_0p-u_0)}{\left(p^2+1\right)}=\frac{2(u_1q^2+2v_1q-u_1)}{\left(q^2+1\right)}$$

olur ki burada p ile q nun rasyonel değerler alması için gerek ve yeter şart;

$$(2u_0-a)p^2+4v_0p-(2u_0+a)=0 \text{ ve } (2u_1-a)q^2+4v_1q-(2u_1+a)=0$$

olmasıdır. Bu ikinci dereceden denklemlerin rasyonel köklerinin olması için bu iki diskriminantın da rasyonel kare olması gerekir. Bununla beraber,

$$\triangle_0 = (4v_0)^2+4(4u_0^2-a^2)=16m-4a^2=(4v_1)^2+4(4u_1^2-a^2)= \triangle_1$$

olduğundan iki diskriminant aynı olur ki böylece p nin rasyonel olması için gerek ve yeter şart q nun rasyonel olmasıdır. Bundan dolayı $\sqrt{m}$ çevrel çember yarıçaplı bütün dörtgenleri üretmek için iki kare toplamı biçiminde m nin bir temsilini bulmaya ihtiyacımız vardır.

4. ROBBİNS BEŞGENLERİ

Bu bölümde kirişler beşgenlerinin özel bir durumu olan Robbins beşgenlerini vereceğiz. Burada Robbins (1994 ve 1995), tarafından verilmiş ve bizim ispatsız olarak vereceğimiz bir teoremle işe başlıyoruz.

Teorem 4.1. (Robbins). *$a_1,...,a_5$ kenarlı ve K_5 alanlı bir kirişler beşgeni düşünelim. Eğer $\sigma_1,...,\sigma_5$ ler kenarların karesi biçiminde simetrik polinomlar, $u=16K_5{}^2$, $t_2=u-4\sigma_2+\sigma_1^2$, $t_3=8\sigma_3+\sigma_1 t_2$, $t_4=-64\sigma_4+t_2{}^2$ ve $t_5=128\sigma_5$ ise o zaman u (alanın karesi olduğundan),*

$$ut_4^3+t_3^2t_4^2-16t_3^3t_5-18ut_3t_4t_5-27u^2t_5^2=0 \qquad (4.1)$$

biçimindeki 7. dereceden olma şartını sağlar.

Öncelikle beşgenin alanı ile ilgili durumu inceleyelim.

Lemma 4.1. *Beş tamsayı kenarlı herhangi bir Robbins beşgeni tamsayı alanlıdır.*

İspat. Aralarında asal *r* ile *s* için $K_5=r/s$ olarak alıp, Teorem 4.1 deki son denklemi ortak payda altında yazarak, paydaları sadeleştirelim. O zaman son elde edilecek ifadede

$$T_3 := s^2t_3 = 8\sigma_3 s^2+\sigma_1\left(16r^2-4s^2\sigma_2+s^2\sigma_1^2\right),$$

$$T_4 := s^4t_4=-64\sigma_4 s^4+\left(16r^2-4s^2\sigma_2+s^2\sigma_1^2\right)^2$$

olarak isimlendirir ve bu ifadeleri yerine yazılar ve düzenlensek,

$$0=16r^2T_4^3+s^2T_3^2T_4^2-16s^8T_3^3t_5-18s^8T_3T_4t_5-2^83^3s^{10}r^4t_5^2 \qquad (4.2)$$

elde edilir. Burada $T_3=s^2K+16\sigma_1 r^2$ ve $T_4=s^2L+16^2r^4$ olacak şekilde *K, L* tamsayıları vardır. Bu ifadeler (4.2) de yerine yazılırsa

$$16r^2((16r^2)^6+s^2L')+s^2K'=0$$

elde edilir ki burada r ile s aralarında asal olduğundan $s^2\,|\,16^7$ veya $s\,|\,2^{14}$ olmasını gerektirir.

Genelliği bozmayacağından $2\nmid obeb\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)$ olarak kabul edebiliriz. Aksi halde $i\in\{1,2,3,4,5\}$ için $2^{2i}\,|\,\sigma i$ ve $i\in\{3,4\}$ için $2^{2i}\big|T_i$ elde ederdik. Fakat bunlardan $2|r$ ve s = 1 elde edilir. Böylece s için iki pozitif durumu düşünebiliriz.

Durum (*i*) Eğer s = 2 ise, r tek olacağından r = 2R + 1 olarak yazabiliriz. Böylece (4.2) denkleminden hemen,

$$\sigma_1^{14} \equiv 0 \pmod 2$$

elde edilir ki bu $\sigma_1 \equiv 0 \pmod 2$ olmasına karşılık gelir. Bu ise beşgenin 2 veya 4 kenarının tek olmasını gerektirir. $\sigma_i (\bmod 4)$ ün değerleri tek kenar sayısının bir fonksiyonu olarak değişeceğinden burada iki durum söz konusu olur.

(*a*) Eğer beşgenin 2 tek kenarı varsa, σ_i nin tanımından;

$$\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\right) = \left(4S_1 + 2, 4S_2 + 1, 2S_3, 2S_4, 2S_5\right)$$

olacak şekilde S_i tam sayılarının varlığı gösterelim. Bunları (4.2) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} T_3 &= 2^6 S_3 + 2^5 \left(2S_1 + 1\right)\left(\left(4R^2 + 4R + 1\right) - \left(4S_2 + 1\right) + \left(4S_1^2 + 4S_1 + 1\right)\right) \\ &= 2^5 \left(2K + 1\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_4 &= -2^{11} S_4 + 2^8 \left(\left(4R^2 + 4R + 1\right) - \left(4S_2 + 1\right) + \left(4S_1^2 + 4S_1 + 1\right)\right) \\ &= 2^8 \left(8L + 1\right) \end{aligned}$$

olarak hesaplarız. Bütün bunları (4.2) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2^{28} \left(2R + 1\right)^2 \left(8L + 1\right)^3 + 2^{28} \left(2K + 1\right)^2 \left(8L + 1\right)^2 \\ & - 2^{35} \left(2K + 1\right)^3 S_5 - 2^{30} 3^2 \left(2K + 1\right)\left(8L + 1\right) S_5 \\ & - 2^{34} 3^3 \left(2R + 1\right)^4 S_5^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son ifade; 2^{28} e bölünür, sonra 4 modülüne göre kısaltılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \left(4R^2 + 4R + 1\right)\left(8L + 1\right)^3 + \left(4K^2 + 4K + 1\right)\left(8L + 1\right)^2 \pmod 4 \\ &\equiv 2 \pmod 4 \end{aligned}$$

biçiminde bir çelişkiye ulaşırız bu (a) nın ispatını tamamlar.

(*b*) Eğer beşgenin 4 tek kenarı varsa, bu durumda

$$\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\right) = \left(4S_1, 2S_2, 4S_3, 4S_4 + 1, 2S_5\right)$$

olacak şekilde S_i tam sayıları vardır. Bunlara göre (4.2) denklemini yeniden yazabilmek için, önce T_3 ve T_4 ü hesaplarsak;

$$\begin{aligned} T_3 &= 2^7 S_3 + 2^6 S_1\left(\left(4R^2+4R+1\right)-2S_2+4S_1^2\right) \\ &= 2^6 K \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_4 &= -2^{10}\left(4S_4+1\right)+2^8\left(\left(4R^2+4R+1\right)-2S_2+4S_1^2\right)^2 \\ &= 2^8\left(4L+1\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan (4.2) ifadesini

$$\begin{aligned} 0 &= 2^{28}\left(2R+1\right)^2\left(4L+1\right)^3+2^{30}K^2\left(4L+1\right)^2 \\ &\quad -2^{38}K^3S_5-2^{31}3^2K\left(4L+1\right)S_5 \\ &\quad -2^{34}3^3\left(2R+1\right)^4 S_5^2 \end{aligned}$$

olarak yazarız. Bu son ifade; 2^{28} e bölünür, sonra da 4 modülüne göre kısaltılırsa yine bir çelişkiye ulaşırız. Yani

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \left(4R^2+4R+1\right)\left(4L+1\right)^3 \pmod{4} \\ &\equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

Olarak bulunur. Böylece durum (b) durumu dolayısıyla (i) durumunun ispatı tamamlanır.

Durum (*ii*): Heron üçgenlerinde olduğu gibi en zor iş $s = 4$ olması gerektiğidir. Bu durumda, $2 \nmid obeb\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)$ olacağını belirtelim. Bu ise ya tek sayıda kenarın tek olmasını veya 2 kenarının tek olmasını, ya da 4 kenarının tek olmasını gerektirir. Şimdi bu durumları ayrı-ayrı inceleyelim.

(***a***) Beşgenin tek sayıda kenarı tek olduğunda, σ_1 nin kuvveti ve r tek olması gerektiğinden, R ve S tamsayıları için

$$r = 2R+1,\ \sigma_1 = 2S+1$$

olarak alalım. Bunları, T_3 ve T_4 için verilen ifadelerde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} T_3 &= 2^7\sigma_3+2^4\left(2S+1\right)\left(4R^2+4R+1-4\sigma_2+4S^2+4S+1\right) \\ &= 2^7\sigma_3+2^5\left(2S+1\right)\left(2\left(R^2+R-\sigma_2+S^2+S\right)+1\right) \\ &= 2^5\left(2K+1\right) \end{aligned}$$

ve

$$T_4 = -2^{14}\sigma_4 + 2^8\left(4R^2 + 4R + 1 - 4\sigma_2 + 4S^2 + 4S + 1\right)^2$$
$$= -2^{14}\sigma_4 + 2^{10}\left(2\left(R^2 + R - \sigma_2 + S^2 + S\right) + 1\right)^2$$
$$= 2^{10}\left(4L + 1\right)$$

ifadelerine ulaşırız. Bunları (4.2) denkleminde yerine yazarsak;

$$0 \equiv 2^{30}\left(4R^2 + 4R + 1\right)\left(4L + 1\right)^3 + 2^{30}\left(4K^2 + 4K + 1\right)\left(4L + 1\right)^2$$
$$- 2^{38}\left(2K + 1\right)^3\sigma_5 - 2^{35}3^2\left(2K + 1\right)\left(4L + 1\right)\sigma_5$$
$$- 2^{45}\left(2R + 1\right)^4\sigma_5^2$$

elde ederiz. Bu son ifade; 2^{30} ile bölünür, sonra da 4 modülüne göre kısaltılırsa, $0 \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\ 4)$ çelişkisine ulaşılır.

(***b***) Eğer beşgenin 2 tek kenarı varsa, o zaman beşgen;

$$\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\right) = \left(4S_1 + 2, 4S_2 + 1, 2S_3, 2S_4, 2S_5\right)$$

olacaktır. Bu durumda, (***i***) durumundaki (***a***) alt durumuna olduğu gibi;

$$T_3 = 2^5\left(2K + 1\right) \text{ ve } T_4 = 2^8\left(8L + 1\right)$$

elde edilir ki bunlar (4.2) ifadesinde yerine konulduğunda,

$$0 \equiv \left(2R + 1\right)^2\left(8L + 1\right)^3\left(\mathrm{mod}\ 4\right) \Rightarrow 0 \equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 4\right)$$

bulunur ki bu da imkansızdır.

(***c***) Eğer beşgenin 4 tek kenarı varsa, o zaman beşgen;

$$\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\right) = \left(4S_1, 2S_2, 4S_3, 4S_4 + 1, 2S_5\right)$$

olarak ifade edilir. Böylece (***i***) durumundaki (***b***) alt durumuna göre;

$$T_3 = 2^6 K \text{ ve } T_4 = 2^8\left(4L + 1\right)$$

ifadelerine ulaşırız ki bunlar (4.2) ifadesinde yerine konulduğunda,

$$0 \equiv \left(2R + 1\right)^2\left(4L + 1\right)^3\left(\mathrm{mod}\ 4\right) \Rightarrow 0 \equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 4\right)$$

bulunur.Bu ise imkansızdır. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur. □

Heron üçgenleri ve Brahmagupta dörtgenlerinde olduğu gibi, bu lemma bizi aşağıdaki teoreme götürür.

Teorem 4.2 *Tamsayı kenarlı bir Robbins beşgeninin çevresi çifttir.*

İspat. Lemma 4.1 den dolayı, alan tamsayı olduğundan; eğer K_5 alanının denklemi sağladığını düşünürsek, o zaman teorem 4.1 ve mod 2 den

$$t_3^2 t_4^2 \equiv 0 \pmod 2$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için t_3 ve t_4 yerine koyar ve t_2 dikkate alındığında

$$\sigma_1^{14} \equiv 0 \pmod 2$$

veya

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \equiv 0 \pmod 2$$

yada

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv 0 \pmod 2$$

elde edilir ki bu da aranandır. □

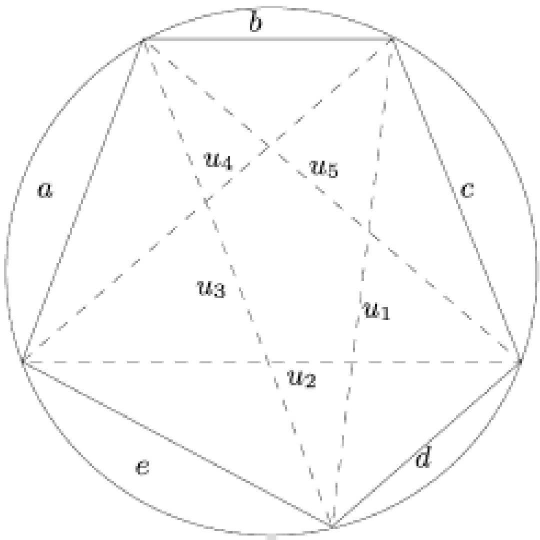
Robbins alan formülü kullanılarak yapılan bir dizi araştırma, bir parçalanamayan Robbins beşgeninin bulunmasına yönelik çalışmalara sebep oldu. Çevresi 400 den daha az çevreli bütün kirişler beşgenleri üzerinde yapılan araştırmalarda istenmeyen sonuçlara ulaşılmadığı ortaya çıktı (Bak Tablo 4.1.). Bu araştırmaların ilk adımında ulaştığımız bu yeni sonuç, bizi parçalanamaz Robbins beşgenlerinin de bulunduğu sonucuna götürür. Bu teorem gerçekte daha sonra gelecek olan Teorem 4.6 nın bir sonucu olduğundan kısaca değinmekte yarar görüyoruz.

Teorem 4.3. *Herhangi bir Robbins beşgeninin ya hiçbir rasyonel köşegeni yoktur veya bütün köşegenleri rasyoneldir.*

İspat. Şekil 4.1. deki beşgeni düşünelim. Beşgenin *a, b, c, d, e* kenarlarının karşısındaki köşeler sırasıyla u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 olsun. Eğer beşgen bir u_4 rasyonel köşegenine sahipse, o zaman beşgen;

$$K_3^2(a,b,u_4) \in \mathbb{Q}, K_4^2(c,d,e,u_4) \in \mathbb{Q}, K_3(a,b,u_4) + K_4(c,d,e,u_4) \in \mathbb{Q}$$

olacak biçiminde bir üçgene ve bir dörtgene ayrılır ki, bu durumda $K_3(a,b,u_4) \in \mathbb{Q}$ ve $K_4(c,d,e,u_4) \in \mathbb{Q}$ elde edilir. Ancak Teorem 2 den dolayı $R_3(a,b,u_4) \in \mathbb{Q}$ olacağından, bu da $R_4(c,d,e,u_4) \in \mathbb{Q}$ olmasını gerektirir. Burada $[c,d,e,u_4]$ dörtgeni yarıçapsal parçalanabilir olduğundan u_1 ve u_2 nin rasyonel olduğu sonucu çıkar. Benzer işlemler diğer dörtgenlere de uygulanırsa, diğer köşegenlerin de rasyonel olduğu ortaya çıkar. Ayrıca buradan, beşgenin bütün alt üçgenlerinin ve alt dörtgenlerinin alanları da rasyonel elde edilir. □



Şekil 4.1. Kirişler Beşgeni

Şimdi artık daha genel olan; köşegensel parçalanış ile yarıçapsal parçalanışın denk olduğunu ispatlayabiliriz.

Teorem 4.4 *Herhangi bir Robbins beşgeninin köşegensel parçalanabilir olması için gerek ve yeter şart yarıçapsal parçalanabilir olmasıdır.*

İspat: $\Rightarrow$: Herhangi üç bitişik kenarı ile uygun seçilen bir köşegenle teorem 3.2 den dolayı beşgenimiz; köşegensel olarak bir dörtgen ile bir üçgene parçalanabildiğinden yarıçapsal olarak parçalanmalıdır. Aynı düşüncenin benzer şekilde bütün alt dörtgenlere de uygulandığında, esas beşgenimizin yarıçapsal parçalanabilir olduğunu görüyoruz.

$\Leftarrow$: Lemma 3.3 nın basit bir uygulamasıyla, Teorem 4.4'den dolayı herhangi bir yarıçapsal parçalanabilir beşgenin beş rasyonel köşegeni bulunduğundan, bu beşgen köşegensel parçalanabilir olur. □

Yukarıdakilerden hareketle; bir Robbins beşgeni, bir rasyonel köşegeni boyunca iki alt rasyonel alanlı bölgeye ayrılırsa bu durumda beşgen parçalanabilir olarak elde edilmiş olur. Aşağıda bu hususlara ilişkin bazı durumlar Tablo 4.1. ile verilmiştir.

Tablo 4.1. Tamsayı Kenarlı Robbins Beşgenleri

Çevre	Kenarlar	Yarıçap	Alan	Köşegenler
68	[7, 7, 15, 15, 24]	25/2	276	[336/25, 20, 24, 117/5, 25]
72	[7, 15, 15, 15, 20]	25/2	342	[20, 24, 24, 25, 117/5]
172	[16, 16, 25, 52, 63]	65/2	1638	[2016/65, 39, 63, 253/5, 65]
176	[16, 25, 33, 39, 63]	65/2	1848	[39, 52, 60, 60, 65]
178	[9, 20, 20, 51, 78]	325/8	1332	[143/5, 504/13, 65, 1161/25, 75]
178	[16, 25, 25, 52, 60]	65/2	1884	[39, 600/13, 63, 56, 836/13]
182	[16, 25, 33, 52, 56]	65/2	2058	[39, 52, 323/5, 60, 312/5]
182	[25, 25, 33, 39, 60]	65/2	2094	[600/13, 52, 60, 63, 65]
184	[16, 25, 39, 52, 52]	65/2	2148	[39, 56, 65, 312/5, 60]
186	[25, 33, 33, 39, 56]	65/2	2268	[52, 3696/65, 60, 323/5, 837/13]
188	[25, 33, 39, 39, 52]	65/2	2358	[52, 60, 312/5, 65, 63]
218	[13, 13, 40, 68, 84]	85/2	2436	[2184/85, 51, 84, 304/5, 85]
220	[9, 20, 51, 65, 75]	325/8	2760	[143/5, 65, 406/5, 70, 78]
220	[20, 20, 51, 51, 78]	325/8	2844	[504/13, 65, 25806/325, 75, 406/5]
224	[9, 20, 65, 65, 65]	325/8	2952	[143/5, 75, 78, 78, 70]
224	[13, 36, 40, 51, 84]	85/2	2856	[805/17, 68, 77, 75, 85]
226	[20, 20, 51, 65, 70]	325/8	3108	[504/13, 65, 406/5, 75, 78]
234	[13, 36, 40, 68, 77]	85/2	3276	[805/17, 68, 84, 75, 408/5]
236	[13, 40, 40, 68, 75]	85/2	3390	[51, 1200/17, 84, 77, 1364/17]
238	[12, 12, 55, 55, 104]	325/6	2424	[7752/325, 65, 1232/13, 371/5, 100]
240	[13, 40, 51, 68, 68]	85/2	3624	[51, 77, 85, 408/5, 75]
240	[36, 36, 40, 51, 77]	85/2	3696	[5544/85, 68, 77, 416/5, 85]
242	[36, 40, 40, 51, 75]	85/2	3810	[68, 1200/17, 77, 84, 1443/17]
246	[36, 40, 51, 51, 68]	85/2	4044	[68, 77, 408/5, 85, 416/5]
256	[22, 39, 48, 62, 85]	1105/24	4056	[289/5, 1305/17, 442/5, 1127/13, 91]
266	[35, 35, 35, 44, 117]	125/2	3150	[336/5, 336/5, 75, 11753/125, 100]
278	[35, 35, 44, 44, 120]	125/2	3624	[336/5, 75, 10296/125, 100, 527/5]
292	[12, 55, 55, 65, 105]	325/6	4998	[65, 1232/13, 100, 100, 1395/13]
292	[45, 45, 50, 50, 102]	425/8	5268	[1386/17, 85, 1500/17, 104, 105]
294	[12, 55, 55, 68, 104]	325/6	5112	[65, 1232/13, 507/5, 100, 2668/25]
306	[45, 50, 50, 76, 85]	425/8	6192	[85, 1500/17, 102, 105, 104]
314	[29, 29, 60, 60, 136]	425/6	4512	[24128/425, 85, 1848/17, 532/5, 125]
318	[55, 65, 65, 65, 68]	325/6	6942	[100, 104, 104, 105, 507/5]
334	[35, 35, 44, 100, 120]	125/2	6312	[336/5, 75, 120, 100, 125]
340	[35, 44, 44, 100, 117]	125/2	6786	[75, 10296/125, 120, 527/5, 3116/25]
346	[35, 44, 75, 75, 117]	125/2	7374	[75, 527/5, 120, 120, 3116/25]
354	[35, 44, 75, 100, 100]	125/2	7962	[75, 527/5, 125, 120, 117]
370	[17, 17, 87, 105, 144]	145/2	6984	[4896/145, 100, 144, 3237/29, 145]
372	[17, 24, 87, 100, 144]	145/2	7230	[203/5, 105, 143, 116, 145]
374	[29, 60, 60, 85, 140]	425/6	8022	[85, 1848/17, 125, 125, 2405/17]
376	[17, 24, 87, 105, 143]	145/2	7476	[203/5, 105, 144, 116, 4200/29]
378	[24, 24, 87, 100, 143]	145/2	7722	[6864/145, 105, 143, 3483/29, 145]
384	[29, 60, 60, 99, 136]	425/6	8712	[85, 1848/17, 663/5, 125, 3531/25]
390	[25, 25, 59, 136, 145]	3625/48	7680	[1430/29, 406/5, 4375/29, 2529/25, 150]
398	[29, 60, 85, 99, 125]	425/6	9930	[85, 125, 140, 136, 136]

Şimdi eğer ek şart olarak; bir beşgen, bir köşegeni ortak kenar olan iki alt rasyonel alanlı iki bölgeye bölünmüş ise bu durumda beşgen parçalanabilir olur, yani Robbins beşgeni parçalanabilirdir.

Teorem 4.5. *Bir Robbins beşgeni, bir köşegeni aracılığıyla iki rasyonel bölgeye ayrılabiliyorsa o zaman bu köşegen en az rasyonel sayıların bir ikinci dereceden genişlemesindedir.*

İspat. Yine Şekil 4.1. ile verilen kirişler beşgenini düşünelim. Eğer [c, d, u_1] üçgen bölgenin alanını K_3 ile, [a, b, e, u_1] dörtgeninin alanını da K_4 ile gösterecek olursak o zaman sırasıyla Heron Formülü ve Brahmagupta alan formülünden;

$$16K_3^2 = -c^4 - d^4 - u_1^4 + 2c^2d^2 + 2c^2u_1^2 + 2d^2u_1^2 \,,$$

$$16K_4^2 = (-u_1 + a + b + e)(u_1 - a + b + e)(u_1 + a - b + e)(u_1 + a + b - e)$$

elde edilir. Bu iki denklemi u_1 köşegenine göre yeniden düzenlersek;

$$u_1^4 + Pu_1^2 + Q = 0 \text{ ve } u_1^4 + Ru_1^2 + Su_1 + T = 0$$

olacak şekilde 4. dereceden iki polinom elde edilir ki burada;

$$P := -2(c^2 + d^2)\,, Q := 16K_3^2 + (c^2 - d^2)^2\,, R := -2(a^2 + b^2 + e^2)^2\,, S := -8abe\,,$$

$$T := 16K_4^2 + (a^4 + b^4 + e^4 - 2a^2b^2 - 2b^2e^2 - 2e^2a^2)$$

olup $P, Q, R, S, T \in \mathbb{Q}$ dir. u_1 in bu iki polinomun farkları arasında bir çözüm olması gerektiği açık olduğundan dolayı

$$u_1^4 + Ru_1^2 + Su_1 + T = 0$$

$$(P - R)u_1^2 - Su_1 + (Q - T) = 0$$

denklem çifti sağlanır. $P - R \neq 0$ olarak kabul edebiliriz. Çünkü aksi durumda ilk denklemden u_1 rasyonel olarak bulunurdu. Üstteki dördüncü dereceden ifadenin alttaki ikinci dereceden ifadeye bölünmesiyle $\alpha u_1 + \beta$ olacak biçimde α ve β;

$$\alpha = S(P(P - R)^2 - 2(P - R)(Q - T) + S^2)$$

$$\beta = T(P - R)^3 - 2(Q - T)(R(P - R)^2 - (Q - T)(P - R) + S^2)$$

olarak bulunur. u_1, $\alpha u_1 + \beta = 0$ denklemini sağlaması gerektiğinden $\alpha \neq 0$ olması durumunda $u_1 \in \mathbb{Q}$ elde edilir. Eğer $\alpha = 0$ ise $\alpha u_1 + \beta = 0$ olması $\beta = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi $(P - R)u_1^2 - Su_1 + (Q - T) = 0$ denkleminde $\alpha = 0 = \beta$ olma şartı kullanıldığında ve Q ile T elimine edildiğinde u_1

$$2(P - R)^2u_1^2 - 2S(P - R)u_1 + (P(P - R)^2 + S^2) = 0$$

ikinci dereceden denklemi sağlar. Burada katsayılar kenarların fonksiyonları olduğundan aranan bulunur. □

Bu durum teoremin hipotezini oldukça zayıflatacağından, geriye sadece $K_3^2, K_4^2 \in \mathbb{Q}$ olması durumu kalır.

Bu noktada kirişler beşgenin köşegeni için bir formüle ihtiyaç duyuyoruz. Köşegenlerin 7. dereceden bir polinomu sağlayacağı Teorem 4.1. den açıktır. Şekil 4.1. deki beşgende, u_1 köşegenini sabit kabul edersek, o zaman bu köşegeni kenar kabul eden üçgen ile dörtgenin çevrel çemberleri aynı olacağından yarıçaplarını eşitleyebiliriz. Buradan

$$R_3(c,d,u_1) = R_4(a,b,e,u_1)$$

veya

$$\frac{cdu_1}{4K_3(c,d,u_1)} = \frac{\sqrt{(au_1+be)(ae+bu_1)(ab+eu_1)}}{4K_4(a,b,e,u_1)}$$

olur ki buradan

$$(au_1+be)(ac+bu_1)(ab+eu_1)K_3^2(c,d,u_1) - (cdu_1)^2 K_4^2(a,b,e,u_1) = 0$$

elde ederiz.

Diğer beş köşegen de kenarların basit değişimi ile bulunabilir veya kenarlarını basitçe bir gösterimle u_i nin karşısındaki kenarı a_i ile göstererek; $[a_0,a_1,a_2,a_3,a_4]$ kenarlarına $[u_0,u_1,u_2,u_3,u_4]$ köşegenlerini karşılık getirerek birleştirebiliriz. O zaman;

$$\left(a_iu_i + a_{i+1}a_{i+4}\right)\left(a_ia_{i+4} + a_{i+1}u_i\right)\left(a_ia_{i+1} + a_{i+4}u_i\right)K_3^2\left(a_{i+2},a_{i+3},u_i\right)$$
$$-\left(a_{i+2}a_{i+3}u_i\right)^2 K_4^2\left(a_i,a_{i+1},a_{i-1},u_i\right) = 0$$

olur ki burada $i = 0, 1, 2, 3, 4$ olup alt ifadeler mod 5 e göre alındı.

Eğer Robbins beşgeninin yukarıdaki duruma kısıtlanmasında, yani rasyonel alanlı kirişler beşgeni olması durumunda aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 4.6. *Bir Robbins beşgeninin bütün köşegenleri onların herhangi birinin rasyonel fonksiyonları ise o zaman herhangi bir köşegeni ile tanımlanan aynı cisim içinde bulunurlar.*

İspat. Şekil 4.1. düşünüldüğünde derecesi 7 den büyük olmayan bir sayı cisminin herhangi bir ζ elemanı için $\mathbb{Q}(u_1) = \mathbb{Q}(\zeta)$ olarak alalım. Bu durumun Heron ve Brahmagupta' ya uygulanmasıyla yine;

$$16K_3^2 = -c^4 - d^4 - u_1^4 + 2c^2d^2 + 2c^2u_1^2 + 2d^2u_1^2\,,$$

$$16K_4^2 = (-u_1+a+b+e)(u_1-a+b+e)(u_1+a-b+e)(u_1+a+b-e)$$

formüllerine ulaşırız ki bu ise $K_3^2, K_4^2 \in \mathbb{Q}(\zeta)$ olmasını gerektirir. Hem de $K_3 + K_4 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ olduğundan hareketle

$$K_3 = \frac{(K_3 + K_4)^2 + K_3^2 - K_4^2}{2(K_3 + K_4)}$$

özdeşliğini uygularsak $K_3, K_4 \in \mathbb{Q}(\zeta)$ olarak buluruz. Üstelik, üçgenlerin çevrel çemberinin yarıçap formülü hatırlanırsa,

$$R_3(c,d,u_1) = \frac{cdu_1}{4K_3(c,d,u_1)}$$

elde ederiz ki buradan ve yukarıdan $R_3(c,d,u_1) \in \mathbb{Q}(\zeta)$ bulunur. Şimdi dikkatimizi diğer bir köşegen olan u_3 e toplayalım. Öte yandan,

$$K_3(a,e,u_3) + K_3(b,u_3,u_1) = K_4(a,b,e,u_1)\,,$$

$$\frac{aeu_3}{4R_3(a,e,u_3)} + \frac{bu_3u_1}{4R_3(b,u_3,u_1)} = K_4(a,b,e,u_1) \tag{4.3}$$

olduğu açıktır. Burada Robbins beşgeninin parçalanışından elde edilen dörtgenlerin ve üçgenlerin çevrel çemberleri aynıdır. Yani;

$$R_3(a,e,u_3) = R_3(b,u_3,u_1) = R_3(c,d,u_1)$$

olup bunu (4.3) te u_3 ü çekersek,

$$u_3 = \frac{4R_3(c,d,u_1)K_4(a,b,e,u_1)}{ae + bu_1}$$

elde edilir. Çevrel çemberin yarıçapları özdeş olarak eşittir. Böylece $u_3 \in \mathbb{Q}(\zeta)$ elde edilir. Benzer şekilde diğer köşegenler için de aynı sonuçlar bulunur. □

5. ROBBİNS ALTIGENLERİ

Bu bölümde de 4. bölümde olduğu gibi kirişler altıgenlerinin özel bir durumu olan Robbins altıgenlerini vereceğiz. Burada Robbins (1994 ve 1995), tarafından verilmiş ve bizim ispatsız olarak vereceğimiz bir teoremle işe başlıyoruz.

Teorem 5.1. *(Robbins). $a_1,...,a_6$ kenarlı ve K_6 alanlı bir kirişler altıgeni düşünelim. Eğer $\sigma_1,...,\sigma_5$ ler kenarların kareleri biçiminde simetrik polinomlar, $\sigma_6^{'} = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, $u = 16K_5^2$, $t_2 = u - 4\sigma_2 + \sigma_1^2$, $t_3 = 8\sigma_3 + \sigma_1 t_2 - 16\sigma_6^{'}$ $t_4 = t_2^2 - 64\sigma_4 + 64\sigma_1\sigma_6^{'}$ ve $t_5 = 128\sigma_5 + 32t_2\sigma_6$ ise o zaman alanın karesi olan u, ya 7. dereceden olan*

$$ut_4^3 + t_3^2t_4^2 - 16t_3^3t_5 - 18ut_3t_4t_5 - 27u^2t_5^2 = 0$$

denklemini sağlar veya $\sigma_6^{'}$ lı aynı şart negatifi ile yer değiştirir.

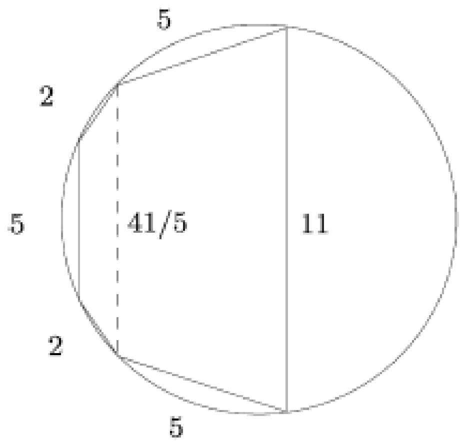
Önceki durumlarda olduğu gibi sadece çevresinin çift olduğu durumu düşünmek yeterlidir.

Lemma 5.1. *Tamsayı kenarlı her bir Robbins altıgeninin alanı tamsayıdır.*

İspat. Lemma 4.1. in ispatına benzer şekilde yapılır. □

Teorem 5.2. *Tamsayı kenarlı her bir Robbins altıgeninin çevresi çifttir.*

İspat. Lemma 5.1. kullanılır ve 2 modülüne göre Robbins formülü düşünülür. □



Şekil 5.1. Köşegensel Ayrıştırılabilir Bir Robbins Altıgeni

Şekil 5.1. ile verilen [2, 5, 2, 5, 11, 5] kenarlı kirişler altıgenini alalım. Simetriden dolayı; bu kirişler altıgeninin, aslında başlangıçta bilinmeyen bir orta köşegen boyunca iki ikizkenar yamuğa bölünebileceğini görmemizi sağlıyor. Bu altıgenin alanı iki dörtgenin alanları toplamına eşit ve 54 olarak bulunmuştur. Bu bilinmeyen (altıgeni dörtgenlere bölen) köşegenin uzunluğunun rasyonel olduğunu, yani gerçekte 41/5 e eşit olduğunu buluruz. Buradan hareketle; bu iki alt dörtgenin (gerçekte altıgenin) çevrel çemberlerinin yarıçapını

$$R_4\left(2,5,2,\tfrac{41}{5}\right)=\frac{5\sqrt{5}}{2}=R_4\left(5,11,5,\tfrac{41}{5}\right)$$

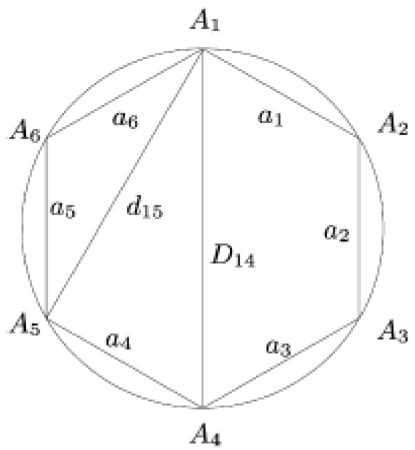
olarak bulabiliriz.

Çevresi 400 den küçük Robbins 6-genleri için yapılan araştırmalar neticesinde toplam 424 farklı örnek ortaya çıktı. Burada 7 yarıçapsal parçalanabilir altıgenden sadece 3 ü, 6 farklı kenara sahipti. (Tablo 5.1).

Tablo 5.1. Robbins Altıgenlerinin Bir Seçimi

Kenarları	**Alanı**	**Çevrel Çemberinin Yarıçapı**
[7, 7, 15, 15, 15, 15]	384	25/2
[16, 16, 25, 25, 33, 63]	1968	65/2
[16, 25, 25, 25, 33, 60]	2214	65/2
[16, 16, 25, 25, 52, 52]	2268	65/2
[16, 25, 25, 33, 33, 56]	2388	65/2
[16, 25, 25, 33, 39, 52]	2478	65/2
[25, 25, 33, 33, 39, 39]	2688	65/2
[10, 19, 26, 40, 47, 52]	2520	$65/8\sqrt{17}$
[7, 14, 22, 25, 55, 73]	2156	$5/2\sqrt{221}$
[7, 14, 22, 25, 62, 70]	2286	$5/2\sqrt{221}$

5.1. Merkezi Köşegenler Üzerinde Parçalanışlar



Şekil 5.2. Köşegensel Parçalanışlar

Şekil 5.2. da olduğu gibi; bir kirişler altıgeninin köşeleri $A_1,\ldots,A_6$ ile kenarları da $a_1,\ldots,a_6$ ile gösterilsin. Eğer bir altıgen, bir köşegeni aracılığıyla iki tane dörtgene ayrılıyorsa bu köşegene *merkez köşegen*, diğer durumda ise köşegene *yardımcı köşegen* denir. Bir altıgenin A_i köşesinden A_j kösesine uzanan merkez köşegeni D_{ij} ile ve yardımcı köşegenleri de d_{ij} ile gösterelim. O zaman aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Lemma 5.2. *Eğer bir Robbins altıgeni bir rasyonel merkezi köşegene sahipse, o zaman çevrel çemberinin yarıçapı ve bütün köşegenleri, p rasyoneli ve kare olmayan m tamsayısı için* $p\sqrt{m}$ *ifadesinden elde edilir.*

İspat. İlk olarak; altıgeninin bir rasyonel merkezi köşegenli ve rasyonel alanlı olmasının ve kenarlarından birisi merkezi köşegen olacak şekilde kenarlar rasyonel alanlı iki dörtgene bölünmesi gerektiğini gözlemleriz.

Genelliği bozmaksızın $D_{14} \in \mathbb{Q}$ kabul edelim. O zaman $A_1A_2A_3A_4$ dörtgeninin çevrel çemberinin yarıçapı,

$$R = \frac{\sqrt{(a_1a_2 + a_3D_{14})(a_1a_3 + a_2D_{14})(a_1D_{14} + a_2a_3)}}{4K_4(a_1, a_2, a_3, D_{14})} \tag{5.1}$$

ve bir köşegeni de

$$d_{13} = \frac{\sqrt{(a_1a_2 + a_3D_{14})(a_1a_3 + a_2D_{14})(a_1D_{14} + a_2a_3)}}{(a_1a_2 + a_3D_{14})} \tag{5.2}$$

olarak bulunur.

Burada R ve d_{13} ün kök içinde kare olmayan kısımları aynı olduğundan dolayı $R = p_1\sqrt{m}$ ve $d_{13} = p_2\sqrt{m}$ olarak yazabiliriz. Benzer şekilde bu dörtgenin diğer köşegeni de $d_{24} = p_3\sqrt{m}$ olarak yazılabilir.

$A_1A_4A_5A_6$ dörtgeni, aynı çevrel çemberin yarıçapına sahip olduğundan bu sonuç diğer iki köşegene uygulanırsa $d_{15} = p_4\sqrt{m}$ ve $d_{46} = p_5\sqrt{m}$ olarak bulunur.

Son olarak; $A_1A_3A_4A_5$ dörtgenini düşünürsek; Ptolemy Teoreminden

$$a_4d_{13} + a_3d_{15} = d_{35}D_{14}$$

elde edileceğinden, bir p_6 rasyoneli için d_{35} köşegeni;

$$\begin{aligned} d_{35} &= \frac{a_4p_2\sqrt{m} + a_3p_4\sqrt{m}}{D_{14}} \\ &= p_6\sqrt{m} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer olarak $d_{26} = p_7\sqrt{m}$ bulunur.

Teorem 5.3. *Bir Robbins altıgenin bir merkezi köşegeni rasyonelse bütün merkezi köşegenleri de rasyoneldir.*

İspat. $D_{14} \in \mathbb{Q}$ kabul eder ve $A_1A_2A_4A_5$ dörtgenine Ptolemy teoremini uygularsak;

$$D_{14}D_{25} = a_1a_4 + d_{24}d_{15}$$

olarak buluruz.

Biraz cebir ve Lemma 5.2 nin ispatından

$$D_{25} = \frac{a_1a_4 + p_3\sqrt{m}p_4\sqrt{m}}{D_{14}} = \frac{a_1a_4 + p_3p_4m}{D_{14}}$$

elde ederiz ki D_{25} rasyoneldir. Benzer düşünceyle; $A_1A_6A_3A_4$ dörtgeninden $D_{36} \in \mathbb{Q}$ bulunur. □

5.2. Köşegen Formülü

Bir beşgenin köşegenlerinin bulunmasına benzer yaklaşımlarla; altıgenin merkezi bir köşegeni için kenarların fonksiyonu olarak bir formül verebiliriz. Bir sabit merkezi köşegen kenarlı iki dörtgene bölünen bir altıgenin çevrel çemberinin (5.1) yarıçapı denkleminden dolayı, köşegenin yedinci dereceden bir polinomunu buluruz.

Örneğin; Şekil 5.2. daki D_{14} merkezi köşegenine dikkatimizi yoğunlaştırırsak;

$$\begin{aligned} 0 = {} & 4[K_4(a_4,a_5,a_6,D_{14})]^2(a_1a_2 + a_3D_{14})(a_1a_3 + a_2D_{14})(a_2a_3 + a_1D_{14}) \\ & - 4[K_4(a_1,a_2,a_3,D_{14})]^2(a_4a_5 + a_6D_{14})(a_4a_6 + a_5D_{14})(a_5a_6 + a_4D_{14}) \end{aligned}$$

polinomuna ulaşırız.

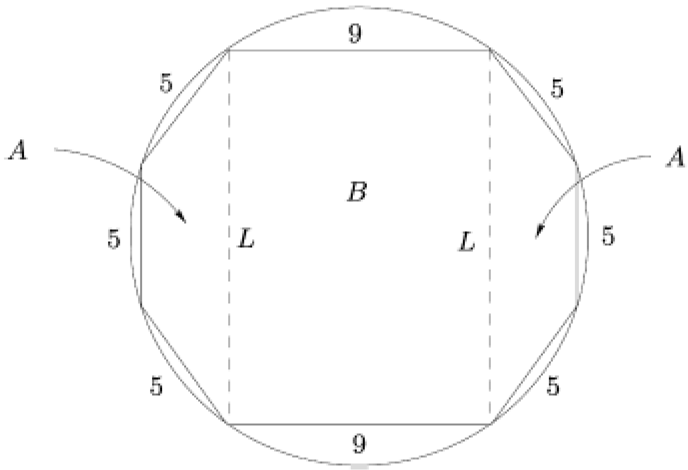
6. GENEL KİRİŞLER *n* – GENLERİ

Bu kesimde genellikle çeşitli dereceden farklı üretim metotlarının sayısı araştırıldı. Tüm bunların sonunda (İlk genel araştırma planı hariç), genelleştirilmiş Euler Metodunu kapsayan bir sınıflandırma verildi.

Çeşitli rasyonel alanlı kirişler n – genlerin araştırılması sırasında, örneğimizde de olduğu gibi, kenar sayısı çift olan çokgenlerin çalışılmasının nispeten daha kolay olduğu görüldü. Bunun sonucunda; rasyonel çevrel çember yarıçaplı örnekler (Eulerin jenerasyon metodundan) ve (İkinci dereceden) irrasyonel çevrel çember yarıçaplı örneklerin (yazarın genellediği Euler metodundan) her ikisi biçimindeki muhtemel n – genler için konjektürler verildi. Kenar sayısı tek olan çokgenler için de rasyonel çevrel çember yarıçaplı örneklerin varlığı gösterilebilir.

Bunların sonucunda, çevresi 133 ü geçecek şekildeki bütün çevrelerin araştırılmasında rasyonel alanlı hiçbir 7 – gene rastlanmadı. Bununla birlikte daha küçük çevreli ve rasyonel alanlı altıgenler, sekizgenler, ongenler ve onikigenler bulundu.

Örnek 6.1.



Şekil 6.1. Tamsayı Alanlı Bir Kirişler Sekizgeni

Şekil 6.1. ile verilen sekizgen düşünülürse, alanının basit bir hesaplama ile 171 olduğu bulunabilirdi. Simetriyi kullanarak ta, herhangi bir değişiklik yapmadan kenarlara bağlı olarak alanı hesaplayabiliriz. Şekil 6.1. de görüldüğü gibi, sekizgeni iki yamuk ve bir dikdörtgene ayırabiliriz. Açık olarak sekizgenin alanı

$$K_8 = 2A + B$$

olarak verilir ki burada Brahmagupta'nın formülünden

$$A = \frac{(5+L)}{4}\sqrt{(5+L)(15-L)} \quad \text{ve} \quad B = 9L$$

elde edilir. Yukarıdaki kareköklü ifadenin karesi alınır ve A, B ve K_8 in hesaplanması yapılırsa,

$$4(171-9L)^2 - (5+L)^3(15-L) = 0$$

olarak bulunur. L ye bağlı bu polinom, $L = 13$ biçiminde tam olarak bir rasyonel köke sahiptir. Bu değeri yamuğun ve dikdörtgenin çevrel çemberinin yarıçapları olan R_A ve R_B yi hesaplamak için kullanalım. Yamuğun alanını basitçe

$$A = \frac{18\sqrt{18.2}}{4} = 27$$

olarak buluruz. Bunları Paramesvara ve Pythagorean da kullanırsak,

$$R_A = \frac{\sqrt{(5^2+5.13)(5^2+5.13)(5^2+5.13)}}{4.27} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

ve

$$R_B = \frac{\sqrt{9^2+13^2}}{2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

olarak buluruz.

İki çevrel çember aynı yarıçaplı olduğundan [5, 5, 5, 9, 5, 5, 5, 9] kenarlı sekizgeni rasyonel alanlı bir kirişler çokgenidir.

6.1. Kirişler Çokgeni(Altıgen, Sekizgen, Ongen Ve Onikigen) Örnekleri

Önceden bulduğumuz basit bir teknik, karenin dört kenarı üzerinde bir ikizkenar dörtgen yerleştirerek sınırlı sayıda rasyonel alanlı kirişler n – genleri inşaa etmemize izin veriyor. Bu yolla; Şekil 6.2. de olduğu gibi, köşegensel parçalanabilir altıgen, sekizgen, ongen ve onikigen elde edebiliriz. Buradaki temel düşünce; içteki kare ile karenin kenarlarına yerleştirilen ikizkenar dörtgenin çevrel çemberlerinin yarıçaplarının eşitlenmesidir.

Dörtgenin çevrel çemberinin yarıçapı

$$R = \frac{a\sqrt{a^2+bc}}{\sqrt{(2a-(b-c))(2a+(b-c))}}$$

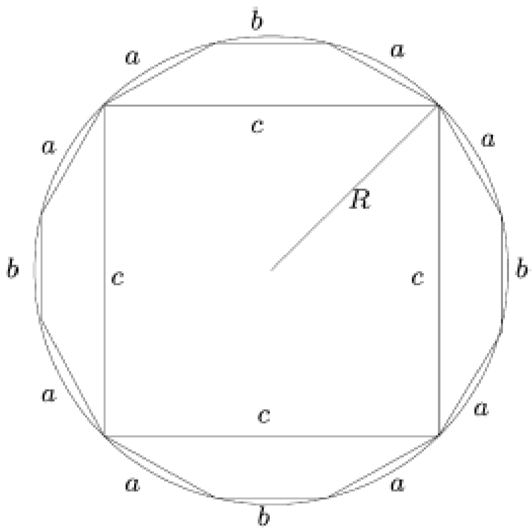
olup, karenin ki ise

$$R = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

dir. Bu iki ifadeye eşitler ve düzenlersek;

$$c^2b^2 + 2c\left(a^2 - c^2\right)b + \left(2a^4 - 4a^2c^2 + c^4\right) = 0$$

b ye bağlı ikinci dereceden bir denklem verir. Böylece diskriminant $4a^2c^2(2c^2 - a^2)$ olarak bulunur. Burada, b nin rasyonel olmasının tek yolu diskriminantın bir rasyonel kare olmasıdır. Bu da $2c^2 - a^2 = D^2$ olmasına bağlıdır.



Şekil 6.2. Bir Kare yardımıyla Oluşturulabilen Rasyonel Alanlı 6, 8, 10 ve 12 genleri

Yani $a^2 + D^2 = 2c^2$ olur ki bu denklemin genel çözümü;

$$a = t\left(-r^2 - 2rs + s^2\right), D = t\left(r^2 - 2rs - s^2\right), c = t\left(r^2 + s^2\right)$$

biçiminde verilir. Bu genel paremetrizasyon, *r, s, t* serbest parametrelerine bağlı olarak b nin bir rasyonel ifade olmasını, yani

$$b = \frac{\left(c^2 - a^2\right) \pm a\sqrt{2c^2 - a^2}}{c} = t\frac{r^4 + 4r^3s - 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4}{\left(r^2 + s^2\right)}$$

olmasını garanti eder. Buradan hareketle böyle *n* – genlerin tam bir rasyonel parametrizasyonunu

$$a = t\left(-r^2 - 2rs + s^2\right)\left(r^2 + s^2\right)$$
$$b = t\left(r^4 + 4r^3 s - 6r^2 s^2 - 4rs^3 + s^4\right)$$
$$c = t\left(r^2 + s^2\right)^2$$

biçiminde verilir. Trivial olmayan ilk örnek için r ve s nin değerlerini verdiğimizde $r = 1$, $s = 2$ için elde edeceğimiz çokgen örnekleri tablo 6.1.de verilmiştir.

Tablo 6.1. Özel Oluşturulmuş 6, 8, 10, 12 – genleri

n	Çevresi	Kenarları	Alanı
6	102	[5, 5, 17, 25, 25, 25]	688
8	104	[5, 5, 5, 5, 17, 17, 25, 25]	751
10	106	[5, 5, 5, 5, 5, 5, 17, 17, 17, 25]	814
12	108	[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 17, 17, 17, 17]	877

Rasyonel alanlı kirişler 8-genleri için daha genel bir araştırma tablo 6.2. de verilmiştir.

Tablo 6.2. Rasyonel Alanlı Kirişler Sekizgenleri

Çevresi	Kenarları	Alanı
34	[2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5]	86
48	[5, 5, 5, 5, 5, 5, 9, 9]	171
54	[1, 1, 6, 6, 10, 10, 10, 10]	210
62	[5, 5, 5, 5, 8, 8, 13, 13]	280
68	[4, 4, 10, 10, 10, 10, 10, 10]	344
76	[5, 5, 5, 5, 11, 11, 17, 17]	413
78	[1, 1, 1, 15, 15, 15, 15, 15]	426
82	[5, 5, 5, 5, 5, 19, 19, 19]	464
82	[7, 7, 10, 10, 10, 10, 14, 14]	502
88	[3, 3, 11, 11, 15, 15, 15, 15]	567
90	[9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 23]	588
90	[5, 5, 5, 5, 14, 14, 21, 21]	570

6.2. İkizkenar Dörtgen Oluşturulması

Kenar sayısı çift olan bir n-gen oluşturmaya çalıştığımızda, Eulerian olmayan örnekler veren ekstra bir yapıya ulaşırız. Temel olarak bu durumda, aynı çevrel çember yarıçapına sahip ayrıştırılamayan Brahmagupta dörtgenlerini, basit olarak yapıştırma metodudur. Bu kesim 6.1. de verilen metodun basit bir genellemesidir.

Şimdi bir başlangıç adımı olarak aşağıdaki problemi düşünelim.

- Ortak çevrel çember yarıçapına ve bir ortak kenara sahip olan iki ikizkenar dörtgen bulunur.

Bu önemli inşa metodunun sonucunu çizerek de bulabiliriz.

- İlk olarak, (3.3) ü kullanarak bir özel ikizkenar Brahmagupta dörtgeni sabitlenir ve onun çevrel çemberinin yarıçapı hesaplanır.
- Sonra, tekrar etmeyen kenarlardan birini ortak kenar olarak kullan ve diskriminantı bir tam kare kabul ederek, çevrel çemberinin yarıçapını Paramesvaranın formülünü kullanarak hesaplanır.

Özel bir örnek üstünde yukarıda verilenleri uygulayalım.

Örnek 6.2. $[a_1, b_1, c_1, c_1] = [9, 1, 5, 5]$ biçiminde bir ikizkenar dörtgen alalım. O zaman, bu dörtgenin alanı ve çevrel çemberinin yarıçapı

$$K_4 = 15 \quad ve \;\; R_4 = \frac{5\sqrt{34}}{6}$$

olarak bulunur. Sonra; kenarları $[a_2, b_2, c_2, c_2]$, çevrel çemberinin yarıçapı $5\sqrt{34}/6$ ve $b_2 = b_1 = 1$ olan bir ikizkenar Brahmagupta dörtgeni bulmayı umuyoruz. Böylece a_2 ve c_2 için;

$$\frac{5\sqrt{34}}{6} = \frac{c_2\sqrt{c_2^2 + a_2}}{\sqrt{(2c_2 - a_2 + 1)(2c_2 + a_2 - 1)}}$$

ifadesini hesaplamak istiyoruz. Bu ifadenin karesi alınır ve a_2 ye bağlı bir polinom olarak yazılırsa,

$$5^2.17a_2^2 + \left(18c_2^2 - 2.5^2.17\right)a_2 + \left(18c_2^4 - 2^2.5^2.17c_2^2 + 5^2.17\right) = 0$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadenin bir rasyonel a_2 çözümünün bulunması için gerek ve yeter şart diskriminantının bir rasyonelin karesine eşit olmasıdır. Diskriminant

$$D := 2^2.29^2 c_2^2\left(-3^2 c_2^2 + 2.5^2.17\right)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$E^2 = -3^2 c_2^2 + 2.5^2.17$$

olacak şekilde rasyonel bir E bulunur. Burada $c_2 = 5x/3z$ ve $E = 5y/z$ olarak kabul edilirse;

$$x^2 + y^2 = 34z^2$$

primitif formuna ulaşılır ki bu ifade [x, y, z] = [3, 5, 1] özel çözümüne sahiptir (başlangıçtaki dörtgenden bulundu). Böylece genel çözüm lemma 3.4. ün ispatından hareketle

$$\frac{x}{z}=\frac{3P^2+10PQ-3Q^2}{P^2+Q^2}, \quad \frac{y}{z}=\frac{5P^2-6PQ-5Q^2}{P^2+Q^2}$$

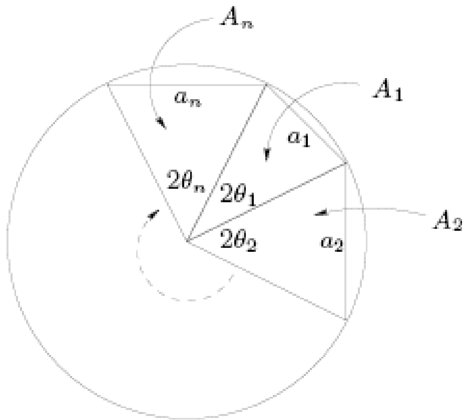
olarak bulunur. $0 < c_2 < 1$ olmasını istediğimizden $0 < P/Q < 1/3$ buluruz. Örneğin; $(P, Q) = (1, 4)$ olarak seçersek, alanı $K_4 = 317680/24137569$ olan

$$[a_2, b_2, c_2, c_2] = [103/17^3,\ 1,\ 25/51,\ 25/51]$$

dörtgen çözümünü buluruz.

6.3. Bir Genel Euler Parametrizasyonu

1781'de Euler bütün yarıçapsal ayrıştırılabilir kirişler n – genlerini üretmek için basit ve halen geçerli bir metot kullandı (Dickson 1971). Çevrel çemberinin yarıçapı rasyonel olduğu müddetçe birim çember üzerinde bu şekilde bütün n-genleri üretmek ve onları keyfi seçilen bir rasyonel parametre ile artırmak yeterlidir.



Şekil 6.3. Rasyonel Olarak Ayrıştırılabilir Bir kirişler n – geni

Şimdi Şekil 6.3 ü göz önüne alalım. Euler; $p_1, \ldots, p_{n-1}$ biçiminde $n-1$ tane rasyonel parametre seçerek, onları n – 1 tane açıyı belirlemekte kullanmış ve bu açıları $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ biçiminde isimlendirmiştir. Bu açılar

$$\sin(\theta_i)=\frac{2p_i}{p_i^2+1} \quad ve \quad \cos(\theta_i)=\frac{p_i^2-1}{p_i^2+1}$$

denklemlerini sağlar. Ayrıca bu açılar

$$\theta_i \le \frac{\pi}{2} \ ve \ \sum_{i=1}^{n-1}\theta_i < \pi$$

özelliklerine de sahiptir. Buradan hareketle son iki özelliği sağlayan bir θ_n açısı;

$$\theta_n = \pi - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i$$

biçiminde tanımlanır. θ_{i} açıları aslında; bir çokgenin kenarlarının köşelerinden çevrel çemberinin merkezine çizilen yarıçapların oluşturduğu açıların yarısıdır (Şekil 6.3. de de görüldüğü gibi). Sonra ise; $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$, $\cos B$ rasyonel tanımlı olduğu sürece $\sin(A \pm B)$ ve $\cos(A \pm B)$ lerin rasyonel olacağından hareketle her i = 1,…, n için $\sin 2\theta_i$ ve $\cos 2\theta_i$ nin rasyonel olduğuna ulaşılır. Böylece Şekil 6.3 biçiminde verilen bir kirişler n – genin A_i alt alanlarının ve kenar uzunluklarının;

$$a_i = \sqrt{2 - 2\cos(2\theta_i)} = 2\sin(\theta_i)$$
$$A_i = \frac{1}{2}\sin(2\theta_i)$$

biçiminde ve rasyonel olduğu sonucuna varılır. Buradan hareketle; n – gen rasyonel alana ve rasyonel kenarlara sahip olduğu görülür.

6.4. Genel Varsayımlar

Şekil 6.3. e geri dönersek kenarları a_i ve toplam alan olan A nın da rasyonel olduğunu kabul edelim. Böylece; her i ye karşılık $A_i \in \mathbb{Q}$ olması için gerek ve yeter şart $R \in \sqrt{m}\mathbb{Q}$ dur.

Konjektür 6.1. Kenar sayısı tek olan ve rasyonel alana sahip bütün kirişler n – genleri yarıçapsal ayrıştırılabilirdir.

Konjektür 6.2. Çift sayıda kenara ve rasyonel alana sahip bütün kirişler n-genleri yarıçapsal veya köşegensel ayrıştırılabilirdir.

7. KAYNAKLAR

[1] Ayoub, B. A., 2006, Area, Diagonals and Circumcircle of A Cyclic Quadrilateral, Mathematics and Computer Education; 40, 1; 58 – 63.

[2] Ayres, F., 1954, Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry, Schaum Publishing Co, New York.

[3] Bartel L., 1975, Science Awakening, 4th edition, Noordhoff International Publishing, Leyton, The Netherlands.

[4] Bretschneider C. A., 1842, Untersuchung der Trigonometrischen Relationen des Geradlinigen Viereckes, Archiv der Math. 2, 225 – 261.

[5] Buchholz R.H., MacDougall J.A., 1999, Heron Quadrilaterals With Sides In Arithmetic Or Geometric Progression, Bulletin of the Aust. Math. Soc., 59, 263 – 269.

[6] Buchholz R.H., MacDougall J.A., 2001, Cyclic Poligons With Rational Sides and Area Perfect Pyramids, Bull. Aust. Math. Soc., 45, 1 – 34.

[7] Buchholz R.H., MacDougall J.A., 2007, Cyclic Polygons with Rational Sides and Area, http://www.geocities.com/teufel_pi/papers/cyclic_poly.pdf

[8] Buchholz R.H., MacDougall J.A., 2008 Cyclic polygons with rational sides and area Journal of Number Theory 128, 17 – 48

[9] Carmichael R.D., 1952, The Theory of Numbers and Diophantine Analysis, Dover.

[10] Cohn H., 1980, Advanced Number Theory, New York, Dover,.

[11] Coxeter H. S. M. and Greitzer S. L., 1967, Geometry Revisited, The Mathematical Association of America,.

[12] Cremona J. E. and Rusin D., 2003, Efficient Solution of Rational Conics, Math. Comput., 72, 1417-1441.

[13] Dickson, L.E., 1971, History of The Theory of Numbers, Diophantine Analysis, Volume 2, Chelsea Publishing Company New York.

[14] Durell C. V. and Robson A., 1953, Advanced Trigonometry, G. Bell and Sons, London.

[15] Gupta R.C., 1989, Paramesvara's Rule For The Circumradius Of A Cyclic Quadrilateral, Historia Mathematica 4, 67 – 74,.

[16] Guy, R. K., 1994, Unsolved Problems in Number Theory, Springer – Verlag, New York.

[17] Kramer, A. V., Luca, F., 2001, Some Remarks on Heron Triangles, Acad.Paed.Agriensis, Sectio Mathematicae 27, 25 – 38.

[18] Parshin A. N. and Shafarevich I. R., 1990, Number Theory I, Encyclopdia of Mathematical Sciences, vol. 49, Springer.

[19] Rich, B. , 1963, Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane Geometry With Coordinate Geometry, Schaum Publishing Co, New York.

[20] Robbins D.P., 1994, Areas Of Polygons Inscribed in A Circle, Discrete and Computational Geometry, 12, 223-236.

[21] Robbins D. P., 1995, Areas Of Polygons Inscribed in A Circle, American Mathematical Monthly, June-July.

[22] Sastry, K. R. S., 2001 – 1, Heron Triangles: A Gergonne – Cevian and Median Perspective, Forum Geometricorum,1, 17 – 24.

[23] Sastry, K. R. S., 2001 – 2, Heron Angles, Mathematics and Computer Education 35(1); 51 – 60.

[24] Sastry, K. R. S., 2001 – 3, Polygonal Area in the Manner of Brahmagupta, Mathematics and Computer Education, 35(2), 147 – 151.

[25] Sastry, K.R. S., 2002, Brahmagupta Quadrilaterals, Forum Geometricorum, 2, 167 – 173.

[26] Sastry, K. R. S., 2005 – 1, Construction of Brahmagupta n – gons, Forum Geometricorum, 5; 119 – 126.

[27] Sastry, K. R. S., 2005 – 2, A Description of a Family of Heron Quadrilaterals, Mathematics and Computer Education; 39(1); 72 – 77.

[28] Schubert H., 1905, Die Ganzzahligkeit in der Algebraischen Geometrie, 48 Versammlung Deutscher Philologen und Schulm¨anner zu Hamburg, Spamersche Buchdruckerei, Leipzig,. (English translation athttp://www.geocities.com/teufel pi/papers/gidag.pdf)

[29] Sierpinski, W., 1962, Pythagorean Triangles, Graduate School of Science, Yeshiva University.

[30] Şahin, R. Ve Ark., 1997, Sürat Geometri 2, Sürat Yayınları, İstanbul.

[31] Şenay, H., 1989, Sayılar Teorisine Giriş, Selçuk Ün. Fen – Edebiyat Fak., Konya.

[32] Yılmaz, L.,2007, Brahmagupta Dörtgenleri İle Brahmagupta N – Genlerinin Oluşturulması Üzerine Bir Araştırma, Yüksek Lisans Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.