167548

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİYLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

YILDIRAY KESKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10/ 01/ 2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ

(Danışman)

Prof. Dr. Şefik BİLİR

(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİYLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

Yıldıray KESKİN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ

2005, 68 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Şefik BİLİR

Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Bu çalışmada, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmış bunun için diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem kullanılarak lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir.

Anahtar Kelimeler: Lineer Diferansiyel Denklemler, Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler, Adi Diferansiyel Denklemler, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.

ABSTRACT

MS Thesis

SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD

Yıldıray KESKİN
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisior: Asst. Prof. Dr. Galip OTURANÇ

2005, 68 Page
Jury: Prof. Dr. Şefik BİLİR
Asst. Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Asst. Prof. Dr. Hasan KÖSE

In this study, the differential transformation method is used for solving linear or nonlinear differential equations. By this method, linear or linear differential equations can be transformed into simple algebraic equations. Then these equations can be easily dealt with and solved systematically.

Key Words: Linear Differential Equations, Nonlinear Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Differential Transform Method,

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemler, özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler, teorik ve pratik bakımdan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilim dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulmaktadır. mühendislikte, fiziki bilimlerde ve daha birçok bilim dalında karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmada, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmış bunun için diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem kullanılarak lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir.

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ’ a, Arş. Gör. Dr. Aydın KURNAZ’ a ve Arş. Gör. Ozan ÖZKAN’ a teşekkürlerimi sunarım.

Yıldıray KESKİN

Konya, 2005

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi yardımıyla karşılaşılan karmaşık ve yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler (ısı iletim denklemi, dalga denklemi, poisson denklemi gibi) ve diğer mühendislik problemlerinin çözümünü elde etmek mümkündür. Kullanılan yöntem, kullanım açısından elverişli ve çabuk sonuca götüren bir yöntemdir. Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi yöntemlerle karşılaştırıldığında, dönüşüm yöntemi daha pratik ve daha zaman kazandırıcı ve bilgisayar programlamasına uygundur.

Bu yöntem kullanılarak kısmi türevli diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Ayrıca diferansiyel dönüşüm metodu diğer integral dönüşüm yöntemleriyle (Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi) karşılaştırıldığında daha kolay çözüme ulaştırır. Çünkü integral yöntemleri kullanıldığında karmaşık ifadelerin integrallerinin alınması zor olabilir ve ters dönüşümlerinin alınmasında problemler ortaya çıkabilir. Bu iki yöntemde de lineer olmayan problemlerin çözülememesi ise ayrı bir sorundur. Diferansiyel dönüşüm metodunun ise lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünün yanı sıra, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde de çalıştığını görebilir.

1.2. Literatür Özeti

Kurnaz, A., Oturanç, G., Kiriş, M. E.; *n* dimensional differantial transformation method for solving PDEs, İnternational journal of Computer Mathematics, 2005 (Baskıda). Bu çalışmada PDEs çözümleri için n boyutlu diferansiyel metodun genelleştirilmesi verilmiştir. Bu metodun diğerlerinden ayrı olarak özelliği özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmekte etkili olmasıdır. Sunulan metodu örneklerle açıklamak için bulunan sonuçlar birkaç başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulanmıştır.

Kurnaz, A., Oturanç, G.; The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation, International Journal of Computer Mathematics, 2005 (Baskıda). Bu çalışmada adi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri için diferansiyel dönüşüm metodunun bir genellemesi verilmiştir.

Ayaz, F., Oturanç, G.; An Approximate Solution of burgers equation by Differential Transform Method, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 5-2, 15-24, 2004. Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm metodu ile özel bir denklem olan Burgers denklemi çözümü araştırıldı. Başlangıç şartında verilerin değişmesiyle diferansiyel dönüşüm ile bulunan çözümler karşılaştırıldı.

Chen, C. K, Ho, S. H.; Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation, 106, 171-179, 1999. Bu Çalışmada PDEs Çözümleri için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm kullanıldı. Öncelikle iki boyutlu diferansiyel dönüşüm teorisine giriş yapıldı. İkinci olarak, bir PDE probleminin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü alınarak, fark denklemlerinin bir kümesi elde edildi. Bu denklemler üzerinde bazı basit matematiksel işlemler yapılarak, çözüm serisinin kapalı formu veya bir yaklaşık çözüm elde edilebilir. Son olarak değişken katsayılı ve sabit katsayılı PDE problemleri sunulan metot ile çözüldü. Hesaplanan bu sonuçlar diğer analitik veya yaklaşık metotlar ile karşılaştırıldı.

Ayaz, F.; On the two-dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation, 143, 361-374, 2003. Bu çalışmada Kismi türevli diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerini iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu çözümü araştırıldı. Yeni teoremler eklendi ve bazı lineer ve lineer olmayan PDEs bu metot kullanılarak çözüldü. Bu metot lineer ve lineer olmayan problemler için kolayca uygulanabilir. Bu çalışmada, ek olarak iki difüzyon probleminin analitik çözümleri elde edildi ve bu çözümlerin ayrıştırma metodu ile elde edilen çözümleri karşılaştırıldı.

Ayaz, F.; Aplication of differential transform method to differential-algabraic equations, Applied Mathematics and Computation, 152, 649-657, 2004. Bu çalışmada DAEs lineer diferansiyel-cebirsel denklemlerin nümerik çözümü, diferansiyel dönüşüm metodu ile ele alındı. İki farklı problem bu teknik kullanılarak çözüldü ve çözümler kesin çözümlerle karşılaştırıldı. Diferansiyel dönüşüm metodu DAEs'ler için kolayca uygulanabilir ve çözüm serileri elde edilir. Bu dönüşümlerden sonra burada ele alınan problemler için basitçe katsayı serileri formülüze edildi.

Ayaz, F.; Solutions of the system of differential equations by differential transform method , Applied Mathematics and Computation, 147, 547-567, 2004. Bu çalışmada Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm metoduna giriş yapılmış ve birinci adım için temel teoremler tanımlanmıştır. Ayrıca iki ve üç boyutlu diferansiyel dönüşümlerin bir uygulaması olarak lineer ve lineer olmayan PDE sistemlerinin kesin çözümleri incelenmiştir. Sunulan metodun sonuçları ayrıştırma metodu ile karşılaştırılmıştır. Diferansiyel dönüşüm metodu lineer ve lineer olmayan problemlere kolayca uygulanabilir. Bu metot nümerik ve analitik çözümler için kullanışlı bir araç olduğu anlatılmış.

Abdel-Halim Hassan, I. H.; Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems, Applied Mathematics and Computation, 154, 299-311, 2004. Bu çalışmada Yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerinin diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümü ile uygulamaya yer verilmiş. Bulunan çözümler analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

Chen, C. K., Ho, S. H.; Application of differential transformation to eigenvalue problems. Applied Mathematics and Computation, 79, 173-188, 1996. Bu çalışmada diferansiyel dönüşümün tanımı verilmiş ve bu yöntem Strum-Lioville probleme uygulandı.Bu yöntem sayesinde bazı basit matematiksel işlemlerle i inci özdeğer ve öz vektör kolayca hesaplandı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı sınır şartları, başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümleri oluşturan fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit bir matematiksel ifadeye *diferansiyel denklem* denir.

2.1. Adi Diferansiyel Denklem

Adi türevli diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$$

şeklinde yazılır. Bu diferansiyel denklem *n. mertebeden adi diferansiyel denklem* olarak adlandırılır.

Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme *adi diferansiyel denklem* denir.

2.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklem, bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir

A, B, C, D, E, F ve G, x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere, ikinci mertebeden doğrusal kısmi türevli diferansiyel denklem;

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G(x,y) \qquad (2.2.1)$$

şeklindedir. $G(x,y)=0$ ise (2.2.1) denklemi

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0 \qquad (2.2.2)$$

şekline indirgenir. (2.2.2) kısmi türevli diferansiyel denklemi parabolik eliptik ve hiperbolik olmak üzere 3 farklı tipi vardır.

A, B, C, D, E ve *F* katsayıları gerçel sabitler olmak üzere *x* ve *y* değişkenlerine göre

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (2.2.3)$$

şeklinde ikinci dereceden cebirsel denklemin "Δ" 'na bakılarak tipi belirlenebilir. Bu durumda;

$$\Delta=B^2-4AC\begin{cases}\Delta<0 & ise \quad eliptik \quad diferansiyel \quad denklem\\ \Delta=0 & ise \quad parabolik \quad diferansiyel \quad denklem\\ \Delta>0 & ise \quad hiperbolik \quad diferansiyel \quad denklem\end{cases}$$

gösterdiği bilinmektedir.

Örneğin;

a-)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (2.2.4)$$

ikinci dereceden kısmi türevli diferansiyel denklemi $B^2-4AC=-4<0$ olduğundan eliptik tip diferansiyel denklemdir. (2.2.4) denklemi iki boyutlu Laplace denklemi olarak bilinir. Akışkanlar mekaniğinde sıkıştırılamayan ideal akışkanın akım fonksiyonu, dikdörtgen levhadaki kararlı sıcaklık fonksiyonu gibi fiziksel olaylar tarafından sağlanan denklemdir. (2.2.4) denkleminin çözümü;

$$u=f(y+ix)+g(y-ix)$$

olarak elde edilebilir.

b-)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=h(x,y) \tag{2.2.5}$$

denklemi eliptik tiptedir.

İki boyutlu poisson denklemi olarak bilinir. Çevrintili ideal sıkıştırılamayan akışkanın akım fonksiyonu tarafından sağlanan denklemdir.

c-)

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.2.6}$$

denkleminde $B^2\text{-}4AC=0$ olduğundan parabolik denklemdir. Bir boyutlu ısı (difüzyon) denklemi olarak bilinir. Homojen bir çubuğun sıcaklığı (2.2.6) denklemi ile belirlenir.

d-)

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2.7}$$

denkleminde $B^2\text{-}4AC=4>0$ olduğundan hiperbolik denklemdir. Bu denklem bir boyutlu dalga denklemi olarak bilinir. Titreşen bir telin üzerindeki tüm noktaların küçük yer değiştirmeleri, ideal akışkanın yüzey dalgalarındaki hızı (2.2.7) denklemi ile belirlenir.

Bu denklemin çözümü

$$U=f(y+\frac{c}{k}x)+g(y-\frac{c}{k}x) \tag{2.2.18}$$

olarak yazılabilir.

2.3. Başlangıç Değer Problemi

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerle birlikte, *t* bağımsız değişkenin, *t=0* değeri için $u=u_0$ çözümü verilirse bu koşula başlangıç koşulu, bu koşul altındaki denklemi çözmeye "*Başlangıç Değer Problemi*" denir.

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ u(x,0)=f(x)\ \text{başlangıç koşulu}$$

2.4. Sınır Değer Problemi

Diferansiyel denklemlerle birlikte, çözüm bölgesi sınırlarında, fizik problemi belirleyecek şekilde çözüm fonksiyonu veya türevlerinin değeri verilmişse, bu koşullara "*Sınır Koşulları*", bu koşullar altında denklemi çözmeye "*Sınır Değer Problemi*" denir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad \begin{matrix} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{matrix}\quad \text{Sınır Koşulları}$$

kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Değişkenlerine Ayırma Yöntemi, Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü, Henkel Dönüşümü, Mellin Dönüşümü yöntemlerinden biri yardımıyla bulunabilir. Bu çalışmada Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılmıştır.

3. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Lineer, lineer olmayan, adi türevli ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan bu yöntem ilk olarak [Zhou, 1986] da tanıttı. Zhou, bu çalışmasında elektirik ve elektirik devre analizinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözdü. [Chen, 1999], lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri için kapalı seri çözüm formları elde ederek bu metodu geliştirdi. Dönüşüm metodu, taylor serisi çözümünden farklıdır. Bu çözüm, diferansiyel denklem ve başlangıç bilgisi kullanarak taylor serisinin çözümünün katsayılarını hesaplamayı kapsar. Bu yöntemi taylor serisi metodu ile karşılaştıracak olursak taylor serisi büyük mertebeler için, daha çok hesaplama çalışması gerektirir. [Jang, 2001] de diferansiyel dönüşümü, diferansiyel denklemlerin taylor serisi çözümünü elde etmek için bir iteratif prosedür olarak ele aldı..

Bu metod ile diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir. Ayrıca diferansiyel dönüşüm metodu diğer integral dönüşüm yöntemleriyle (Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi) karşılaştırıldığında daha kolay çözüme ulaştırır çünkü integral yöntemleri kullanıldığında karmaşık ifadelerin integrallerinin alınması zor olabilir ve ters dönüşümlerinin alınmasında problemler ortaya çıkabilir. Sonuçta bu yöntem ile lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümünün yanı sıra, sürekli olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde de çalıştığını görebilir.

Diferensiyel dönüşüm yöntemi tek boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ve n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi olmak üzere 4 ayrı durumda inceleyebiliriz. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi adi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için, iki ve üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ise denklem sistemlerini va bazı kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmekte kullanılır.

3.1. Tek Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bu yöntem tek değişken içerdiğinden adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır bu yönteme geçmeden önce diferansiyel operatörünün özelliklerin inceleyelim.

1. $\frac{d}{dx}\left(u(x) \pm \alpha\, v(x)\right) = \frac{d}{dx}u(x) \pm \alpha \frac{d}{dx}v(x)$ (α keyfi sabit)
2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}u(x)$
3. $\frac{d^n}{dx^n}\left(u(x)v(x)\right) = v(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x) + \binom{n}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u(x) + \ldots$

$$+\binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x) + u(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x)$$

Tanım 3.1.1.[Chen, 1996]

Tek bileşenli *w(x)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k)* olmak üzere, *w(x)*' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0} \tag{3.1.1}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2. [Chen, 1996]

W(k) dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)x^k \tag{3.1.2}$$

biçimde tanımlanır. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.1.3) eşitliği elde edilir.

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0} x^k \tag{3.1.3}$$

(3.1.1) ve (3.1.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla tek boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.1.1. [Chen, 1996]

Tek bileşenli *w(x), u(x) ve v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x) \pm v(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k) ve V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=U(k) \pm V(k)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u(x)\rightarrow U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0} \text{ ve } v(x)\rightarrow V(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0} \text{ olmak üzere}$$

$w(x)=u(x) \pm v(x)$ ise $W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(u(x)\pm v(x)\right)\right]_{x=0}$ diferansiyel operatörünün 1. özelliğinden

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\pm\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}=\underbrace{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}}_{U(k)}\pm\underbrace{\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}}_{V(k)}$$

$$W(k)=U(k) \pm V(k)$$

Teorem 3.1.2. [Chen, 1996]

Tek bileşenli *w(x) ve u(x)* fonksiyonlarını alalım. $c \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)= c\, u(x)$$

ise sırasıyla *W(k)* ve *U(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=c\, U(k)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x) \rightarrow U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ olduğundan $w(x) = cu(x)$ ise $W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}cu(x)\right]_{x=0}$ olur. Diferansiyel operatörünün 1. özelliğinden

$$W(k) = c\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0} = cU(k)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.3. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x) = \frac{d}{dx}u(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k) = (k+1)U(k+1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x) \rightarrow U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ olduğunu biliyoruz. $w(x) = \frac{du(x)}{dx}$ ise $W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)\right]_{x=0}$ diferansiyel operatörünün 2. özelliğinden

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0} = (k+1)\underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}u(x)\right]_{x=0}}_{U(k+1)} = (k+1)U(k+1)$$

Teorem 3.1.4.

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\frac{d^r u(x)}{dx^r}$$

ise sırasıyla $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=(k+1)(k+2)...(k+r)\,U(k+r)=\frac{(k+r)!}{k!}\,U(k+r)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.5. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. $r \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=u(x)v(x)$$

ise sırasıyla $W(k), U(k)$ ve $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k} U(r)V(k-r)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x) \rightarrow U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$ ve $v(x) \rightarrow V(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}v(x)\right]_{x=0}$ olmak üzere $w(x)=u(x)\;v(x)$ ise $W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\big(u(x)v(x)\big)\right]_{x=0}$ olur. Diferansiyel operatörünün 3. özelliğinden

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\big(u(x)v(x)\big)\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[v(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)+\binom{k}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u(x)\right]_{x=0}+$$

$$\left[\binom{k}{2}\frac{d^2}{dx^2}v(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}u(x)+...+\binom{k}{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x)+u(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$$

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[v(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[\binom{k}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u(x)\right]_{x=0}+$$

$$\frac{1}{k!}\left[\binom{k}{2}\frac{d^2}{dx^2}v(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}u(x)\right]_{x=0}+\ldots+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[u(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$$

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\left(\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right)v(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}u(x)\right]_{x=0}+\ldots$$

$$+\frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x)\right]_{x=0}+\frac{1}{k!}\left[u(x)\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}$$

$$W(k)=U(k)V(0)+U(k-1)V(1)+\ldots+U(1)V(k-1)+U(0)V(k)$$

$$W(k)=W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$$

Teorem 3.1.6. [Chen, 1996]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $m\in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=x^m$$

ise sırasıyla $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspata önce $\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0}$ ifadesinin eşitini araştıralım. Burada karşımıza 3 durum çıkmaktadır.

1. Durum: $k<m$ durumu $\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0}=\left[m(m-1)\ldots(m-k+1)x^{m-k}\right]_{x=0}=0$

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0}=\frac{0}{k!}=0$$

2. Durum: $k=m$ durumu $\left[\frac{d^m}{dx^m}x^m\right]_{x=0}=\left[m(m-1)\ldots(m-m+1)x^{m-m}\right]_{x=0}=m!$

$$W(m)=\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dx^m}x^m\right]_{x=0}=\frac{1}{m!}m!=1$$

3. Durum: $k>m$ durumu $\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0}=\left[m(m-1)...(m-m+1)0\right]_{x=0}=0$ olur.

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]_{x=0}=\frac{0}{k!}=0$$

Bu 3 durum göz önüne alınarak $w(x)=x^m$ olmak üzere

$$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

olur.

w(x) in bazı değerleri için elde edilen *W(k)* değerleri çalışmanın sonundaki Tablo 'da verilmiştir. Bunlardan bazıları

w(x)	***W(k)***
$w(x)=16$	$W(k)=16\delta(k)$
$w(x)=8x$	$W(k)=8\delta(k-1)$
$w(x)=5x^2$	$W(k)=5\delta(k-2)$
$w(x)=7x^5$	$W(k)=7\delta(k-5)$
$w(x)=3x^8+4x^3-9$	$W(k)=3\delta(k-8)+4\delta(k-3)-9\delta(k)$

olarak verilebilir.

Teorem 3.1.7

Tek bileşenli *w(x), u(x) ve v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x)\frac{d^2}{dx^2}v(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k) ve V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)\,U(r)V(k-r+2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Önce $f(x)=\frac{d^2}{dx^2}v(x)$' e karşılık gelen diferansiyel dönüşümü bulalım. Teorem 3.1.4 den r=2 için $F(k)=(k+1)(k+2)V(k+2)$ olur Teorem 3.1.5 den iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonundan

$$\mathrm{W(k)}=\sum_{r=0}^{k} U(r)F(k-r)$$

şeklinde olur. Burada

$$F(k-r)=(k-r+1)(k-r+2)V(k-r+2)$$

olur. Bu iki ifadeden

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)\, U(r)V(k-r+2)$$

bulunur.

Teorem 3.1.8.

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$ *ve* $v(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=\frac{d}{\partial x}u(x)\frac{d}{\partial x}v(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$ *ve* $V(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$f(x)=\frac{d}{\partial x}u(x)$ ve $g(x)=\frac{d}{\partial x}v(x)$ olsun. Buradan $F(k)=(k+1)U(k+1)$ ve $G(k)=(k+1)V(k+1)$ olur. Teorem 3.1.5 iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonundan

$$\mathrm{W(k)}=\sum_{r=0}^{k} F(r)G(k-r)$$

şeklindedir. Burada

$$F(r)=(r+1)U(r+1) \text{ ve } G(k-r)=(k-r+1)V(k-r+1)$$

olur. Sonuç olarak

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$$

Bulunur.

Teorem 3.1.9.

Tek bileşenli *w(x), u(x), v(x) ve s(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=u(x)v(x)s(x)$$

ise sırasıyla *W(k), U(k), V(k) ve S(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=U(k)\otimes V(k)\otimes S(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r-t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$f(x)=v(x)s(x)$ olsun. Teorem 3.1.5 iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonundan $F(k)=\sum_{r=0}^{\infty}V(r)S(k-r)$ olur. Burada $w(x)=u(x)f(x)$ olacaktır. Teorem 3.1.5 den

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)F(k-r)$$

olur.

$$F(k-r)=\sum_{t=0}^{K-r}V(t)S(k-r-t)$$

denklemde yerine yazılırsa

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r-t)$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.10.

Tek bileşenli $w(x)$, $u(x)$, $v(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)= u(x)v(x)\frac{d^2}{dx^2}s(x)$$

ise sırasıyla $W(k)$, $U(k)$, $V(k)$ ve $S(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}(k-r-t+2)(k-r-t+2)\,U(r)V(t)S(k-r-t+2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$g(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}s(x)$ olsun. Buna karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $G(k)=(k+1)(k+2)S(k+2)$ buradan $f(x)=v(x)g(x)$ olur. Teorem 3.1.5 iki fonksiyonun çarpımının diferansiyel dönüşüm fonksiyonundan

$$F(k)=\sum_{r=0}^{\infty}V(r)G(k-r)$$

Burada

$$G(k-r)=(k-r+1)(k-r+2)S(k-r+2)$$

olur. Sonuç olarak $w(x)=u(x)f(x)$ olacaktır. Teorem 3.1.5 den

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)F(k-r)$$

olur.

$$F(k-r)=\sum_{t=0}^{k-r}V(t)G(k-r-t)$$

denklemde yerine yazılırsa

$$W(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}(k-r-t+2)(k-r-t+2)\,U(r)V(t)S(k-r-t+2)$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.11.

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $\lambda \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=a^{\lambda x}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

(3.1.1) den $W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a^{\lambda x}\right]_{x=0}$ olur. Şimdi k nın aldığı değerlere göre $W(k)$ değerlerini hesaplarsak

$k=0$ için $W(0)=\frac{1}{0!}\left[a^{\lambda x}\right]_{x=0}=\frac{1}{0!}=1$

$k=1$ için $W(1)=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}a^{\lambda x}\right]_{x=0}=\frac{1}{1!}\left[\lambda \ln a a^{\lambda x}\right]_{x=0}=\frac{1}{1!}\lambda \ln a$

$k=2$ için $W(2)=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dx^2}a^{\lambda x}\right]_{x=0}=\frac{1}{2!}\left[\lambda^2 (\ln a)^2 a^{\lambda x}\right]_{x=0}=\frac{1}{2!}\lambda^2(\ln a)^2$

$k=3$ için $W(3)=\frac{1}{3!}\left[\frac{d^2}{dx^2}a^{\lambda x}\right]_{x=0}=\frac{1}{3!}\left[\lambda^3 (\ln a)^3 a^{\lambda x}\right]_{x=0}=\frac{1}{3!}\lambda^3(\ln a)^3$

bu değerlerden anlaşılacağı gibi

$$W(k)=\frac{\lambda^k (\ln a)^k}{k!}$$

eşitliği sağladığı görülür.

Teorem 3.1.12. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $\lambda \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=e^{\lambda x}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Teorem 3.1.11. den $a=e$ alınırsa $W(k)=\dfrac{\lambda^k (\ln e)^k}{k!}=\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Teorem 3.1.13.

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $\lambda \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=e^{\lambda x+b}$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^b$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$w(x)= e^{\lambda x+b}= e^{\lambda x}e^b$ Teorem 3.1.2 diferansiyel dönüşümün lineerlik özelliğinden $u(x)= e^{\lambda x}$ ve e^b'yi sabit olarak alırsak.

$W(k)=U(k)e^b$olur. Teorem 3.1.12. den $U(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}$ olduğu biliniyor. Sonuç olarak

$$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^b$$

bulunur.

Teorem 3.1.14.

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. Eğer

$$w(x)=sh(\lambda x)$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{k!} & k\ tek\ ise\\ 0 & k\ çift\ \ ise\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$w(x)= sh(\lambda x\ )= \dfrac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{2}=\dfrac{e^{\lambda x}}{2}-\dfrac{e^{-\lambda x}}{2}$ olur. Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 den

$$W(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right)$$

olur. k tek ise

$$W(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right)=\frac{\lambda^k}{k!}$$

k çift ise

$$W(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right)=0$$

Teorem 3.1.15.

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. Eğer

$$w(x)=ch(\lambda x)$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\begin{cases}0 & k\ tek\ ise\\ \dfrac{\lambda^k}{k!} & k\ çift\ \ ise\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.16. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $a,b\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=sin(ax+b)$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)= \frac{a^k}{k!} sin\left(\frac{\pi}{2}k+b\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

w(x)=sin(ax+b) ise (3.1.1) den bu fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\sin(ax+b)\right]_{x=0}$$

Şimdi *k* nın aldığı değerlere göre *W(k)* değerlerini hesaplarsak

k=0 için $W(0) = \frac{1}{0!}\left[\sin(ax+b)\right]_{x=0} = \frac{1}{0!} sin(b)$

$$= \frac{1}{1!} a^0 \, sin\left(\frac{0\pi}{2}+b\right)$$

k=1 için $W(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}\sin(ax+b)\right]_{x=0} = \frac{1}{1!}\left[a\cos(ax+b)\right]_{x=0}$

$$= \frac{1}{1!} \text{a} \, cos(b) = \frac{1}{1!} \text{a} \, sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right)$$

k=2 için $W(2) = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dx^2}\sin(ax+b)\right]_{x=0} = \frac{1}{2!}\left[-a^2\sin(ax+b)\right]_{x=0}$

$$=-\frac{1}{2!} a^2 \, sin(b) = \frac{1}{2!} a^2 \, sin\left(\frac{2\pi}{2}+b\right)$$

k=3 için $W(3) = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dx^3}\sin(ax+b)\right]_{x=0} = \frac{1}{3!}\left[-a^3\cos(ax+b)\right]_{x=0} =$

$$=-\frac{1}{3!} \text{a}^3 \, cos(b) = \frac{1}{3!} \text{a}^3 \, sin\left(\frac{3\pi}{2}+b\right)$$

bu değerlerden anlaşılacağı gibi

$$W(k)= \frac{a^k}{k!} sin\left(\frac{\pi}{2}k+b\right)$$

dır.

Teorem 3.1.17. [Abdel-Halim, 2004]

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $a,b \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\cos(ax+b)$$

ise $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k)=\frac{a^k}{k!}cos\left(\frac{\pi}{2}k+b\right)$$

eşitliği sağlanır.,

Teorem 3.1.18. [Arikoglu, 2004]

Tek bileşenli $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonlarını alalım. $k \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x)=\int_{x_0}^{x} u(t)dt$$

ise $W(k)$ ve $U(k)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\frac{U(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspata geçmeden önce analizden iyi bilinen bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 3.1.

$f: [a,b] \to R$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $[a,b]$ üzerinde

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$$

Eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x)=f(x)$$

dir.

Bu teoremden hareketle $w'(x)=u(x)$ olur.

$$(k+1)W(k+1)=U(k)$$

$$W(k+1)=\frac{U(k)}{(k+1)}$$

$$W(k)=\frac{U(k-1)}{k}$$

Teorem 3.1.19. [Arikoglu, 2004]

Tek bileşenli *w(x), u(x)* ve *v(x)* fonksiyonlarını alalım.Eğer

$$w(x)=v(x)\int_{x_0}^{x}u(t)dt$$

ise *W(k), U(k)* ve *V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=V(k)\otimes\frac{U(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.20. [Arikoglu, 2004]

Tek bileşenli *w(x), u(x)* ve *v(x)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x)=\int_{x_0}^{x}u(t)v(t)dt$$

ise *W(k), U(k)* ve *V(k)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k)=\frac{U(k-1)\otimes V(k-1)}{k}$$

eşitliği sağlanır.

3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tanım 3.2.1. [Zhou, 1986]

İki bileşenli *w(x,y)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k,h)* olmak üzere, *w(x,y)*' nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{3.2.1}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.2. [Zhou, 1986]

W(k,h) dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^k y^h \tag{3.2.2}$$

biçimde tanımlanır. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitlikleri dikkate alınarak aşağıdaki (3.2.3) eşitliği elde edebiliriz.

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} x^k y^h \tag{3.2.3}$$

(3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla iki boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 3.2.1. [Zhou, 1986]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h) ve V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u(x,y) \rightarrow U(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

ve

$$v(x,y) \rightarrow V(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olmak üzere $w(x,y)=u(x,y) \pm v(x,y)$ ise

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left(u(x,y) \pm v(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

diferansiyel fonksiyonun 1. özelliğinden

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x,y) \pm \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k!h!}\left[\frac{d^{k+h}}{dx^k dy^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}}_{U(k,h)} \pm \underbrace{\frac{1}{k!h!}\left[\frac{d^{k+h}}{dx^k dy^h} v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}}_{V(k,h)}$$

$$W(k,h) = U(k,h) \pm V(k,h)$$

Teorem 3.2.2. [Zhou, 1986]

İki bileşenli $w(x,y)$ ve $u(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. $c \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x,y) = c\, u(x,y)$$

ise sırasıyla $W(k,h)$ ve $V(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h) = cU(k,h)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x,y) \rightarrow U(k,h) = \dfrac{1}{k!h!}\left[\dfrac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$ olduğundan $w(x,y)=cu(x,y)$ ise

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} c\,u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Diferansiyel fonksiyonun 1. özelliğinden

$$W(k,h)=c\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = cU(k,h)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.3. [Zhou, 1986]

İki bileşenli $w(x,y)$ ve $u(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

ise sırasıyla $W(k,h)$ ve $U(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$u(x,y) \rightarrow U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$ olduğunu biliyoruz. $w(x)=\frac{du(x)}{dx}$ ise

$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$ diferansiyel fonksiyonunun 2. özelliğinden

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= (k+1)\underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} u(x)\right]_{x=0}}_{U(k+1)} =(k+1)U(k+1,h)$$

Teorem 3.2.4. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x,y)$ ve $u(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *U(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.5. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y)* ve *u(x,y)* fonksiyonlarını alalım. $r,s \in N$ olmak üzere eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial^{r+s} u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

ise sırasıyla *W(k,h)* ve *U(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=(k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+1)(h+2)\ldots(h+s)\ U(k+r,h+s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.5. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli *w(x,y), u(x,y) ve v(x,y)* fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$$

ise sırasıyla *W(k,h), U(k,h) ve V(k,h)* verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V(r,h-s)U(k-r,s)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u(x,y)\rightarrow U(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

ve

$$v(x,y) \rightarrow V(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olmak üzere $w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$ ise

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\big(u(x,y)v(x,y)\big)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Diferansiyel fonksiyonun 3. özelliğinden

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\big(u(x,y)v(x,y)\big)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{k!h!}\left(\frac{\partial^h}{\partial y^h}\left(\binom{k}{0} v(x,y)\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,y) + \binom{k}{1}\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(x,y) + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. + \binom{k}{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}v(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + u(x,y)\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,y)\right)\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{k!h!}\left(\binom{k}{0}\binom{h}{0}\frac{\partial^h}{\partial y^h}v(x,y)\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(x,y) + \binom{k}{0}\binom{h}{1}\frac{\partial^{h-1}}{\partial y^{h-1}}v(x,y)\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^k \partial y}u(x,y) + \ldots\right.$$

$$\binom{k}{0}\binom{h}{1}\frac{\partial^{h+1}}{\partial y^h \partial x}v(x,y)\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(x,y) + \binom{k}{1}\binom{h}{1}\frac{\partial^h}{\partial y^{h-1}\partial x}v(x,y)\frac{\partial^k}{\partial x^{k-1}\partial y}u(x,y) + \ldots$$

$$\left.\binom{k}{r}\binom{h}{s}\frac{\partial^{h-s+r}}{\partial y^{h-s}\partial x^r}v(x,y)\frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r}\partial y^s}u(x,y) + \ldots + \binom{k}{k}\binom{h}{h}\frac{\partial^k}{\partial x^k}v(x,y)\frac{\partial^h}{\partial y^h}u(x,y)\right)_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{k!h!}\left[\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\binom{k}{r}\binom{h}{s}\frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r}\partial y^s}u(x,y)\frac{\partial^{h-s+r}}{\partial x^r \partial y^{h-s}}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\frac{1}{(k-r)!s!}\frac{1}{(h-s)!r!}\left[\binom{k}{r}\binom{h}{s}\frac{\partial^{k-r+s}}{\partial x^{k-r}\partial y^s}u(x,y)\frac{\partial^{h-s+r}}{\partial x^r \partial y^{h-s}}v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V(r,h-s)U(k-r,s)$$

Teorem 3.1.6. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x)$ fonksiyonunu alalım. $m \in Z$ olmak üzere eğer

$$w(x,y) = x^m y^n$$

ise sırasıyla $W(k)$ verilen fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m \text{ ve } h=n\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.7. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x,y)$, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}$$

ise sırasıyla $W(k,h)$, $U(k,h)$ ve $V(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+2)(k-r+1)\,U(r,h-s)V(k-r+2,s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.8. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x,y)$, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

ise sırasıyla $W(k,h)$, $U(k,h)$ ve $V(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.9. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x,y)$, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla $W(k,h)$, $U(k,h)$ ve $V(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(s+1)(h-s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.10. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x,y)$, $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise sırasıyla $W(k,h)$, $U(k,h)$ ve $V(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.11. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $s(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)s(x,y)$$

ise sırasıyla $W(k,h)$, $U(k,h)$, $V(k,h)$ ve $S(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}U(r,h-s-p)V(t,s)S(k-r-t,p)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.12. [Ayaz, 2003]

İki bileşenli $w(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $s(x,y)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)\frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial x^2}$$

ise sırasıyla $W(k,h)$, $U(k,h)$, $V(k,h)$ ve $S(k,h)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+2)(k-r-t+2)\,U(r,h\text{-}s\text{-}p)V(t,s)S(k\text{-}r\text{-}t\text{+}2,p)$$

eşitliği sağlanır.

3.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tanım 3.3.1. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli fonksiyon $w(x,y,t)$ olmak üzere, $w(x,y,t)$'nin üç boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h,m)=\frac{1}{k!\,h!\,m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} w(x,y,t)\right]_{(0,0,0)} \qquad (3.3.1)$$

olarak tanımlanır. Burada daha öncede olduğu gibi, dikkat edilecek olursa dönüşüm fonksiyonunu temsil etmek için büyük harfler, orijinal fonksiyonu ifade etmek için de küçük harfler kullanılmıştır.

Tanım 3.3.2. [Ayaz, 2004]

$W(k,h,m)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} W(k,h,m)x^k y^h t^m \qquad (3.3.2)$$

olarak tanımlanır.

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi (3.2.3) eşitliğine benzer şekilde (3.3.1), (3.3.2) denklemleri dikkate alınırsa,

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!\,m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} w(x,y,t)\right]_{(0,0,0)} x^k y^h t^m \qquad (3.3.3)$$

yazabiliriz.

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 3.3.1. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$, $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=u(x,y,t) \pm v(x,y,t)$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$, $U(k,h,m)$ ve $V(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=U(k,h,m) \pm V(k,h,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.2. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. $c \in R$ olmak üzere eğer

$$w(x,y,t)=c\, u(x,y,t)$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$ ve $U(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=c\, U(k,h,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.3. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$ ve $U(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=(k+1)U(k+1,h,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.4. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$ ve $U(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=(h+1)U(k,h+1,m)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.5. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$ ve $u(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial^{r+s+p}u(x,y,t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$ ve $U(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=\frac{(k+r)!}{k!}\frac{(h+s)!}{h!}\frac{(m+p)!}{m!}U(k+r,h+s,m+p)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.6. [Ayaz, 2004]

Üç bileşenli $w(x,y,t)$, $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y)=u(x,y,t)v(x,y,t)$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$, $U(k,h,m)$ ve $V(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.7.

Üç bileşenli $w(x,y,t)$, $u(x,y,t)$ ve $v(x,y,t)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}v(x,y,t)$$

ise sırasıyla $W(k,h,m)$, $U(k,h,m)$ ve $V(k,h,m)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k,h,m)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s,p)V(r,h-s+1,m-p)$$

eşitliği sağlanır.

3.4. N Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tanım 3.4.1. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli fonksiyon $w(x_1,x_2,...,x_n)$ olmak üzere, $w(x_1,x_2,...,x_n)$'nin üç boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k_1,k_2,...,k_n)=\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}w(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}} \quad (3.3.1)$$

olarak tanımlanır. Burada daha öncede olduğu gibi, dikkat edilecek olursa dönüşüm fonksiyonunu temsil etmek için büyük harfler, orijinal fonksiyonu ifade etmek için de küçük harfler kullanılmıştır.

Tanım 3.4.2. [Kurnaz, 2005]

$W(k_1,k_2,...,k_n)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}W(k_1,k_2,...,k_n)\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \quad (3.3.2)$$

olarak tanımlanır.

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi (3.2.3) eşitliğine benzer şekilde (3.3.1), (3.3.2) denklemleri dikkate alınırsa,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}w(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$$

(3.3.3)

yazabiliriz.

n boyutlu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu için aşağıdaki teoremler ispat edilebilir.

Teorem 3.4.1. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,...,x_n)$, $u(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $v(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,\ldots,x_n)= u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\pm v(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, $U(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ve $V(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,\ldots,k_n)= U(k_1,k_2,\ldots,k_n)\pm V(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.2. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. $c\in R$ olmak üzere eğer

$$w(x_1,x_2,\ldots,x_n)= c\, u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ve $U(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,\ldots,k_n)= c\, U(k_1,k_2,\ldots,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.3. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \frac{\partial}{\partial x_1}\, u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ve $U(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,\ldots,k_n)= (k+1)\, U(k_1+1,k_2,\ldots,k_n)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.4. [Kurnaz, 2005]

n bileşenli $w(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ve $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonlarını alalım. Eğer

$$w(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \frac{\partial^{r_1+r_2+\ldots+r_n}}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\ldots\partial x_n^{r_n}}\, u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

ise sırasıyla $W(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ ve $U(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ verilen fonksiyonların diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$W(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\frac{(k_1+r_1)!}{k_1!}\frac{(k_2+r_2)!}{k_2!}\ldots\frac{(k_n+r_n)!}{k_n!}U(k_1+r_1,\ k_2+r_2,\ \ldots,\ k_n+r_n)$$

eşitliği sağlanır.

4. UYGULAMALAR

Giriş bölümünde de söylediğimiz gibi diferansiyel dönüşüm yöntemi; lineer, lineer olmayan adi türevli ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Bu bölümde ilk olarak adi türevli diferansiyel denklemi, riccati denklemi daha sonra ısı iletim denklemi, difüzyon denklemi, lineer olmayan integral denklemi ve Burgers denklemi çözüldü.

Örnek 4.1.

$y'-3y=0$, $y(0)=1$ diferansiyel denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm

Diferansiyel denklemin analitik çözümü $y(x)=e^{3x}$ dir. Şimdi diferansiyel dönüşüm yöntemi ile denklemi çözelim.

$y(x)$ 'e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $Y(k)$ olmak üzere $y'(x)$'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu $(k+1)Y(k+1)$ (6 bölüm tablodan) dir. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$(k+1)Y(k+1)-3Y(k)=0$$

$$Y(k+1)=\frac{3}{k+1}Y(k) \tag{4.1.1}$$

başlangıç şartından $Y(0)=1$

$$k=0 \text{ için } (4.1.1) \text{ den } Y(1)=\frac{3}{1}$$

$$k=1 \text{ için } (4.1.1) \text{ den } Y(2)=\frac{3^2}{2}$$

$$k=2 \text{ için } (4.1.1) \text{ den } Y(3)=\frac{3^3}{6}$$

$$k=3 \text{ için } (4.1.1) \text{ den } Y(4)=\frac{3^4}{24}$$

$Y(k)=\dfrac{3^k}{k!}$ bulunur. (3.1.2.) den aranan çözüm

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)x^k \tag{4.1.2}$$

Olduğunu biliyoruz. Bulunan bu Y(k) değeri (4.1.2) de yerine yazarsak

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!}=e^{3x}$$

$$y(x)=e^{3x}$$

bulunur buda analitik çözüm ile aynıdır.

Örnek 4.2.

$y''-4y'+3y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=4$ diferansiyel denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm

Diferansiyel denklemin analitik çözümü $y(x)=e^x+e^{3x}$ dir. Şimdi diferansiyel dönüşüm yöntemi ile denklemi çözelim.

y(x) 'e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *Y(k)* olmak üzere *y'(x)*'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu *(k+1)Y(k+1)* *y''(x)*'e karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu *(k+1)(k+2)Y(k+2)* (6 bölüm tablodan) dir. Bu ifadeleri denklemde yerine yazarsak

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)-4(k+1)Y(k+1)+3Y(k)=0$$

$$Y(k+2)=\frac{4}{(k+2)}Y(k+1)-\frac{3}{(k+2)(k+1)}Y(k) \tag{4.2,1}$$

başlangıç şartından $Y(0)=2,\ Y(1)=4$

$k=0$ için (4.2.1) den $Y(2)=5=\frac{10}{2!}=\frac{9+1}{2!}=\frac{3^2+1}{2!}$

$k=1$ için (4.2.1) den $Y(3)=\frac{28}{6}=\frac{27+1}{3!}=\frac{3^3+1}{3!}$

$k=2$ için (4.2.1) den $Y(4)=\frac{82}{24}=\frac{81+1}{4!}=\frac{3^4+1}{4!}$

$k=3$ için (4.2.1) den $Y(5)=\frac{244}{120}=\frac{243+1}{5!}=\frac{3^5+1}{5!}$

$Y(k)=\frac{3^k}{k!}+\frac{1}{k!}$ bulunur. Bu ifadeyi (3.2.2) de yerine yazarsak

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3^k}{k!}+\frac{1}{k!}\right)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^{3x}+e^{x}$$

Örnek 4.3.

$y'=xy^2+(1-2x)y+x-1$ Riccati diferansiyel denklemini $y_1=1$ özel çözümü ve $y(0)=2$ başlangıç şartına uyan çözümünü bulalım.

Çözüm

Denklem Riccati denklemi olduğundan $y=1+v$ dönüşümü yapılırsa diferansiyel denklem

$$v'=(2x+1-2x)v+xv^2$$

$$v'=v+xv^2$$

olur. Bu bir Bernoulli denklemidir. $v=\dfrac{1}{u}$ alındığında

$$u'+u=-x$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$u=1-x+ce^{-x}$$

bulunur. Böylece verilen Riccati denkleminin genel çözümü

$$y=1+\frac{1}{ce^{-x}+1-x}$$

elde edilir. Başlangıç şartına uyan özel çözümü bulacak olursak

$$y(0)=1+\frac{1}{c+1}=2$$

den $c=0$ bulunur. O zaman denklemin özel çözümü

$$y=1+\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

olduğundan

$$y=2+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=1+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

olarak bulunur.

Şimdi bu denklemi diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözelim.

$y(x)$ karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $Y(k)$ olsun. 6 bölüm ki tablo 109 dan aranan denkleme karşılık gelen denklem

$$u(x)=y^2 \text{ , } f(x)=1-2x \text{ ve } g(x)=x-1$$

$$U(k)=Y(k)\otimes Y(k),\ F(k)=\delta(k)-2\delta(k-1) \text{ ve } G(k)=\delta(k-1)-\delta(k)$$

olmak üzere

$$(k+1)Y(k+1)=\delta(k-1)\otimes U(k)+F(k)\otimes Y(k)+G(k)$$

şeklindedir.

k değeri	$\delta(k-1)\otimes U(k)=$ $\delta(k-1)\otimes Y(k)\otimes Y(k)$	$F(k)\otimes Y(k)=$ $(\delta(k)-2\delta(k-1))\otimes Y(k)$	$G(k)=$ $\delta(k-1)-\delta(k)$
$k=0$	0	2	-1
$k=1$	4	-3	1
$k=2$	4	-1	0
$k=3$	5	-1	0
$k=4$	6	-1	0
$k=5$	7	-1	0

k=0 için

$$Y(1)=\delta(-1)\otimes U(0)+F(0)\otimes Y(0)+G(0)$$

$$Y(1)=0+2-1$$

$$Y(1)=1$$

k=1 için

$$2Y(2)=\delta(0)\otimes U(1)+F(1)\otimes Y(1)+G(1)$$

$$2Y(2)=4-3+1=2$$

$$Y(2)=1$$

k=2 için

$$3Y(3)=\delta(1)\otimes U(2)+F(2)\otimes Y(2)+G(2)$$

$$3Y(k)=4-1=3$$

$$Y(3)=1$$

k=3 için

$$4Y(4)=\delta(2)\otimes U(3)+F(3)\otimes Y(3)+G(3)$$

$$4Y(4)=5-1=4$$

$$Y(4)=1$$

k=4 için

$$5Y(5)=\delta(3)\otimes U(4)+F(4)\otimes Y(4)+G(4)$$

$$5Y(5)=6-1=5$$

$$Y(5)=1$$

k=5 için

$$6Y(6)=\delta(4)\otimes U(5)+F(5)\otimes Y(5)+G(5)$$

$$6Y(6)=7-1=6$$

$$Y(6)=1$$

bu şekilde devam edilirse

$$Y(0)=2 \text{ ve } Y(k)=1 \ (k>1)$$

bulunur.

(3.1.2) den aranan $y(x)$ fonksiyonu

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} Y(k) = Y(0)+Y(1)x+Y(2)x^2+Y(3)x^3+...$$

$$y(x)=2+x+x^2+x^3+x^4+... \ =1+\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

bulunur ki buda bulunan özel çözüm ile aynıdır.

Örnek 4.4.

$\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi $u(x,0)=-x$ başlangıç şartına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle bulalım.

Çözüm

$u(x,t)$ ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere verilen denkleme diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa. (6 bölümdeki tablodan 33, 35 ve 37 den)

$$U(k,h) = -\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+1,s) \qquad (4.4.1)$$

bulunur. Başlangıç şartından ve (3.2.2) den

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k,0)x^k = -x \qquad (4.4.2)$$

buradan

$$U(k,0)=\begin{cases}-1, & k=1\\ 0, & aksi\ \ halde\end{cases} \tag{4.4.3}$$

(4.4.3) ve (4.4.1) den

$U(1,1)$=-[2$U(0,0)U(2,0)+U(1,0)U(1,0)$] =-1,

$$U(1,2)=-\frac{1}{2}[2U(0,1)U(2,0)+2U(0,0)U(2,1)+U(1,1)U(1,0)+U(1,0)U(1,1)]=-1$$

buradan

$$U(k,h)=\begin{cases}-1, & k=1,\ h=0,1,2,...\\ 0, & aksi\ \ halde\end{cases} \tag{4.4.4}$$

bulunur. Bu ifade (3.2.2) yerine yazılırsa

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k t^h = x(-1-t-t^2-t^3-...)$$

$$u(x,t)=\frac{x}{t-1}$$

olur bu ifade [Zaunderer, 1983] de verilen çözüm ile aynıdır.

Örnek 4.5. [Oturanç, 2003]

Isı iletim denklemi aşağıdaki şekilde ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.5.1}$$

denkleminin $u(x,0)=cosx$ başlangıç şartına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle bulalım.

Çözüm

(4.5.1) denklemine iki boyutlu diferansiyel dönüşüm uygulanırsa

$$U(k,h+1)=c^2\frac{(k+1)(k+2)}{(h+1)}U(k+2,h) \tag{4.5.2}$$

elde edilir. Başlangıç koşulundan

$$U(k,0)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k!} & k\ tek\ ise\\ \\ 0 & k\ çift\ ise\end{cases} \tag{4.5.3}$$

elde edilir. (4.5.3) denklemini (4.5.2)' de yerine yazarsak tüm $U(k,h)$ değerleri bulunur. Sonuç olarak diferansiyel ters dönüşüm uygulanırsa (4.5.1) denkleminin genel çözümü

$$u(x,t)=\left[\sum_{k=0,2,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k!}x^{k}\right]\left[\sum_{h=0}^{\infty}c^{2h}\frac{(-1)^{h}}{h!}t^{h}\right] \tag{4.5.4}$$

olarak elde edilir. (4.5.1) denkleminin genel çözümü olan (4.5.4) ile bu denklemi analitik çözümü

$$u(x,t)=e^{-c^{2}t}\cos x \tag{4.5.5}$$

ile çakışır.

Örnek 4.6.

Lineer olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \tag{4.6.1}$$

difüzyon denklemi,

$$u(x,0)=\frac{1}{c}x^{2},\; x>0,\; c>0 \qquad c \text{ keyfi sabit} \tag{4.6.2}$$

başlangıç şartına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle bulalım.

Çözüm

(4.6.1) denklemine iki boyutlu diferansiyel dönüşümü uygulanırsa, (6 bölüm tablodan)

$$(h+1)U(k,h+1)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+1,s)+$$

$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(k-r+2)U(r,h-s)U(k-r+2,s) \tag{4.6.3}$$

elde edilir. (4.6.2) başlangıç değeri (4.6.3)' de yerine yazılırsa,

$$U(k,0)=\begin{cases}0 & k=0,1,3,\ldots\\ \dfrac{1}{c} & k=2\end{cases} \tag{4.6.4}$$

elde edilir. (4.6.4) denkleminin (4.6.3)' de yerine yazılması ile $m\to\infty$ için

$$U(2,1)=\frac{6}{c^2},\ U(2,2)=\frac{36}{c^3},\ U(2,3)=\frac{216}{c^4},\ldots,U(2,i)=\frac{6^{i+1}}{c^{i+1}}\quad i=1,2,3,\ldots \tag{4.6.5}$$

bulunur. Bulunan bu tüm $U(k,h)$ değerleri (3.2.2) denkleminde yerlerine yazılarak (4.6.1) denkleminin seri çözümü

$$U(x,t)=x^2\left(\frac{1}{c}+\frac{6}{c^2}t+\frac{36}{c^3}t^2+\frac{216}{c^4}t^3+\ldots\right) \tag{4.6.6}$$

Olarak elde edilir. Bu ise [ ]' de verilen ayrışım metoduyla elde edilen

$$u(x,t)=x^2\left(\frac{1}{c-6t}\right)$$

sonucuyla tam olarak aynıdır.

Örnek 4.7. [Arikoğlu, 2004]

Lineer olmayan

$$u'(x)=-1+\int_0^x u^2(t)dt \tag{4.7.1}$$

integral diferansiyel denklemini

$$u(0)=0 \tag{4.7.2}$$

başlangıç şartına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle bulalım.

Çözüm

$u(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere $x=0$ için (4.7.1) ve (4.7.2) den

$$u'(0)=-1 \tag{4.7.3}$$

bulunur. (4.7.1) denkleminden

$$(k+1)U(k+1)=-\delta(k)+\frac{U(k-1)\otimes U(k-1)}{k} \tag{4.7.4}$$

elde edilir. $k\geq 1$ için $\delta(k)=0$ olacağından (4.7.4) denklemi

$$U(k+1)=\frac{1}{k(k+1)}\sum_{r=0}^{k-1}U(k-1-r)U(r) \tag{4.7.5}$$

şekline dönüşür. (4.7.5) denklemi ve (4.7.2), (4.7.3) başlangıç değerleri göz önüne alınırsa

$U(0)=0,\ U(1)=-1,\ U(2)=0, U(3)=0,\ U(4)=\frac{1}{12},\ U(5)=0,\ U(6)=0,\ U(7)= -\frac{1}{252},$

$U(8)=0,\ U(9)=0,\ U(10)= \frac{1}{6048},\ U(11)=0,\ U(12)=0,\ U(13)= -\frac{1}{157248},\ U(14)=0,$

$U(15)=0,\ U(16)= \frac{37}{158505984}$

$$u(x)=-x+\frac{1}{12}x^{4}-\frac{1}{252}x^{7}+\frac{1}{6048}x^{10}-\frac{1}{157248}x^{13}+\frac{37}{158505984}x^{16}$$

bulunur.

Örnek 4.8. [Oturanç, 2004]

6 bölüm tabloda 124 de verilen Burgers denkleminde özel olarak $\varepsilon = 0$ ve $\nu= 1$ için Burger denklemini ele alalım.

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad (4.8.1)$$

uygun başlangıç şartları

$$u(x,0) = \sin \pi x, \qquad (4.8.2)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad (4.8.3)$$

$$u_x(0,t) = \pi\, e^{-\pi^2 t}, \qquad (4.8.4)$$

gibi tanımlansın. (4.8.1) in (4.8.2)-(4.8.4) başlangıç şartlarına uyan çözümünü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle bulalım.

Çözüm

(4.8.1) denklemine diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanırsa

$$(h+1)U(k, h+1) = (k+1)(k+2)U(k+2,h) \qquad (4.8.5)$$

olur (4.8.2) nin seri formundan $h= 0$ için

$$\sin \pi x=\pi x-\frac{\pi^3}{3!}x^3+\frac{\pi^5}{5!}x^5-\frac{\pi^7}{7!}x^7+\ldots = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}U(k,0)x^k \qquad (4.8.6)$$

olur. Böylece k tek sayı olmak üzere

$$U(k,0) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{\pi^k}{k!} \qquad (4.8.7)$$

dır. (4.8.4) için aynı prosedürü tekrar edersek

$$\pi e^{-\pi^2 t}=\pi\left(1-\pi^2 t+\frac{\pi^4}{2!}t^2+\frac{\pi^6}{3!}t^3-\frac{\pi^8}{4!}t^4+\ldots\right)= \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty}U(1,h)t^h \qquad (4.8.8)$$

elde edilir. Buradan

$$U(1,h) = (-1)^h \frac{\pi^{2h+1}}{h!} \tag{4.8.9}$$

elde edilir. Dönüşümün katsayılarının geri kalanı, (4.8.5) eşitliğinin sağ tarafında, önceki bilinen değerler yerine konularak bulunabilir. Örneğin;

$k=0$ ve $h=0$ için (4.8.3) başlangıç şartından dolayı

$$U(0,1) = 0$$

dır. (4.8.5) den $k=1$ ve $h=0$ için

$$U(1,1) = 2.3.U(3,0) = -\frac{\pi^3}{1!}$$

elde edilir. $k=3$ ve $h=0$ için

$$U(3,1) = 4.5.U(5,0) = \frac{\pi^5}{3!}$$

elde edilir. $k=5$ ve $h=0$ için

$$U(5,1) = 6.7.U(5,0) = -\frac{\pi^7}{5!}$$

elde edilir. Böylece genelleştirerek

$$U(k,1)=\begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}\pi^{k+2}}{k!1!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift se} \end{cases} \tag{4.8.10}$$

$h=1$ ve farklı bir k için benzer bir prosedürü tekrarlarsak

$$U(k,2)=\begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{k+3}{2}}\pi^{k+4}}{k!2!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift se} \end{cases} \tag{4.8.11}$$

elde edilir. Sonuç olarak bütün bu dönüşüm katsayıları

$$U(k,h)=\begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{k+2h-1}{2}}\pi^{k+2h}}{k!h!} & k \text{ tek ise} \\ 0 & k \text{ çift se} \end{cases} \tag{4.8.12}$$

olarak formülize edilebilir. (3.2.2) te (4.8.12) yi yerine yazarsak seri bir çözüm elde ederiz öyle ki

$$u(x,y) = \sum_{k=1,3,5,...}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+2h-1}{2}} \pi^{k+2h}}{k!h!} x^k t^h \qquad (4.8.13)$$

olur. Buradan

$$u(x,y) = \left(\sum_{k=1,3,5,...}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} \pi^k}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \pi^{2h}}{h!} t^h \right) \qquad (4.8.14)$$

olur. Bir diğer yol ile (4.8.14)

$$u(x,y) = (\pi x - \frac{\pi^3}{3!} x^3 + \frac{\pi^5}{5!} x^5 - ...)(1 - \pi^2 t + \frac{\pi^4}{2!} t^2 + \frac{\pi^6}{3!} t^3 - ...) \qquad (4.8.15)$$

olacak şekilde yazılabilir. (4.8.1) in bu seri çözümleri (4.8.2)-(4.8.4) e bağlıdır. Diğer taraftan (4.8.15) de, ilk faktör, $sin \pi x$ seri formuna karşılıktır ve diğer faktör $e^{-\pi^2 t}$ dir. Bu yüzden verilen (4.8.2) – (4.8.4) şartları için kesin çözüm

$$u(x,t) = sin\, \pi x\, e^{-\pi^2 t} \qquad (4.8.16)$$

olarak yazılabilir bu ise [Kaya, 2002] de verilen sonuçtur.

5. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada diferansiyel dönüşüm yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca yönteme ilişkin mevcut formüllere yeni formüller ifade ve ispat edilerek geniş bir dönüşüm tablosu hazırlanmıştır. Literatürde Riccati denklemi olarak verilen adi türevli diferansiyel denklemin analitik çözümünü bulabilmek için bir özel çözümün bilinmesi gerektiği ifade edilmektedir. Bu yeni yöntem sayesinde özel çözüm bilinmeksizin Riccati denklemini gerek analitik gerekse analitiğe çok yakın yaklaşık olarak çözebilmektedir. Diğer taraftan Dalga denklemi, integral denklemleri, lineer denklemler, lineer olmayan denklemler gibi bir çok kısmi türevli diferansiyel denklem ve literatürde değinilen denklemlerin diferansiyel dönüşüm yöntemindeki karşılıkları tabloda verilmiştir.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanım açısından ve bilgisayara uygulanabilirliğinden dolayı diğer yöntemlerle: Laplace, Fourier, Mellin dönüşüm yöntemleri kıyaslama yapıldığında söz konusu yöntem daha kolay bir yöntemdir. Diğer yöntemlerde karşılaşılan karmaşık integrallerin yerine bu yöntemde cebirsel denklemler varılır ve bu cebirsel denklemler ile denklem kolayca bilgisayara tanıtılıp çözümler hesaplanabilir.

Bu çalışmaya paralel olarak ileri bir aşamada tabloda verilen her bir özel diferansiyel yapının nümerik çözümleri ile diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümlerinin araştırılması yapılabilir.

6. TABLO

	Fonksiyon	*Diferansiyel Dönüşüm Fonksiyonu*
1	$w(x)$	$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}$
2	$w(x)=u(x)\pm v(x)$	$W(k)=U(k)\pm V(k)$
3	$w(x)=c\,u(x)\ (c\in R)$	$W(k)=c\,U(k)\ \ (c\in R)$
4	$w(x)=\frac{d}{dx}u(x)$	$W(k)=(k+1)U(k+1)=\frac{(k+1)!}{k!}U(k+1)$
5	$w(x)=\frac{d^r}{dx^r}u(x)$	$W(k)=(k+1)(k+2)\ldots(k+r)U(k+r)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$
6	$w(x)=u(x)v(x)$	$W(k)=U(k)\otimes V(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$
7	$w(x)=u(x)v(x)s(x)$	$W(k)=U(k)\otimes V(k)\otimes S(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r+t)$
8	$w(x)=u(x)\ \frac{d^2}{dx^2}v(x)=u(x)v''(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)(k-r+2)U(r)V(k-r+2)$
9	$w(x)=u'(x)v'(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$
10	$w(x)=u(x)v(x)\frac{d^2}{dx^2}s(x)$	$W(k)=U(k)\otimes V(k)\otimes(k+1)(k+2)S(k+2)$
11	$w(x)=x^m$	$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1\ , & k=m\\ 0\ , & aksi\ halde\end{cases}$
12	$w(x)=a,\quad a\in R$	$W(k)=a\delta(k)$
13	$w(x)=ax,\quad a\in R$	$W(k)=a\delta(k-1)$
14	$w(x)=ax^2,\quad a\in R$	$W(k)=a\delta(k-2)$

15	$w(x)=ax^3+bx^2+cx, \quad a,b,c\in R$	$W(k)=a\delta(k-3)+b\delta(k-2)+c\delta(k)$
16	$w(x)=(1+x)^m$	$W(k)=\begin{cases}\dfrac{m(m-1)(m-2)...(m-k+1)}{k!}, & m\neq k \ ve \ m>k\\ 1, & m=k\end{cases}$
17	$w(x)=sin(ax+b)$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}sin\left(\dfrac{\pi}{2}k+b)\right)$
18	$w(x)=cos(ax+b)$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}cos\left(\dfrac{\pi}{2}k+b)\right)$
19	$w(x)=\alpha^{ax}$	$W(k)=\dfrac{a^k(\ln\alpha)^k}{k!}$
20	$w(x)=e^{ax}$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}$
21	$w(x)=e^{ax+b}$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}e^b$
22	$w(x)=ln(ax+b)\ , \quad a>0,\ b>1$	$W(k)=\dfrac{(-1)^{k+1}a^kb^{-k}}{k}, \quad k>0$
23	$w(x)=sinh(ax+b)$	$W(k)=\begin{cases}\dfrac{a^k}{k!}e^b, & k \ tek \ ise\\ 0, & k \ çift \ ise\end{cases}$
24	$w(x)=cosh(ax+b)$	$W(k)=\begin{cases}0, & k \ tek \ ise\\ \dfrac{a^k}{k!}e^b, & k \ çift \ ise\end{cases}$
25	$w(x)=\int_{x_0}^{x}u(t)dt$	$W(k)=\dfrac{U(k-1)}{k}=\dfrac{(k-1)!}{k!}U(k-1)$
26	$w(x)=v(x)\int_{x_0}^{x}u(t)dt$	$W(k)=V(k)\otimes\dfrac{(k-1)!}{k!}U(k-1)=\sum_{r=0}^{k}V(r)\dfrac{U(k-r-1)}{k-r}$
27	$w(x)=\int_{x_0}^{x}u(t)v(t)dt$	$W(k)=\dfrac{(k-1)!}{k!}(\,U(k-1)\otimes V(k-1)\,)$

28	$w(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1} u(t)dt$	$W(k)=\frac{(k-2)!}{k!}U(k-2)$
29	$w(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_{n-1}}\ldots\int_{x_0}^{x_2}\int_{x_0}^{x_1} u(t)dt$	$W(k)=\frac{(k-n)!}{k!}U(k-n)$
30	$w(x,y)$	$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial h^h}w(x,y)\right]_{(0,0)}$
31	$w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$	$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$
32	$w(x,y)=c\,u(x,y)\ (c\in R)$	$W(k,h)=c\,U(k,h)\ (c\in R)$
33	$w(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$	$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)=\frac{(k+1)!}{k!}U(k+1,h)$
34	$w(x,y)=\frac{\partial^r}{\partial x^r}u(x,y)$	$W(k,h)=(k+1)(k+2)\ldots(k+r)U(k+r,h)=\frac{(k+r)!}{k!}U(k+r,h)$
35	$w(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$	$W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)=\frac{(h+1)!}{h!}U(k,h+1)$
36	$w(x,y)=\frac{\partial^s}{\partial y^s}u(x,y)$	$W(k,h)=(h+1)(h+2)\ldots(h+s)U(k,h+s)=\frac{(h+s)!}{h!}U(k,h+s)$
37	$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$	$W(k)=U(k,h)\otimes V(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)U(k-r,s)$
38	$w(x,y)=x^m y^n$	$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m \text{ ve } h=n \text{ ise}\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$
39	$w(x,y)=axy^2,\quad a\in R$	$W(k,h)=a\delta(k-1,h-2)$
40	$w(x,y)=ax^5y^7,\quad a\in R$	$W(k,h)=a\delta(k-5,h-7)$
41	$w(x,y)=axy+bxy^6+cy^5,\quad a,b,c\in R$	$W(k,h)=a\delta(k-1,h-1)+b\delta(k-1,h-6)+c\delta(k,h-5)$
42	$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)s(x)$	$W(k)=(U(k,h)\otimes V(k,h))\otimes S(k,h)$

43	$w(x,y)=u(x,y)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\ v(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+2)(k-r+1)\,U(r,h\text{-}s)V(k\text{-}r\text{+}2,s)$
44	$w(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\ u(x,y)\ \dfrac{\partial}{\partial x}v(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)\ U(r\text{+}1,h\text{-}s)V(k\text{-}r\text{+}1,s)$
45	$w(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\ u(x,y)\ \dfrac{\partial}{\partial y}v(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(s+1)(h-s+1)\ U(r,h\text{-}s\text{+}1)V(k\text{-}r,s\text{+}1)$
46	$w(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\ u(x,y)\ \dfrac{\partial}{\partial y}v(x,y)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)\ U(k\text{-}r\text{+}1,s)V(r,h\text{-}s\text{+}1)$
47	$w(x,y)=e^{ax+by+c}$	$W(k,h)=\dfrac{a^k}{k!}\ \dfrac{b^h}{h!}\,e^c$
48	$w(x,y)=\alpha^{\,ax+by+c}$	$W(k,h)=\dfrac{a^k}{k!}\ \dfrac{b^h}{h!}\,ln(\alpha)^{\,k+h}$
49	$w(x,y)=sin(ax+by+c)$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}\ \dfrac{b^h}{h!}\ sin\left(\dfrac{\pi}{2}(k+h)+c\right)$
50	$w(x,y)=cos(ax+by+c)$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}\ \dfrac{b^h}{h!}\ cos\left(\dfrac{\pi}{2}(k+h)+c\right)$
51	$w(x)=sinh(ax+by+c)$	$W(k)=\begin{cases}\dfrac{a^k}{k!}\dfrac{b^h}{h!}e^c & ,\ k\ \ tek\ \ ise\\ 0 & ,\ k\ çift\ \ ise\end{cases}$
52	$w(x)=cosh(ax+by+c)$	$W(k)=\begin{cases}0 & ,\ k\ \ tek\ \ ise\\ \dfrac{a^k}{k!}\dfrac{b^h}{h!}e^c & ,\ k\ çift\ \ ise\end{cases}$
53	$w(x,y,t)$	$W(k,h,m)=\dfrac{1}{k!h!m!}\left[\dfrac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k\partial y^h\partial t^m}w(x,y,t)\right]_{(0,0,0)}$
54	$w(x,y,t)=u(x,y,t)\pm v(x,y,t)$	$W(k,h,m)=U(k,h,m)\pm V(k,h,m)$
55	$w(x,y,t)=c\ u(x,y,t),\ \ c\in R$	$W(k,h,m)=c\ U(k,h,m)$
56	$w(x,y,t)=\dfrac{\partial}{\partial x}\ u(x,y,t)$	$W(k,h,m)=(k\text{+}1)U(k\text{+}1,h,m)=\dfrac{(k+1)!}{k!}\ U(k\text{+}1,h,m)$
57	$w(x,y,t)=\dfrac{\partial}{\partial y}\ u(x,y,t)$	$W(k,h,m)=(h\text{+}1)U(k,h\text{+}1,m)=\dfrac{(h+1)!}{h!}\ U(k,h\text{+}1,m)$

58	$w(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\ u(x,y,t)$	$W(k,h,m)=(m+1)U(k,h,m+1)=\frac{(m+1)!}{m!}\ U(k,h,m+1)$
59	$w(x,y,t)=\frac{\partial^{r+s+p}}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}\ u(x,y,t)$	$W(k,h,m=\frac{(k+r)!}{k!}\frac{(h+s)!}{h!}\frac{(m+p)!}{m!}\ U(k+r,h+s,m+p)$
60	$w(x,y)=u(x,y,t)v(x,y,t)$	$W(k,h,m)= U(k,h,m)\ \otimes V(k,h,m)$ $W(k,h,m)= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}\ U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$
61	$w(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}\ u(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}\ v(x,y,t)$	$W(k,h,m)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}\ (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s,p)V(r,s+1,m-p)$
62	$w(x_1,x_2,...,x_n)$	$W(k_1,k_2,...,k_n)=\frac{1}{k_1!k_2!..k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}w(x_1,x_2,...,x_n)\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}}$
63	$w(x_1,x_2,...,x_n)= u(x_1,x_2,...,x_n)\pm v(x_1,x_2,...,x_n)$	$W(k_1,k_2,...,k_n)= U(k_1,k_2,...,k_n)\pm V(k_1,k_2,...,k_n)$
64	$w(x_1,x_2,...,x_n)=c\ u(x_1,x_2,...,x_n), c\in R$	$W(k_1,k_2,...,k_n)= c\ U(k_1,k_2,...,k_n)$
65	*Sönümsüz Basit harmonik hareketin diferansiyel denklemi* $y''+ w_0^2y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)- w_0^2Y(k)=0$
66	*Sönümlü Basit harmonik hareketin diferansiyel denklemi* $y''+ \beta y' + w_0^2y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2) +\beta(k+1)Y(k+1) - w_0^2Y(k)=0$

67	*Zorlanmış Sönümlü Basit harmonik hareketin diferansiyel denklem* $y''+\beta y'+w_0^2 y=A\cos(wt+b)$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)+\beta(k+1)Y(k+1)-w_0^2 Y(k)=A\dfrac{w^k}{k!}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k+b\right)$
68	*Abel diferansiyel denklem* $y''+p(x)y'+q(x)y=0$	*p(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu P(k)* *q(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu Q(k)* $(k+1)(k+2)Y(k+2)+P(k)\otimes(k+1)Y(k+)+Q(k)\otimes Y(k)=0$
69	*Airy diferansiyel denklem* $y''\pm k^2xy=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)\pm k^2\delta(k-1)\otimes Y(k)$
70	*Bernoulli diferansiyel denklem* $y'+p(x)y=q(x)y^n$	$(k+1)Y(k+1)+P(k)\otimes Y(k)=Q(k)\otimes\underbrace{Y(k)\otimes Y(k)\otimes\ldots\otimes Y(k)}_{n\ \text{tane}}$
71	*Bessel diferansiyel denklem* $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-n^2)y=0$	$\delta(k-2)\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)+\delta(k-1)\otimes(k+1)Y(k+1)+(\lambda^2\delta(k-2)-n^2\delta(k))\otimes Y(k)=0$
72	*Küresel Bessel diferansiyel denklemi* $r^2R''+2rR'+[l^2r^2-n(n+1)]R=0$, $R'=\dfrac{dR}{dr}$	$\delta(k-2)\otimes(k+1)(k+2)R(k+2)+2\delta(k-1)\otimes(k+1)R(k+1)+[l^2\delta(k-2)-n(n+1)\delta(k)]\otimes R(k)=0$
73	*Binomial diferansiyel denklem* $(y')^m=f(x,y)$	*f(x,y) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu F(k)* $\underbrace{(k+1)Y(k+1)\otimes\ldots\otimes(k+1)Y(k+1)}_{m\ \text{tane}}=F(k)$,
74	*Blasius diferansiyel denklem* $2y'''+yy''=0$	$2(k+1)(k+2)(k+3)Y(k+3)-Y(k)\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)=0$
75	*Briot- Bouquet diferansiyel denklem* $x^my'=f(x,y)$	$\delta(k-m)\otimes(k+1)Y(k+1)=F(k)$

76	*Brusselator diferansiyel denklem sistemi* $u' = A + u^2 v - (B+1)u$ $v' = Bu - u^2 v$	*u(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu U(k)* *v(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu V(k)* $(k+1)U(k+1) = A\delta(k) + U(k) \otimes U(k) \otimes V(k) - (B+1)U(k)$ $(k+1)V(k+1) = BU(k) - U(k) \otimes U(k) \otimes V(k)$
77	*So- Called Tam Brusselator diferansiyel denklem sistemi* $u' = 1 + u^2 v - (w+1)u$ $v' = uw - u^2 v$ $w' = -uw + \alpha$	*u(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu U(k)* *v(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu V(k)* *w(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu W(k)* $(k+1)U(k+1) = \delta(k) + U(k) \otimes U(k) \otimes V(k) - (W(k) + \delta(k)) \otimes U(k)$ $(k+1)V(k+1) = U(k) \otimes W(k) - U(k) \otimes U(k) \otimes V(k)$ $(k+1)W(k+1) = -U(k) \otimes W(k) + \alpha\delta(k)$
78	*Chebyshev diferansiyel denklem* $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$	$(\delta(k) - \delta(k-2)) \otimes (k+1)(k+2)Y(k+2) - \delta(k-1) \otimes (k+1)Y(k+1) +$ $\alpha^2 Y(k) = 0$
79	*Clairaut's diferansiyel denklem* $y = xy' + f(y')$	*f(y') ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu F(k)* $Y(k) = \delta(k-1) \otimes (k+1)Y(k+1) + F(k)$
80	*Confluent hipergeometrik diferansiyel denklem* $xy'' + (c-x)y' - ay = 0$	$\delta(k) \otimes (k+1)(k+2)Y(k+2) + (c\delta(k) - \delta(k-1)) \otimes (k+1)Y(k+1)$ $-aY(k) = 0$
81	*D'Alambert diferansiyel denklem* $y = xf(y') + g(y')$	*f(y') ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu F(k),* *g(y') ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu G(k)* $Y(k) = \delta(k-1) \otimes F(k) + G(k)$
82	*Duffing diferansiyel denklem* $y'' + w_0^2 y + \beta y^3 = 0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2) + w_0^2 Y(k) + \beta(Y(k) \otimes Y(k) \otimes Y(k)) = 0$
83	*Emden diferansiyel denklem* $(x^2 y')' + x^2 y^n = 0$	$\delta(k-2) \otimes (k+1)Y(k+1) = F(k)$ *olmak üzere* $(k+1)F(k+1) + \delta(k-2) \otimes \underbrace{Y(k) \otimes \ldots \otimes Y(k)}_{n\ \text{tane}}$

84	*Modifield Emden diferansiyel denklem* $y''+p(x)y'+x^2y^n=0$	*p(x) e karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu P(k)* $(k+1)(k+2)Y(k+2)+P(k)(k+1)Y(k+1)$ $+\delta(k-2)\otimes \underbrace{Y(k)\otimes\ldots\otimes Y(k)}_{n\ \mathrm{tane}}=0$
85	*Emden – Fowler diferansiyel denklem* $(x^p y')'\pm x^{\sigma}y^n=0$	$\delta(k-p)\otimes(k+1)Y(k+1)=F(k)$ *olmak üzere* $(k+1)F(k+1)\pm\delta(k-\sigma)\otimes \underbrace{Y(k)\otimes\ldots\otimes Y(k)}_{n\ \mathrm{tane}}$
86	*Erfc diferansiyel denklem* $y''+2xy'+2ny=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)+2\delta(k-1)\otimes(k+1)Y(k+1)+2nY(k)=0$
87	*Euler diferansiyel denklem* $x^2y''+axy'+by=s(x)$	*s(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu S(k)* $\delta(k-2)\otimes(k+2)(k+1)Y(k+2)+a\delta(k-1)(k+1)Y(k+1)+bY(k)=S(k)$
88	*Falkner - Skan diferansiyel denklem* $y'''+\alpha y y''+\beta(1-y^2)=0$	$\frac{(k+3)!}{k!}Y(k+3)+\alpha Y(k)\otimes(k+1)Y(k+1)$ $+\beta(\delta(k)-Y(k)\otimes Y(k))=0$
89	*Gerenbauer diferansiyel denklem* $(1-x^2)y''+2(\mu+1)xy'$ $+(v-\mu)(v+\mu+1)y=0$	$(\delta(k)-\delta(k-2))\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)+$ $2(\mu+1)\delta(k-1)\otimes(k+1)Y(k+1)+(v-\mu)(v+\mu+1)Y(k)=0$
90	*Hill - Whittaker diferansiyel denklem* $y''+[A+B\cos(2x)+C\cos(4x)]y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)$ $+[A\delta(k)+B\frac{2^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)+C\frac{4^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)]\otimes Y(k)=0$
91	*Halm's diferansiyel denklem* $(1+x^2)^2+y''+\lambda y=0$	$(\delta(k)+2\delta(k-2+\delta(k-4))+(k+1)(k+2)Y(k+2)+\lambda Y(k)=0$
92	*Hermite diferansiyel denklem* $y''-2xy'+\lambda y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)-2\delta(k-1)\otimes(k+1)Y(k+1)+\lambda Y(k)=0$
93	*Hipergeometrik diferansiyel denklem* $x(x-1)y''+[(1+\alpha+\beta)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0$	$\delta(k-1)\otimes(\delta(k-1)-\delta(k))\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)=F(k)$ *olmak üzere* $F(k)+[(1+\alpha+\beta)\delta(k-1)-\gamma]\otimes(k+1)Y(k+1)+\alpha\beta Y(k)=0$

94	*Jacobi diferansiyel denklem* $(1+x^2)y''+[\beta-\alpha-(\beta+\alpha+2)x]y'$ $+n(n+\beta+\alpha+1)y=0$	$(\delta(k)+\delta(k-2))\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)+$ $[(\beta-\alpha)\delta(k)-(\beta+\alpha+2)\delta(k-1)\otimes(k+1)Y(k+1)$ $+n(n+\beta+\alpha+1)Y(k)=0$
95	*Lagerstrom diferansiyel denklem* $xy''+Ay'+\varepsilon y\,y'=0$	$\delta(k-1)\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)+A(k+1)Y(k+1)$ $+\varepsilon Y(k)\otimes(k+1)Y(k+1)=0$
96	*Laguerre diferansiyel denklem* $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$	$\delta(k-1)\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)+$ $(\delta(k)-\delta(k-1))\otimes(k+1)Y(k+1)+\lambda Y(k)=0$
97	*Lane – Emden diferansiyel denklem* $\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)+\xi^2\theta^n=0$	$\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $F(k)$ *olsun)* $F(k)=\delta(k-2)\otimes(k+1)\theta(k)$ $(k+1)F(k+1)+\delta(k-2)\otimes\underbrace{\theta(k)\otimes\ldots\otimes\theta(k)}_{n\ \text{tane}}=0$
98	*Legendre diferansiyel denklem* $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$	$(\delta(k)-\delta(k-2))\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)$ $-2\delta(k-1)\otimes(k+1)Y(k+1)+\alpha(\alpha+1)Y(k)=0$
99	*Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem* $a_0y^{(n)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=p(x)$	$p(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $P(k)$ $a_0(k+1)(k+2)\ldots(k+n)Y(k+n)+a_1(k+1)\ldots(k+n-1)Y(k+n-1)+$ $\ldots+a_{n-1}(k+1)Y(k+1)+a_nY(k)=P(k)$
100	*Liouville diferansiyel denklem* $y''+p(y)y'^2+f(x)y=0$	$p(y)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $P(k)$ $f(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $F(k)$ $(k+1)(k+2)Y(k+2)+P(k)\otimes(k+1)Y(k+1)\otimes(k+1)Y(k+1)$ $+F(k)\otimes Y(k)=0$
101	*Lommel diferansiyel denklem* $x^2y''+xy'-(x^2+v^2)y=k\,x^{\mu+1}$	$\delta(k-2)\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)+\delta(k-1)\otimes(k+1)Y(k+1)-(\delta(k-2)-$ $v^2\delta(k))Y(k)=k\delta(k-(\mu+1))$

102	*Lorenz diferansiyel denklem sistemi* $x'=\sigma(y-x)$ $y'=r\,x-y+x\,z'$ $z'=x\,y-b\,z$	*x(t) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu X(k)* *y(t) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu Y(k)* *z(t) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu Z(k)* $(k+1)X(k+1)=\sigma(Y(k)-X(k))$ $(k+1)Y(k+1)=r\,X(k)-Y(k)+X(k)\otimes(k+1)Z(k+1)$ $(k+1)Z(k+1)=X(k)\otimes Y(k)-b\,Z(k)$
103	*Lotka - Volterra diferansiyel denklem sistemi* $x'=A\,x-B\,x\,y$ $y'=-C\,y+D\,x\,y$	*x(t) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu X(k)* *y(t) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu Y(k)* $(k+1)X(k+1)=A\,X(k)-B\,X(k)\otimes Y(k)$ $(k+1)Y(k+1)=-C\,Y(k)+D\,X(k)\otimes Y(k)$
104	*Löwnerin diferansiyel denklemi* $y'(1-v(x)y)=-y(1+v(x)y)$	$(\delta(k)-V(k)\otimes Y(k))\otimes(k+1)Y(k+1)$ $=-(\delta(k)+V(k)\otimes Y(k))\otimes Y(k)$
105	*Mathieu diferansiyel denklem* $y''+[a-2q\cos(2x)]y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)+\left[a\delta(k)-2q\frac{2^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right]\otimes Y(k)=0$
106	*Onsager diferansiyel denklem* $\frac{d^3}{dx^3}\left[e^x\frac{d^2}{dx^2}\left(e^x\frac{dy}{dx}\right)\right]=f(x)$	*f(x) ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu F(k)* $e^x y'=g(x),\ G(k)=\frac{1}{k!}\otimes(k+1)Y(k+1)$ $e^x g''(x)=h(x),\ H(k)=\frac{1}{k!}\otimes(k+1)(k+2)G(k+2)$ $\frac{(k+3)!}{k!}H(k+3)=F(k)$
107	*Parabolic diferansiyel denklem* $y''-(ax^2+bx+c)y'=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)$ $-(a\delta(k-2)+b\delta(k-1)+c\delta(k))\otimes(k+1)Y(k+1)=0$
108	*Rayleigh diferansiyel denklem* $y''-\mu(1-\frac{1}{3}y'^2)y'+y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)-$ $\mu(\delta(k)-\frac{1}{3}(k+1)Y(k+1)\otimes(k+1)Y(k+1))\otimes(k+1)Y(k+1)+Y(k)=0$

109	*Riccati diferansiyel denklem* $y'=q_0(x)+q_1(x)y+q_2(x)y^2$	$q_0(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $Q_0(k)$ $q_1(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $Q_1(k)$ $q_2(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $Q_2(k)$ $(k+1)Y(k+1)=Q_0(k)+Q_1(k)\otimes Y(k)+Q_2(k)\otimes Y(k)\otimes Y(k)$
110	*Shapenin diferansiyel denklemi* $xy''+y'+(x+a)y=0$	$\delta(k-1)\otimes(k+1)(k+2)Y(k+2)+(k+1)Y(k+1)+$ $(\delta(k-1)+a\delta(k))\otimes Y(k)=0$
111	*Sturm-Lioville diferansiyel denklem* $\frac{d}{dx}[p(x)y']+[\lambda w(x)-q(x)]y=0$	$q(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $Q(k)$ $p(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $P(k)$ $w(x)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $W(k)$ $P(k)\otimes(k+1)Y(k+1)=F(k)$ *olsun* $(k+1)F(k+1)+[\lambda W(k)-Q(k)]\otimes Y(k)=0$
112	*Thomas diferansiyel denklem* $x(y'')^2=y^3$	$\delta(k-1)\otimes\frac{(k+2)!}{k!}Y(k+2)\otimes\frac{(k+2)!}{k!}Y(k+2)=Y(k)\otimes Y(k)\otimes Y(k)$
113	*Titchmorsh diferansiyel denklem* $y''+(\lambda-x^{2n})y=0$	$\frac{(k+2)!}{k!}Y(k+2)+(\lambda\delta(k)-\delta(k-2n))\otimes Y(k)=0$
114	*Titreşim denklemi* $\frac{d^2x}{dt^2}+bx=0$	$x(t)$ *ye karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu* $X(k)$ $(k+1)(k+2)X(k+2)+bX(k)=0$
115	*Van der Pol diferansiyel denklem* $y''-\mu(1-y^2)y'+y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)-$ $\mu(\delta(k)-Y(k)\otimes Y(k))\otimes(k+1)Y(k+1)+Y(k)=0$
116	*Weber diferansiyel denklem* $y''+(n+\frac{1}{2}-x^2)y=0$	$(k+1)(k+2)Y(k+2)+[(n+\frac{1}{2})\delta(k)-\delta(k-2)]\otimes Y(k)=0$

117	*Benney K T D D* $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)+$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+\in\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)+$ $\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t)=0$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(h+1)U(k,h+1)+U(k,h)\otimes(k+1)U(k+1,h)$ $+\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)+\frac{(k+3)!}{k!}U(k+3,h)$ $+\frac{(k+4)!}{k!}U(k+3,h)=0$
118	*Benjamin-Bona-Mahony K T D D* $u_t+u_x+uu_x-u_{xxt}=0$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(h+1)U(k,h+1)+(k+1)U(k+1,h)+U(k,h)\otimes(k+1)U(k+1,h)$ $-(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1)=0$
119	*Biharmonic K T D D* $\nabla^4u=0$ $\nabla^2\nabla^2u=0$ *a)İki boyutlu* $\frac{\partial^4}{\partial x^4}u+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}u$	*a) u(x,y) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $\frac{(k+4)!}{k!}U(k+4,h)+\frac{(h+4)!}{h!}U(k,h+4)+$ $2\frac{(k+2)!}{k!}\frac{(h+2)!}{h!}U(k+2,h+2)=0$
120	*b)Üç boyutlu* $\frac{\partial^4}{\partial x^4}u+\frac{\partial^4}{\partial y^4}u+\frac{\partial^4}{\partial z^4}u+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u$ $2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}=0$	*b) u(x,y,z) ye karşılık gelen dif dön U(k,h,m) olmak üzere* $\frac{(k+4)!}{k!}U(k+4,h,m)+\frac{(h+4)!}{h!}U(k,h+4,m)+$ $\frac{(m+4)!}{m!}U(k,h,m+4)+2\frac{(k+2)!}{k!}\frac{(h+2)!}{h!}U(k+2,h+2,m)+$ $2\frac{(h+2)!}{h!}\frac{(m+2)!}{m!}U(k,h+2,m+2)+$ $2\frac{(k+2)!}{k!}\frac{(m+2)!}{m!}U(k+2,h,m+2)=0$

121	Born - Infeld K T D D $(1-u_t^2)u_{xx}+2u_xu_tu_{xt}-(1+u_x^2)u_{tt}=0$	$u(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $(\delta(k,h)-(h+1)U(k,h+1)\otimes(h+1)U(k,h+1))\otimes\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)$ $+2(k+1)U(k+1,h)\otimes(h+1)U(k,h+1)\otimes(k+1)(h+1)U(k+1,h+1)$ $-(\delta(k,h)-(k+1)U(k+1,h)\otimes(k+1)U(k+1,h))\otimes\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)$
122	Boussinesq K T D D $u_{tt}+\alpha^2u_{xx}=\beta^2u_{xxtt}$	$u(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)+\alpha^2\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)=$ $\beta^2\frac{(k+2)!}{k!}\frac{(h+2)!}{h!}U(k+2,h+2)$
123	Nonlineer Boussinesq K T D D $u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}+3(u^2)_{xx}=0$	$u(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $v=u^2(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $V(k,h)=U(k,h)\otimes U(k,h)$ $\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)-\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)+3\frac{(k+2)!}{k!}V(k+2,h)=0$
124	Burgers K T D D $u_t+\varepsilon u\,u_x=\nu\,u_{xx}$	$u(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $(h+1)U(k,h+1)+\varepsilon U(k,h)\otimes(k+1)U(k+1,h)$ $=\nu\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)$
125	Caundarey- Dodd- Gibbon K T D D $u_t+u_{xxxxx}+30uu_{xxx}+30u_xu_{xx}$ $+180u^2u_x=0$	$u(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $(h+1)U(k,h+1)+\frac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)+$ $30U(k,h)\otimes\frac{(k+3)!}{k!}U(k+3,h)+30(k+1)U(k+1,h)\otimes$ $\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)+180U(k,h)\otimes U(k,h)\otimes(k+1)U(k+1,h)=0$
126	Carleman K T D D $u_t+u_x=v^2-u^2$ $v_t-v_x=u^2-v^2$	$u(x,y)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $v(x,y)$ ye karşılık gelen dif dön $V(k,h)$ olmak üzere $(h+1)U(k,h+1)+(k+1)U(k+1,h)=V(k,h)\otimes V(k,h)-U(k,h)\otimes U(k,h)$ $(h+1)V(k,h+1)+(k+1)V(k+1,h)=U(k,h)\otimes U(k,h)-V(k,h)\otimes V(k,h)$

127	*Chaplygin K T D D* $\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)u_{xx}+y^2u_{yy}+y\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)u_y=$	*u(x,y) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(\delta(k,h)-\frac{1}{c^2}\delta(k,h-2))\otimes\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)$ $\delta(k,h-2)\otimes\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)+$ $\delta(k,h-1)\otimes(\delta(k,h)-\frac{1}{c^2}\delta(k,h-2))\otimes\frac{(h+1)!}{h!}U(k,h+1)=0$
128	*Drinfeld- Sokolov-Wilson K T D D* $u_t=3ww_x$ $w_t=2w_{xxx}+2uw_x+u_xw$	*u(x,y) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* *w(x,y) ye karşılık gelen dif dön W(k,h) olmak üzere* $(h+1)U(k,h+1)=3W(k,h)\otimes(k+1)W(k+1,h)$ $(h+1)W(k,h+1)=2\frac{(k+3)!}{k!}W(k+3,h)+2U(k,h)\otimes(k+1)W(k+1,h)$ $+(k+1)U(k+1,h)\otimes W(k,h)$
129	*Euler-Darboux K T D D* $(x-y)u_{xy}+\alpha u_x+\beta u_y=0$	*u(x,y) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(\delta(k-1,h)-\delta(k,h-1))\otimes(k+1)(h+1)U(k+1,h+1)+$ $\alpha(k+1)U(k+1,h)+\beta(h+1)U(k,h+1)=0$
130	*Fisher K T D D* $u_t=uu_{xx}+u-u^2$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(h+1)U(k,h+1)=U(k,h)\otimes\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)+U(k,h)$ $-U(k,h)\otimes U(k,h)$
131	*Isı iletim denklemi* $\frac{\partial}{\partial t}u=K\nabla^2u$ *a) Tek boyutlu* $\frac{\partial}{\partial t}u=K\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$	*a) u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(h+1)U(k,h+1)=K\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)$
132	*b) İki boyutlu* $\frac{\partial}{\partial t}u=K(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})u$	*b) u(x,y,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h,m) olmak üzere* $(m+1)U(k,h,m)=K\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h,m)$ $+K\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2,m)$

133	c) Üç boyutlu $\frac{\partial}{\partial t} u = K(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\, u$	c) u(x,y,z,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h,m,n) olmak üzere $(n+1)U(k,h,m,n)=K\frac{(k+2)!}{k!}\,U(k+2,h,m,n)+$ $K\frac{(h+2)!}{h!}\,U(k,h+2,m,n)\; K\frac{(m+2)!}{m!}\,U(k,h,m+2,n)$
134	Gardner K T D D $w_{xxx} + w_t - 6(w_t + \varepsilon^2 w^2)w_x = 0$	w(x,t) ye karşılık gelen dif dön W(k,h) olmak üzere $\frac{(k+3)!}{k!}\,W(k+3,h)+(h+1)W(k,h+1)$ $-6(\,(h+1)W(k,h+1)+\,+\varepsilon^2 W(k,h)\otimes W(k,h)\,)\otimes(k+1)W(k+1,h)=0$
135	Hary Dym K T D D $u_t = u_{xxx}u^3$	u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere $(h+1)U(k,h+1)=\frac{(k+3)!}{k!}\,U(k+3,h)\otimes U(k,h)\otimes U(k,h)\otimes U(k,h)$
136	Helmholtz K T D D $\nabla^2 u + K^2 u = 0$	u(x,y) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere $\frac{(k+2)!}{k!}\,U(k+2,h)+\frac{(h+2)!}{h!}\,U(k,h+2)+K^2 U(k,h)=0$
137	Klein-Gordon K T D D $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \mu^2 u$	u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere $\frac{1}{c^2}\,\frac{(h+2)!}{h!}\,U(k,h+2) = \frac{(k+2)!}{k!}\,U(k+2,h) - \mu^2 U(k,h)$
138	Quasilineer Klein-Gordon K T D D $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \gamma u = \beta u^3$	u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere $\frac{(h+2)!}{h!}\,U(k,h+2) - \alpha^2\frac{(k+2)!}{k!}\,U(k+2,h)+\gamma U(k,h)$ $=\beta\,(\,U(k,h)\otimes U(k,h)\otimes U(k,h)\,)$
139	Korteweg-de Vries-Burger K T D D $u_t + 2\,u\,u_x - \alpha\,u_{xx} + \mu\,u_{xxx} = 0$	u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere $(h+1)U(k,h+1)+2U(k,h)\otimes(k+1)U(k+1,h)$ $-\alpha\frac{(k+2)!}{k!}\,U(k+2,h)+\mu\frac{(k+3)!}{k!}\,U(k+3,h)$
140	Korteweg-de Vries (KdV) K T D D $u_t + u_{xxx} - 6\,u\,u_x = 0$	u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere $(h+1)U(k,h+1)+\frac{(k+3)!}{k!}\,U(k+3,h)$ $-6U(k,h)\otimes(k+1)U(k+1,h)=0$

141	*Genel KdV K T D D* $u_t + u_{xxx} \pm 6\, u^2\, u_x = 0$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(h+1)U(k,h+1)+ \dfrac{(k+3)!}{k!}U(k+3,h)$ $\pm 6(\, U(k,h) \otimes U(k,h)\,) \otimes (k+1)U(k+1,h)=0$
142	*Phi- Four K T D D* $u_{tt}-u_{xx}-u+u^3=0$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $\dfrac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)- \dfrac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)-U(k,h)$ $+U(k,h) \otimes U(k,h) \otimes U(k,h)=0$
143	*Plateu's K T D D* $(1+u_x^2)\, u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_y^2)\, u_{yy}=0$	*u(x,y) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(\, \delta(k,h)+(k+1)U(k+1,h) \otimes (k+1)U(k+1,h)\,) \otimes \dfrac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)$ $-2(k+1)U(k+1,h) \otimes (h+1)U(k,h+1) \otimes (k+1)(h+1)U(k+1,h+1)$ $(\, \delta(k,h)+(h+1)U(k,h+1) \otimes (h+1)U(k,h+1)\,) \otimes \dfrac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)=0$
144	*Rayleigh wave K T D D* $u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon\, [u_t - u_t^3]$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $\dfrac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2) - \dfrac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)= \varepsilon\,[\, (h+1)U(k,h+1)$ $-(h+1)U(k,h+1) \otimes (h+1)U(k,h+1) \otimes (h+1)U(k,h+1)\,]$
145	*Silindirik KdV K T D D* $2t(\, u_t + u_{xxx} - 6\, u\, u_x)+ u = 0$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $\delta(k,h-1) \otimes [\, (h+1)U(k,h+1)+ \dfrac{(k+3)!}{k!}U(k+3,h)$ $- 6U(k,h) \otimes (k+1)U(k+1,h)\,]+U(k,h)=0$
146	*So-Called Genel KdV K T D D* $u_t+ u\, u_x- u_{xxxxx} = 0$	*u(x,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $(h+1)U(k,h+1)+ U(k,h) \otimes (k+1)U(k+1,h) -$ $\dfrac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)=0$
147	*Laplace K T D D* $\nabla^2 u = 0$ *a)İki boyutlu* $(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2})\, u=0$	*a) u(x,y) ye karşılık gelen dif dön U(k,h) olmak üzere* $\dfrac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)+ \dfrac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)=0$

148	b) Üç boyutlu $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=0$	b) $u(x,y,z)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h,m)$ olmak üzere $\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h,m)+\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2,m)+\frac{(m+2)!}{m!}U(k,h,m+2)=0$
149	Lin- Tsien K T D D $2u_{tx}+u_x u_{xx}-u_{yy}=0$	$u(x,y,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h,m)$ olmak üzere $2(m+1)(k+1)U(k+1,h,m+1)+(k+1)U(k+1,h,m)\otimes\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h,m)-\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2,m)=0$
150	Telegraph K T D D $u_{xx}=au_{tt}+bu_t+cu$	$u(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)=a\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)+b(h+1)U(k,h+1)+cU(k,h)$
151	Thomas K T D D $u_{xy}+\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u_x u_y=0$	$u(x,y)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $(k+1)(h+1)U(k+1,h+1)+\alpha(k+1)U(k+1,h)$ $\beta(h+1)U(k,h+1)+\gamma(k+1)U(k+1,h)\otimes(h+1)U(k,h+1)=0$
152	Tricomi K T D D $u_{yy}=yu_{xx}$	$u(x,y)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)=\delta(k,h-1)\otimes\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)$
153	Dalga Denklemi $\nabla^2 u=\frac{1}{u}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u$ a) Tek boyutlu $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u=\frac{1}{u}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u$	a) $u(x,t)$ ye karşılık gelen dif dön $U(k,h)$ olmak üzere $U(k,h)\otimes\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h)=\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2)$

154	*b) İki boyutlu* $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=\frac{1}{u}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u$	*b) u(x,y,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h,m) olmak üzere* $U(k,h,m)\otimes[\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h,m)+\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2,m)]$ $=\frac{(m+2)!}{m!}U(k,h,m+2)$
155	*c) Üç boyutlu* $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=\frac{1}{u}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	*c) u(x,y,z,t) ye karşılık gelen dif dön U(k,h,m,n) olmak üzere* $U(k,h,m,n)\otimes[\frac{(k+2)!}{k!}U(k+2,h,m,n)+\frac{(h+2)!}{h!}U(k,h+2,m,n)$ $+\frac{(m+2)!}{m!}U(k,h,m+2,n)]=\frac{(n+2)!}{n!}U(k,h,m,n+2)$
156	*Lagrange K T D D* $(1+f_x^2)f_{yy}+2f_xf_yf_{xy}+(1+f_y^2)f_{xx}=0$	*f(x,y) ye karşılık gelen dif dön F(k,h) olmak üzere* $(\delta(k,h)+(k+1)F(k+1,h)\otimes(k+1)F(k+1,h))\otimes\frac{(h+2)!}{h!}F(k,h+2)$ $-2(k+1)F(k+1,h)\otimes(h+1)F(k,h+1)\otimes(k+1)(h+1)F(k+1,h+1)$ $(\delta(k,h)+(h+1)F(k,h+1)\otimes(h+1)F(k,h+1))\otimes\frac{(k+2)!}{k!}F(k+2,h)=0$

Bu tabloda aşağıdaki semboller kullanılmıştır.

K T D D: Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

$1)\ U(k)\otimes V(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$ $\qquad 2)\ U(k,h)\otimes V(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)U(k-r,s)$

$3)\ U(k,h,m)\otimes V(k,h,m)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$

$4)\ U(k)\otimes V(k)\otimes S(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r+t)$

$5)\ \delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$ $\qquad 6)\ \delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m\ ve\ h=n\ ise\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$

7. KAYNAKLAR

Abdel-Halim Hassan, I.H. 2002, Different applications for the differential transformation in the differential equations, Applied Mathematics and Computation; 129, 183-201.

Abdel-Halim Hassan, I.H. 2002, On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation, Applied Mathematics and Computation; 127, 1-22.

Abdel-Halim Hassan, I.H. 2004, Differential transformation technique for solving higher-orden initial value problems, Applied Mathematics and Computation; 154, 299-311.

Arikoglu A., Özkol, I. 2004, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differantial transform method, Applied Mathematics and Computation; (basılacak).

Ayaz, F. 2003, On the Two- dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation;143, 361-374.

Ayaz, F., Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, E. M. 2003, Isı İletim Denkleminin Dönüşüm Yöntemiyle Çözümü, 14.Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, Isparta,3-5 Eylül.

Ayaz, F. 2004. Solutions of the system of differential equations by differential transform method, Appl. Maths. Comput;147, 547-567.

Ayaz, F. 2004, Application of differential transform methods to differential-algebraic equations, Applied Mathematics and Computation;152, 649-657.

Ayaz, F., Oturanç, G., 2004, An Approximate Solution of burgers equation by Differential Transform Method, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 5-2, 15-24.

Ayaz, F. 2002, Solutions of partial differential equations by using two dimensional transform method, Third Intern., Symp. Math&Comput. Appl., September 4-6, Konya- Turkey.

Chen, C. K., Ho, S. H., 1996, Application of Differential transformation to eigenvalue problems, Applied Mathematics and Computation; 79, 173-188.

Chen, C. L., Liu, Y. C., 1998, Differential transformation techniqeu for steady nonlinear heat conduction problems, Applied Mathematics and Computation; 95, 155-1164,

Chen, C. K., Ho, S. H., 1999, Solving partial diferential equations by two-dimensional differential transform method, Applied Mathematics and Computation; 106, 171-179.

Jang, M. J., Chen, C. L., 1997, Analysis of the Response of a strongly Nonlinear Damped system using a differential transformation technique, Applied Mathematics and Computation; 88, 137-151.

Jang, M. J., Chen, C. L., Liu, Y. C. 2001, Two Dimensional differantial Transform for Partial Differential Equation, Appl. Maths. Comput.,106,171-179.

Jang, M. J., Chen, C. L., Liu, Y. C. 2000, On the initial-value problems using the differential transformation method, Applied Mathematics and Computation; 115, 145-160.

Kaya, D., Yokus, A. 2002, A numerical comparison of partial solutions in the decomposition method for linear and nonlinear partial differential equations, Maths. Comput. Simul., 60 507-512.

Kurnaz, A., Oturanç, G., Kiriş, M.E. 2005, *n* dimensional differential transformation method for solving PDEs, İnternational journal of Computer Mathematics (in press).

Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation, International Journal of Computer Mathematics (in press).

Strauss, W. A., 1992, Partial differential Equations An introduction, John Willey & Sons, Singapore.

Özışık, M. N. 1980, Heat Condiction, John Willey & Sons, New York.

Wazwaz, A. M., 2001, Exact solutions to non linear diffusion equations abtained by the decomposition method, Applied Mathematics and Computation; 123, 109-122.

Zauderer, E. 1983, Partial Differential equations of applied mathematics, John Wiley&Sons, USA.

Zhou, J. K. 1986, Differential transformation and İts Aplications for Electical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan China (in Chinese).