**T.C**

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

**SIDDIKA MERT**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ORTAÖĞRETİM**
**FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**
**MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI**

**Konya, 2006**

**T.C**

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

**SIDDIKA MERT**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**ORTAÖĞRETİM**
**FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**
**MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI**

Bu tez 28 / 08 / 2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

| Prof. Dr. Eşref HATIR | Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN | Yrd. Doç. Dr. A.Selçuk KURBANLI |
|---|---|---|
| (Danışman) | (Üye) | (Üye) |

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA**


**Sıddıka MERT**

**Selçuk Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı**
**Matematik Öğretmenliği Programı**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Eşref HATIR**
**2006, 25 Sayfa**



Bu çalışma, üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, konunun uygulamalarıyla ilgili genel bilgilere değinilmiş, ikinci bölümde konu ile ilgili bilgi ve kavramlar verilmiştir. Son bölümde, fuzzy $d-$pre açık küme tanımlanarak, fuzy $d-$pre açık kümelerin özellikleri incelenip yorumlanmıştır. Ayrıca, fuzzy $d-$pre açık kümelerden faydalanarak fuzzy $d-$pre süreklilik kavramı tanımlanmış, bu süreklilik kavramı ile diğer genelleştirilmiş süreklilik çeşitleri karşılaştırılıp, yorumlanmıştır.



Anahtar kelimeler: Fuzzy küme, fuzzy $d-$pre açık (kapalı) küme, fuzzy $d-$pre süreklilik, fuzzy $d-$pre kapanış, fuzzy $d-$pre iç.

## ABSTRACT

**The Post Graduate Thesis**

**A RESEARCH ON GENERALIZED CONTINUITIES IN FUZZY TOPOLOGIC SPACES**

**Sıddıka MERT**

**Selcuk University**
**Graduate School of Natural Applied Sciences**

**Department of Secondary**
**Science And Mathematics Education**
**Mathematics Education Program**

**Supervisor: Prof. Dr. Esref HATIR**
**2006, 25 pages**

This study includes three sections. In first section, general knowledge about the subject is touched; in second section information and notions about the subject are given. In last section, by defining fuzzy $d-$pre open set, properties of fuzzy $d-$pre open sets are studied and explained. Besides, utilizing fuzzy $d-$pre open sets fuzzy $d-$pre continuity concept is defined; this continuity concept compared by other generalized continuity types, and explained.

Keywords: Fuzzy set, fuzzy $d-$pre open (closed) set, fuzzy $d-$pre continuity, fuzzy $d-$pre closure, fuzzy $d-$pre interior.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Öğretim Üyesi Prof. Dr. Eşref HATIR danışmanlığında yapılmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yaptığım çalışmalarda bana her türlü desteği veren değerli hocam Prof. Dr. Eşref HATIR'a, tezin hazırlık sürecinde ve yazımında yardımlarını esirgemeyen değerli eşime teşekkürü borç bilirim.

**İÇİNDEKİLER**

Sayfa

## SİMGELER

Tez metni içinde geçen küme isimleri ( regüler açık, pre açık, vb.) literatürdeki isimleri ile aynen kullanılmıştır.

Bu çalışmada kullanılmış, fakat tez metni içinde açıklanmamış simgeler, açıklamalarıyla birlikte aşağıda verilmiştir.

| **Simgeler** | **Açıklamaları** |
|---|---|
| $\boldsymbol{I}^{x}$ | *X* fuzzy uzayındaki fuzzy kümelerin ailesi |
| Þ | Gerektirir |
| Ü | Yeterdir |
| Û | İki yönlü gerektirme |
| $t$ | Topoloji |
| $t_{\boldsymbol{X}}$ | Fuzzy topoloji |
| $\mathbf{x}_l\ \boldsymbol{q}\ m$ | $x_l$ fuzzy noktasının μ fuzzy kümesi ile çakışığımsı olması |
| $b\ \boldsymbol{q}\ m$ | β fuzzy kümesinin μ fuzzy kümesi ile çakışığımsı olması |
| $b\ \not{\boldsymbol{q}}\ m$ | β fuzzy kümesinin μ fuzzy kümesi ile çakışığımsı olmaması |
| $\mathrm{int}\, m$ | μ fuzzy kümesinin içi |
| $\boldsymbol{cl}m$ | μ fuzzy kümesinin kapanışı |
| $m^{c}$ | μ fuzzy kümesinin tümleyeni |
| $d - \boldsymbol{cl}(m)$ | μ fuzzy kümesinin δ-kapanışı |
| $d - \mathbf{int}(m)$ | μ fuzzy kümesinin δ- içi |
| $\boldsymbol{N}\ (\boldsymbol{x}_l)$ | $x_l$ fuzzy noktasının fuzzy komşuluklar sınıfı |
| $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{q}}\ (\boldsymbol{x}_l)$ | $x_l$ fuzzy noktasının ***q*-** komşuluklar sınıfı |
| $d - \boldsymbol{O}(\boldsymbol{X})$ | Fuzzy δ- açık kümelerin ailesi |
| $d - \boldsymbol{PO}(\boldsymbol{X})$ | Fuzzy δ-pre açık kümelerin ailesi |
| $d - \boldsymbol{P}\,\mathbf{int}(m)$ | μ fuzzy kümesinin δ-pre içi |
| $d - \boldsymbol{Pcl}(m)$ | μ fuzzy kümesinin δ-pre kapanışı |
| $t_{\boldsymbol{u}}$ | ***U'*** ya bağlı fuzzy alt uzay |
| $\mathbf{int}_{\boldsymbol{u}}\, m$ | μ fuzzy kümesinin alt uzaydaki içi |
| $d - \boldsymbol{cl}_{\boldsymbol{u}} m$ | μ fuzzy kümesinin alt uzaydaki δ-kapanışı |
| $\boldsymbol{f}\vert_{U}$ | Kısıtlanmış fonksiyon |

# 1. GİRİŞ

Cantor'un 1879 yılında vermiş olduğu küme tanımı, 1965 yılında Zadeh tarafından fuzzy (belirtisiz) küme olarak genişletilmiştir.

1965 yılına kadar matematikte, incelenen konuların daha önce belirlenmiş olan kurallara, kesin olarak uyup uymadığı araştırılmıştır. Bu incelemede her zaman kesinlik aranmıştır. Araç olarak, düşünce sistemimizde iki değerli mantığı kullandığımızda, örneğin bir önerme için, daha önce belirlenen kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denilmiştir. Buna karşılık yaşadığımız dünyada birçok olaylar vardır ki, bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ayırt etmek bizi güç durumda bırakabilir. Örneğin, bir sınıftaki öğrencilerden yeşil gözlü öğrencilerin kümesinin yapılması istense, bu küme değişik kişiler tarafından değişik biçimde oluşturulacaktır. Çünkü, yeşil ile yeşil olmama arasında bir kesin değerlendirme olmadığından, yeşile benzeyen gözlü bir öğrenci birine göre yeşil gözlü sayılacak, diğerine göre yeşil gözlü sayılmayacaktır. Bu gözlemler ve çeşitli araştırmalar, iki değerli mantığa dayanan bugünkü matematiğin kesinlik göstermeyen birçok olayı, tam olarak açıklayamayacağı düşüncesini doğurmuştur. Bu durumu ilk kez, 1965 yılında Zadeh " Fuzzy Sets " adlı makalesi ile ortaya koymuş ve fuzzy (belirtisiz) küme kavramını vermiştir. Fuzzy küme kavramı, kesin olarak tanımlanmış ölçülerin olmadığı fiziksel olaylara da karşılık geldiğinden, fuzzy küme kavramı istatistik, bilgi işlem ve dil bilimi konularında da faydalı uygulamalar vermektedir.

Araştırmacılar bu yeni küme tanımına göre, soyut matematikte kümeler kavramı kullanılarak oluşturulan gelişmelere paralel olarak, fuzzy topolojik uzaylar, fuzzy regüler uzaylar, fuzzy gruplar, fuzzy vektör uzayları, fuzzy topolojik gruplar ve fuzzy ölçümler gibi konularda çalışmaktadırlar.

Ayrıca, fuzzy topoloji, string teori ve $e^{\infty}$ teori ile bağlantılı olarak kuantum parçacık fiziğinde de kullanılmaktadır [14] ve [15].

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2. 1. Fuzzy Küme, Fuzzy Nokta Ve Fuzzy Eleman Olma Kavramları

### 2. 1. 1. Tanım

$X \neq f$ ve $I = [0,1]$ kapalı aralık olsun. Tüm $a : X \rightarrow I$ fonksiyonların kümesi $I^{x}$ olmak üzere $I^{x}$' in her elamanına, $X$' in bir fuzzy kümesi denir [1].

Fuzzy kümeleri $\alpha$, $\beta$, $\mu$, ... gibi latin harflerle göstereceğiz. $\forall x \in X$ için $C_{l}(x) = l$ $(0 \leq l \leq 1)$ olmak üzere $C_{l}$ ile sabit fuzzy kümesini göstereceğiz. Bir β fuzzy kümesinin $x \in X$ noktasındaki değerini $\beta(x)$ ile göstereceğiz.

Kümeler için kullanacağımız kapsama, birleşim ve kesişim sembolleri yerine fuzzy kümeleri için sırası ile; $\leq, \vee, \wedge$ sembollerini kullanacağız.

$\forall x \in X$ için, $1 \in I$ değerini alan sabit fuzzy kümesini "1" ile $\forall x \in X$ için $O \in I$ değerini alan fuzzy kümesini de "*O*" ile göstereceğiz.

### 2. 1. 2. Tanım

*X'* in α ve β fuzzy kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a)*** $a \leq b \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $a(x) \leq b(x)$

***b)*** $a = b \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $a(x) = b(x)$

***c)*** $m = a \vee b \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $m(x) = Max\{\, a(x), b(x) \,\}$

***d)*** $d = a \wedge b \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $d(x) = Min\{\, a(x), b(x) \,\}$

***e)*** $a = 1 - b \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $a(x) = 1 - b(x)$ [1].

### 2. 1. 3. Tanım

*X*'in fuzzy kümelerinin bir ailesi $\{a_{j}\}_{j \in J}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a)*** $m = \bigvee_{j \in J} a_j \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $m(x) = \underset{j \in J}{Sup} \{ a_j(x) \}$

***b)*** $b = \bigwedge_{j \in J} a_j \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $b(x) = \inf_{j \in J} \{ a_j(x) \}$ [4].

**2. 1. 4. Tanım**

$x \in X$ ve $l \in (0,1]$ olsun. $X$ içindeki $x_l$ fuzzy noktası,

$$x_l(y) = \begin{cases} l, & y = x \quad ise \\ 0, & y \neq x \quad ise \end{cases}$$

olarak tanımlanan $X$ içindeki fuzzy kümesidir. $x_l$ fuzzy noktasının sıfırdan farklı değer aldığı, $x \in X$ noktasına $x_l$ 'ın dayanağı ve $l \in (0,1]$ sayısına da $x_l$ 'nın değeri denir [3].

**2. 1. 5. Tanım**

$m$ bir fuzzy küme ve $x_l$ bir fuzzy nokta olmak üzere, $l \leq m(x)$ ise $x_l \in m$ dır [3].

**2. 1. 6. Teorem**

$m, b \in I^X$ ve $x_l$ bir fuzzy nokta olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a)*** $x_l \in m \wedge b \Leftrightarrow x_l \in m$ ve $x_l \in b$

**b)** $x_l \in m \vee b \Leftrightarrow x_l \in m$ veya $x_l \in b$ [5].

**2. 1. 7. Önerme**

$X$ 'in bir $m$ fuzzy kümesi, kendi fuzzy noktalarının birleşimine eşittir [3].

**2. 1. 8. Tanım**

$X$'in bir $x_l$ fuzzy noktası ve $b$ fuzzy kümesi için $l + b(x) > 1$ ise $x_l$ fuzzy noktası ile $b$ fuzzy kümesi çakışığımsıdır (quasi coincident) denir ve $x_l q b$ ile gösterilir [3].

**2. 1. 9. Önerme**

$\left\{m_j\right\}_{j\in J}$, $X$'in fuzzy kümelerinin bir ailesi ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun.

$\exists j_0 \in J$ için, $x_l q m_{j_0} \Leftrightarrow x_l q\left(\underset{j\in J}{\vee} m_j\right)$ dir [3].

**2. 1. 10. Tanım**

$X$ içindeki $a$ ve $b$ fuzzy kümeleri için $a(x)+b(x)>1$ olacak şekilde bir $x\in X$ noktası var ise, $a$ ile $b$ çakışığımsıdır denir ve $a q b$ ile gösterilir [3].

**2. 1. 11. Önerme**

$m, b \in I^x$ olsun. $m \le b$ olması için, gerek ve yeter şart $m$ ve $b^c$ fuzzy kümelerinin çakışığımsı olmamasıdır. Yani $m \not{q} (1-b)$ olmalıdır. Özellikle, $x_l \in m$ olması için, gerek ve yeter şart $x_l \not{q} (1-m)$ olmasıdır [3].

**2. 2. Fuzzy Topolojik Uzaylar**

**2. 2. 1. Tanım**

$X$'in fuzzy kümelerinin bir ailesi $t_x$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa; $t_x$'e, $X$ üzerinde bir fuzzy topoloji ve $(X, t_x)$ ikilisine de, bir fuzzy topolojik uzay denir.

***a)*** $0,1 \in t_x$

***b)*** $a, b \in t_x$ ise, bu halde $a \wedge b \in t_x$

***c)*** $\forall j \in J$ için $a_j \in t_x$ ise, bu halde $\underset{j\in J}{\vee} a_j \in t_x$

$t_x$'in her elemanına fuzzy açık küme denir. Bir fuzzy açık kümenin tümleyeni fuzzy kapalı küme olarak tanımlanır [4].

**2. 2. 2. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $b \leq t_x$ olsun. $\forall m \in t_x$ için, $m = \vee\{\, a \mid a \in B \,\}$ olacak şekilde $B \leq b$ alt ailesi varsa, $b$ ailesine $t_x$ için bir tabandır denir [4].

**2. 2. 3. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $d \leq t_x$ olsun. $b = \wedge\{A \mid A \in y, y \leq d$ ve ψ sonlu$\}$ ailesi $t_x$ için bir baz ise, $d$ ailesine $t_x$' in bir alt tabanı denir [4].

**2. 2. 4. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $m \in I^x$ olsun.

Bu durumda; $\operatorname{int} m = \vee\{b ; b \leq m, b \in t_x\}$

şeklinde tanımlanan int µ fuzzy kümesine, $m$ fuzzy kümesinin içi denir [4].

**2. 2. 5. Teorem**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $m \in I^x$ olsun. $m$ fuzzy kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart $m = \operatorname{int} m$ olmasıdır [4].

**2. 2. 6. Sonuç**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a, b \in I^x$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a)*** $\operatorname{int} 1 = 1$ ve $\operatorname{int} 0 = 0$

***b)*** $\operatorname{int} a \leq a$

***c)*** $\operatorname{int}(\operatorname{int} a) = \operatorname{int} a$

***d)*** $\operatorname{int}(a \wedge b) = \operatorname{int} a \wedge \operatorname{int} b$

***e)*** $\bigvee_{j \in J} \operatorname{int} a_j \leq \operatorname{int}(\bigvee_{j \in J} a_j)$

***f)*** $a \leq b \Rightarrow \operatorname{int} a \leq \operatorname{int} b$ [2].

**2. 2. 7. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $b \in I^x$ olsun.

Bu durumda; $clb = \wedge\{m \mid b \leq m,\ (1-m) \in t_x\}$

şeklinde tanımlanan $clb$ fuzzy kümesine, $b$ 'nın kapanışı denir [4].

**2. 2. 8. Sonuç**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $b \in I^x$ olsun. $b$ fuzzy kümesinin kapalı olması için, gerek ve yeter şart $b = clb$ olmasıdır [4].

**2. 2. 9. Sonuç**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a, b \in I^x$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a)*** $cl1 = 1$ ve $cl0 = 0$

***b)*** $a \leq cla$

***c)*** $cl(cla) = cla$

***d)*** $cl(a \vee b) = cla \vee clb$

***e)*** $cl\left(\bigwedge_{j \in J} a_j\right) \leq \bigwedge_{j \in J} cla_j$

***f)*** $a \leq b \Rightarrow cla \leq clb$ [2].

**2. 2. 10. Teorem**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $m \in I^x$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler vardır:

***a)*** $1-\operatorname{int} m = cl(1-m)$

***b)*** $1-clm = \operatorname{int}(1-m)$ [2].

**2. 2. 11. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay, $m \in I^x$ ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun. Eğer $x_l \in b$ ve $b \leq m$ olacak şekilde bir $b$ fuzzy açık kümesi varsa, $m$ fuzzy kümesine $x_l$ 'nın bir fuzzy komşuluğu denir. $x_l$ 'nın tüm fuzzy komşuluklarının ailesi, $N(x_l)$ ile gösterilir [3].

**2. 2. 12. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay, $m \in I^x$ ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun. $x_l qb$ ve $b \leq m$ ($x_l qb \leq m$) olacak şekilde bir $b \in t_x$ varsa, $m$ fuzzy kümesine $x_l$ 'nın *q*-komşuluğu denir [3]. $x_l$ fuzzy noktasının tüm *q*-komşuluklarının ailesi $N_q(x_l)$ ile gösterilir.

**2. 2. 13. Teorem**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzayındaki bir $x_l$ fuzzy noktasının *q*-komşuluklarının ailesi, $N_q(x_l)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a)*** $m \in N_q(x_l)$ ise $x_l qm$ dır.

***b)*** $m, b \in N_q(x_l)$ ise $m \wedge b \in N_q(x_l)$ dır.

***c)*** $m \in N_q(x_l)$ ve $m \leq b$ ise $b \in N_q(x_l)$ dır.

***d)*** $m \in N_q(x_l)$ ise $b \leq m$ ve $\forall\, x_l qb$ için, $m \in N_q(x_l)$ olacak şekilde bir $b \in N_q(x_l)$ vardır [3].

**2. 2. 14. Teorem**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $m \in I^x$ olsun. $m$ fuzzy kümesinin açık olması için, gerek ve yeter şart $m$ ile çakışığımsı olan her $x_l$ fuzzy noktası için $m \in N_q(x_l)$ olmasıdır [3].

**2. 2. 15. Önerme**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay, $m \in I^x$ ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun. Bu takdirde, $m \in N_q(x_l)$ ise, $\operatorname{int} m \in N_q(x_l)$ olur [3].

**2. 2. 16. Teorem**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay, $m \in I^x$ ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun. $x_l \in clm$ olması için, gerek ve yeter şart $x_l$ fuzzy noktasının her bir $q$-komşuluğunun $m$ ile çakışığımsı olmasıdır [3].

**2. 2. 17. Önerme**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay, $m \in I^x$ ve $m \neq 0$ olsun. $clm = 1$ olması için gerek ve yeter şart $t_x$ fuzzy topolojisinin her elemanının $m$ ile çakışığımsı olmasıdır [3].

**2. 3. Fuzzy Regüler Açık (Kapalı), Fuzzy $d$ - Açık (Kapalı), Fuzzy Pre Açık (Kapalı) Kümeler**

**2. 3. 1. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $m \in I^x$ olsun. $m = \operatorname{int}(cl(m))$ ise, $m$ fuzzy kümesine regüler (düzenli) açık küme denir.
Benzer şekilde, $m = cl(\operatorname{int}(m))$ ise $m$ fuzzy kümesine regüler kapalı küme denir [2].

**2. 3. 2. Tanım**

***a)*** Bir fuzzy açık kümenin kapanışı, fuzzy regüler kapalı kümedir.
***b)*** Bir fuzzy kapalı kümenin içi, fuzzy regüler açık kümedir [2].

**2. 3. 3. Uyarı**

Her fuzzy regüler açık (kapalı) küme, fuzzy açık (kapalı) dır. Tersi her zaman geçerli değildir. İki fuzzy regüler açık (kapalı) kümenin birleşimi (kesişimi), fuzzy regüler açık ( kapalı) olmak zorunda değildir [2].

**2. 3. 4. Teorem**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay, $m$ ve $b$ fuzzy regüler açık (kapalı) kümeler olsun. Bu takdirde, $m \wedge b$ $(m \vee b)$ kümesi fuzzy regüler açıktır (kapalıdır) [2].

**2. 3. 5. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $x_l$ fuzzy nokta olsun.

***a)*** $x_l$ 'nın her bir $m$ fuzzy regüler açık ***q***-komşuluğu, $b$ fuzzy kümesi ile çakışığımsı ise; $x_l$ fuzzy noktasına, $b$ fuzzy kümesinin bir fuzzy $d$ -kapanış noktası denir. $b$ fuzzy kümesinin tüm fuzzy $d$ -değme noktalarının birleşimine, $b$ 'nın fuzzy $d$ -kapanış kümesi denir ve $d - cl(b)$ ile gösterilir [5].

***b)*** Eğer $b = d - cl(b)$ ise, $b$ fuzzy kümesine fuzzy $d$ -kapalı küme denir. Bir fuzzy $d$ -kapalı kümenin tümleyenine, fuzzy $d$ -açık küme denir [5].

**2. 3. 6. Uyarı**

Her fuzzy regüler açık küme, fuzzy $d$ -açık kümedir. Fakat tersi genelde doğru değildir [5]. ( Ters örnek için, [5]'e bakınız.)

**2. 3. 7. Tanım**

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun. $b \le m$ olacak şekilde, $x_l$ ’nın bir $b$ fuzzy regüler $q$-komşuluğu varsa; bu takdirde $m$ fuzzy kümesine $x_l$ fuzzy noktasının fuzzy $d$ -komşuluğu denir [5].

**2. 3. 8. Uyarı**

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzayındaki herhangi bir $m$ fuzzy kümesi için, $clm \le d - cl(m)$ bağıntısı vardır. Genel olarak; $clm \ne d - cl(m)$ geçerlidir [5].

**2. 3. 9. Teorem**

$(X,t_x)$ bir fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer $m \in t_x$ ise; bu takdirde, $clm = d - cl(m)$ geçerlidir [5].

**2. 3. 10. Uyarı**

Her fuzzy regüler kapalı küme, fuzzy $d$ - kapalı küme olmak zorunda değildir [13].
( Ters örnek için, [13]’e bakınız.)

**2. 3. 11. Tanım**

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun.
$x_l \, q \, b$ ve $b \le \mathrm{int}(clb) \le m$ olacak şekilde $x_l$ ’nın bir $b$ fuzzy açık $q$-komşuluğu varsa; bu takdirde, $x_l$ fuzzy noktasına, $m$ fuzzy kümesinin fuzzy $d$ -iç noktası denir. $m$ fuzzy kümesinin tüm fuzzy $d$ -iç noktalarının birleşimine, $m$ ’nün fuzzy $d$ -içi denir ve $d - \mathrm{int}(m)$ ile gösterilir.
Bu tanımdan $1 - (d - \mathrm{int}(m)) = d - cl(1 - m)$ olduğu görülür [6].

**2. 3. 12. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a \in I^x$ olsun.

***a)*** $a \leq \text{int}(cl(a))$ oluyorsa, $a$ fuzzy kümesine fuzzy pre açık küme;

***b)*** $a \leq cl(\text{int}(a))$ oluyorsa, $a$ fuzzy kümesine fuzzy pre kapalı küme denir [7].

**2. 3. 13. Önerme**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay olmak üzere;

***a)*** Fuzzy pre açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi, yine bir fuzzy pre açık kümedir.

***b)*** Fuzzy pre kapalı kümelerin sonlu sayıda kesişimi, yine bir fuzzy pre kapalı kümedir [8].

**2. 3. 14. Uyarı**

Yukarıda tanımlanan fuzzy küme çeşitleri ve özelliklerinden faydalanarak literatürde, genelleştirilmiş süreklilik çeşitleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**2. 3. 15. Tanım**

$(X, t_1)$ ve $(Y, t_2)$ fuzzy topolojik uzaylar olmak üzere; $f : (X, t_1) \to (Y, t_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall b \in t_2$ için, $f^{-1}(b)$ $(X, t_1)$ uzayında fuzzy açık ( fuzzy pre açık ) küme oluyorsa; bu takdirde $f$ fonksiyonuna fuzzy sürekli ( fuzzy pre sürekli) denir [12].

# 3. FUZZY $d$-PRE AÇIK KÜMELER VE FUZZY $d$-PRE SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde, fuzzy pre açık kümelerden daha genel olan ve fuzzy $d$ - pre açık küme olarak adlandırdığımız yeni bir küme çeşidi tanımladık ve sağladığı çeşitli özellikleri inceledik.

## 3. 1. Fuzzy $d$ -Pre açık Kümeler

### 3. 1. 1. Tanım

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a \in I^x$ olsun. Eğer $a \leq \operatorname{int}(d-cl(a))$ ise, bu takdirde $a$ fuzzy kümesine fuzzy $d-$pre açık küme denir.

### 3. 1. 2. Uyarı

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzayındaki bütün fuzzy $d-$pre açık kümelerin ailesini $d-PO(X)$ ile göstereceğiz.

### 3. 1. 3. Tanım

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a \in I^x$ olsun. $a$ fuzzy $d-$pre açık kümesinin tümleyenine, fuzzy $d-$pre kapalı küme denir.

### 3. 1. 4. Tanım

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a \in I^x$ olsun. $a$ fuzzy kümesinin kapsadığı tüm fuzzy $d-$pre açık kümelerin birleşimine, $a$ fuzzy kümesinin fuzzy $d-$pre içi denir ve $d-P\operatorname{int}(a) = \vee\{ a_i | a_i \leq a \quad \text{ve} \quad a_i \in d-PO(X) \}$ şeklinde gösterilir.

**3. 1. 5. Uyarı**

Bir $a$ fuzzy kümesinin $d-$pre içi için, $d-P\text{int}(a)$ ile gösterimini kullanacağız.

**3. 1. 6. Tanım**

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a\in I^x$ olsun. $a$ fuzzy kümesini kapsayan bütün fuzzy $d-$pre kapalı kümelerin kesişimine, $a$ fuzzy kümesinin fuzzy $d-$pre kapanışı denir ve $d-cl(a)=\wedge\{a_i \mid a \leq a_i;\ a_i\ \ d-\text{pre kapalı küme}\}$ şeklinde gösterilir.

**3. 1. 7. Uyarı**

$a$ fuzzy kümesinin $d-$pre kapanışı için $d-Pcl(a)$ gösterimini kullanacağız.

**3. 1. 8. Önerme**

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a\in I^x$ olsun. Eğer $a$ fuzzy kümesi, fuzzy pre açık küme ise, bu takdirde $a$, fuzzy $d-$pre açık kümedir.

**İspat:**

$(X,t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a\in I^x$ olsun. Her zaman $cla\leq d-cla$ bağıntısı sağlandığı için, önermenin doğruluğu açıktır.

**3. 1. 9. Uyarı**

3. 1. 8. Önerme ve fuzzy kümelerin tanımları gereği aşağıdaki çizelge elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} \text{Fuzzy açık küme} & \rightarrow & \text{Fuzzy pre açık küme} \\ & & \downarrow \\ & & \text{Fuzzy } d-\text{pre açık küme} \end{array}$$

**3. 1. Çizelge**

**3. 1. 10. Uyarı**

3. 1. Çizelge'deki gerektirmelerin tersleri genellikle doğru değildir.

**3. 1. 11. Örnek**

$X$={a,b,c} ve $X$ üzerindeki fuzzy topoloji $t = \{0, 1, A\}$ olsun. Fuzzy kümeleri
A(a)= 0,5 ; A(b)=0,7 ; A(c)=0,6
B(a)=0,5 ; B(b)=0,2 ; B(c)=0,4 biçiminde tanımlayalım. Bu takdirde B fuzzy kümesi fuzzy pre açıktır, fakat fuzzy açık değildir.

**3. 1. 12. Örnek**

$X = \{a, b, c\}$ kümesi ile üzerinde $t = \{0, 1, A, A \vee C\}$ fuzzy topolojisi verilsin.
Fuzzy kümeleri;
$A(a) = 0{,}6$; $A(b) = 0{,}4$; $A(c) = 0{,}7$
$B(a) = 0{,}3$; $B(b) = 0{,}5$; $B(c) = 0{,}1$
$C(a) = 0{,}5$; $C(b) = 0{,}3$; $C(c) = 0{,}8$ olarak tanımlansın. Bu takdirde, B fuzzy kümesi $X$ üzerindeki $t$ fuzzy topolojisine göre fuzzy $d-$pre açık kümedir, ama fuzzy pre açık küme değildir.

**3. 1. 13. Önerme**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a \in I^x$ olsun. Eğer $cl(d - \text{int}\, a) \leq a$ ise; bu takdirde $a$ fuzzy kümesi fuzzy $d-$pre kapalı kümedir.

**İspat:**

$a$ fuzzy kümesi, fuzzy $d-$pre kapalı küme olsun. Bu takdirde, $(1-a)$ fuzzy $d-$pre açıktır. Buradan,

$$(1-a) \in d-PO(X) \Leftrightarrow (1-a) \leq \text{int}(d - cl(1-a)) \Leftrightarrow \text{int}(1-(d-\text{int}\, a)) = 1 - cl(d - \text{int}\, a) \leq a$$

olur ki, bu durumda $(1-a) \leq 1 - cl(d - \text{int}\, a)$ ve $cl(d - \text{int}\, a) \leq a$ elde edilir. Bu ise; $a$ fuzzy kümesinin fuzzy $d-$pre kapalı bir küme olduğunu gösterir.

**3. 1. 14. Uyarı**

***a)*** Fuzzy $d-$pre açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi yine, bir fuzzy $d-$pre açık kümedir.

***b)*** Fuzzy $d-$pre kapalı kümelerin herhangi sayıda kesişimi yine, bir fuzzy $d-$pre kapalı kümedir.

**3. 1. 15. Özellik**

Bir $(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzayındaki fuzzy $d-$pre kapalı küme için, aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a)*** $a = d - Pcl(a)$ ise, $a$ fuzzy $d-$pre kapalı kümedir.

***b)*** $a \leq b$ ise, $d - Pcl(a) \leq d - Pclb$ ($d-$pre kapalı küme tanımından açıktır.)

***c)*** $d - Pcl(d - Pcl(a)) = d - Pcla$

***d)*** $x_l$ bir fuzzy nokta olmak üzere; $\forall m \in d - PO(X) \ni l \not{q} (1-m)$ ise, $a \wedge m \neq 0$ olduğu anlaşılır ki $x_l \in d - Pcl(a)$ dır. ($x_l$, $a$ 'nın bir $d-$pre kapanış noktasıdır.)

**3. 1. 16. Önerme**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a \in I^x$ olsun.

***a)*** $\forall b \in d - O(X)$ fuzzy kümesi için; $(d - cla) \wedge b \leq d - cl(a \wedge b)$

***b)*** $\forall b \in d - cl(X)$ fuzzy kümesi için; $d - \mathrm{int}(a \vee b) \leq (d - \mathrm{int}\, a) \vee b$

**3. 1. 17. Teorem**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $a \in I^x$ olsun. Bu takdirde, $d - Pcla = a \vee cl(d - \mathrm{int}a)$ eşitliği geçerlidir.

**İspat:**

$cl[d - \mathrm{int}(a \vee cl(d - \mathrm{int}))] = cl[(d - \mathrm{int}a) \vee (d - \mathrm{int}(cl(d - \mathrm{int}a)))] \leq cl(d - \mathrm{int}a) \leq a \vee cl(d - \mathrm{int}a)$

$a \vee cl(d - \mathrm{int}a)$ kümesi, $a$ fuzzy kümesini kapsayan fuzzy $d-$pre kapalı kümedir.

O halde, $a \leq a \vee cl(d - \text{int}\, a)$ olup, buradan $d - Pcla \leq a \vee cl(d - \text{int}\, a)$ bulunur. Diğer yandan, $d - Pcl(a)$ kümesi $d -$pre kapalı olduğundan, $a \leq d - cla$ ve $(d - \text{int}\, a) \leq cl(d - \text{int}(Pcla)) \leq d - Pcl(a)$ olur.

Buradan, $a \vee cl(d - \text{int}) \leq a \vee (d - Pcl(a)) = d - Pcla$ bulunur. Sonuç olarak, $d - Pcla = a \vee cl(d - \text{int} a)$ eşitliği elde edilir.

**3. 1. 18. Teorem**

$a \in I^x$ olmak üzere, $X$ fuzzy uzayındaki her $m$ fuzzy regüler ($d -$açık) kümesi için, $a \wedge m \in d - PO(X)$ olması için gerek ve yeter şart $a$ fuzzy kümesinin fuzzy $d -$pre açık küme olmasıdır.

**İspat:**

Ü : $a$ fuzzy kümesi, fuzzy $d -$pre açık küme olduğundan $m \wedge a \leq m \wedge \text{int}(d - cla)$ olur. Buradan, $m \wedge a \leq \text{int}\, m \wedge \text{int}(d - cla) = \text{int}(m \wedge (d - cla))$ bulunur. 3. 1. 16. Önerme gereğince, $\text{int}((d - cl(a)) \wedge m) \leq \text{int}(d - cl(m \wedge a))$ olur.

Buradan $m \wedge a \leq \text{int}(d - cl(m \wedge a))$ olup, $m \wedge a \in d - PO(X)$ bulunur.

Þ : $m$ fuzzy kümesi, $d -$açık küme olduğundan $m \leq (d - \text{int}\, m)$ yazabiliriz. Her zaman, $a \leq d - cla$ olacağından $m \wedge a \leq (d - \text{int}\, m) \wedge (d - cla)$ bulunur. Hipotezden, $m \wedge a \leq (d - \text{int}\, m) \wedge ((d - cla) \leq \text{int}(d - cl(m \wedge a))$ olur. Dolayısıyla $m \wedge a \leq \text{int}[\ (d - \text{int}\, m) \wedge ((d - cla)\ ] \leq \text{int}(d - cl(m \wedge a))$ ifadesi kullanılarak $m \wedge a \leq (d - \text{int}\, m) \wedge \text{int}(d - cla)$ elde edilir. Buradan, $a \leq \text{int}\, d - cla$ bulunur ki, bu da $a$ fuzzy kümesinin $d -$pre açık bir küme olduğunu gösterir.

**3. 1. 19. Teorem**

$X$ fuzzy uzayında bir $a$ fuzzy $d -$açık kümesi için, $d - Pcla = cla$ eşitliği sağlanır.

**İspat:**

3. 1. 17. Teorem gereğince, $d - Pcla = a \vee cl(d - \text{int}\, a)$ yazabiliriz. $a$ fuzzy kümesi, fuzzy $d -$açık küme olduğundan $a = d - \text{int}\, a$ olup, buradan

$a \vee cl\,(d - \text{int}\,a) = a \vee cla$ elde edilir. Sonuç olarak, $a \vee (cla) = cla$ olup, $d - Pcla = cla$ bulunur.

**3. 1. 20. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay, $b \in I^x$ ve $x_l$ bir fuzzy nokta olsun. $x_l$ fuzzy noktasının $x_l \in U \leq b$ olacak şekilde, $x_l$ ile çakışığımsı olan bir $U$ fuzzy $d -$pre açık küme varsa, $b$ fuzzy kümesine $x_l$ fuzzy noktasının $d -$pre komşuluğu denir.

**3. 2. Fuzzy $d -$Pre Sürekli Fonksiyonlar**

Tanımladığımız fuzzy $d -$pre açık küme kavramından yararlanarak aşağıdaki süreklilik çeşidini tanımlayabiliriz.

**3. 2. 1. Tanım**

$f : (X, t_x) \to (Y, t_y)$ fonksiyonu verilsin. Y fuzzy uzayındaki $f(x_l)$ fuzzy noktasının her $b$ fuzzy *q*-komşuluğu için, $d - cl\left(f^{-1}(b)\right)$ kümesi $X$ fuzzy uzayında $x_l$ fuzzy noktasının bir *q*-komşuluğu oluyorsa, $f$ fonksiyonuna fuzzy $d -$pre süreklidir denir.

**3. 2. 2. Teorem**

$f : (X, t_x) \to (Y, t_y)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktirler:

***a)*** $f$ fonksiyonu fuzzy $d -$pre süreklidir.

***b)*** $\forall b \in t_y$ için $f^{-1}(b) \leq \text{int}\left(d - cl\, f^{-1}(b)\right)$ dır.

***c)*** Her $a$ fuzzy $d -$açık kümesi için, $f(cla) \leq clf(a)$ dır.

**İspat:**

**(*a*)** $\Rightarrow$ **(*b*)** $f$ fonksiyonu, fuzzy $d -$pre sürekli ve $x_l$, bir fuzzy nokta olsun. Fuzzy $d -$pre süreklilik tanımı gereğince, $x_l \in f^{-1}(a)$ fuzzy noktası için $d - cl\left(f^{-1}(a)\right)$,

$x_l$ 'nın fuzzy $q$-komşuluğudur. Bu takdirde $x_l \in \operatorname{int}\left(d - clf^{-1}(a)\right)$ olup,

$f^{-1}(a) \leq \operatorname{int}\left(d - clf^{-1}(a)\right)$ bulunur.

**(*b*) Þ (*a*)** $x_l$ fuzzy noktası için, $Y$ fuzzy uzayında $a \in I^x$ fuzzy kümesi $f(x_l)$ fuzzy noktasının açık bir $q$-komşuluğu olsun. Buradan ters fonksiyonun tanımından $x_l \in f^{-1}(a)$ bulunur. ($b$) gereğince $x_l \in f^{-1}(a) \leq \operatorname{int}\left(d - clf^{-1}(a)\right) \leq d - clf^{-1}(a)$ olup, $d - clf^{-1}(a)$ $x_l$ fuzzy noktasının bir $q$-komşuluğudur. O halde, $f$ fonksiyonu fuzzy $d-$pre süreklidir.

**(*a*) Þ (*c*)** $x_l$ fuzzy noktası ve $a$ fuzzy $d-$açık kümesi verilsin. $x_l \in cla$ fakat, $f(x_l) \notin clf(a)$ olsun. $f(x_l) \notin clf(a)$ ise, kapanış noktası tanımından $\forall b \in N_q\left(f(x_l)\right)$ için, $b \not{q}\, f(a)$ dır. O halde, $f^{-1}(b) \not{q}\, a$ olur. $a$ fuzzy kümesi fuzzy $d-$açık küme olduğundan, $\left(d - clf^{-1}(b)\right) \not{q}\, a$ olur ki, $x_l \notin cla$ dır. Bu ise bir çelişki olup, $f(x_l) \in clf(a)$ bulunur.

**(*c*) Þ (*a*)** $f$ fonksiyonunun, fuzzy $d-$pre sürekli olmadığını varsayalım. Bu takdirde, $\forall b \in N_q\left(f(x_l)\right)$ için, $\left(d - cl\, f^{-1}(b)\right) \notin N_q(x_l)$ elde edilir. Buradan $x_l \in cl\left(X - \left(d - cl\, f^{-1}(b)\right)\right)$ ve $f(x_l) \in f\left(cl\left(X - \left(d - cl\, f^{-1}(b)\right)\right)\right)$ bulunur.

($c$) gereğince, $f\left(cl\left(X - \left(d - cl\, f^{-1}(b)\right)\right)\right) \leq cl\left(f\left(X - \left(d - clf^{-1}(b)\right)\right)\right) \leq cl(Y - b)$ $\left(\left(X - \left(d - cl\, f^{-1}(b)\right)\right)\right.$ fuzzy $d-$açık küme olduğundan $\left.\right)$ bulunur. Bu ise $b \in N_q\left(f(x_l)\right)$ ile çelişir ki, $f$ fonksiyonu fuzzy $d-$pre süreklidir.

**3. 2. 3. Teorem**

$f:(X, t_x) \rightarrow (Y, t_y)$ fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler denktir:

***a)*** $f$ fonksiyonu fuzzy $d-$pre süreklidir.

***b)*** $\forall b \in t_y$ için $f^{-1}(b)$, $X$ uzayında $d-$pre açık kümedir.

***c)*** $f(x_l)$ 'nin her $b$ fuzzy açık $q$-komşuluğu için, $f(U) \leq b$ olacak şekilde $x_l$ 'nın bir $d-$pre açık $q$-komşuluğu vardır.

***d)*** $\forall b \leq Y$ fuzzy kapalı kümesi için $f^{-1}(b)$, $X$ uzayında fuzzy $d-$pre kapalı kümedir.

***e)*** $\forall b \in N_q(f(x_l))$ için $f^{-1}(b)$ fuzzy kümesi $X$ uzayında, $x_l$ fuzzy noktasının bir fuzzy $d-$pre komşuluğudur.

***f)*** $\forall a \in I^x$ için $f(d-Pcla) \leq clf(a)$

***g)*** $\forall b \in I^y$ için $d-Pcl\, f^{-1}(b) \leq f^{-1}(clb)$

***h)*** $\forall b \in I^y$ için $f^{-1}(\text{int}\, b) \leq d-P\text{int}\, f^{-1}(b)$

***ı)*** $Y$ fuzzy uzayının her $b$ fuzzy temel açık kümeleri için, $f^{-1}(b)$ $X$ uzayında fuzzy $d-$pre açık kümedir.

**İspat:**

$\boldsymbol{a \Leftrightarrow b}$ 3. 2. 2. Teorem'inin $(a \Leftrightarrow b)$ kısmının ispatı ile aynıdır.

$\boldsymbol{b \Leftrightarrow d}$ $a \in I^y$ için, $f^{-1}(Y-a) = X - f^{-1}(a)$ özelliğinden açıktır.

$\boldsymbol{c \Rightarrow b}$, $\boldsymbol{b}$ Û $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b \Rightarrow ı}$, kısımlarının doğruluğu açıktır.

$\boldsymbol{b \Rightarrow c}$ (*b)* gereğince $f(x_l)$'nın her $b$ fuzzy açık *q*-komşuluğunun ters görüntüsü, $X$ fuzzy uzayında $d-$pre açıktır. $f^{-1}(b)$=U dersek, $f(U) = f\left(f^{-1}(b)\right) \leq b$ olur ki buradan, $f(U) \leq b$ elde edilir.

$\boldsymbol{d \Rightarrow f}$ *(d)* gereğince $\forall a \in I^x$ için, $f^{-1}(clf(a))$, $X$ fuzzy uzayında fuzzy $d-$pre kapalıdır ve $a$ fuzzy kümesini kapsar. $d-Pcla \leq f^{-1}(clf(a))$ olduğundan dolayı, $f(d-Pcla) \leq f\left(f^{-1}(clf(a))\right) \leq clf(a)$ ve $f(d-Pcla) \leq clf(a)$ elde edilir.

$\boldsymbol{f \Rightarrow d}$ Y fuzzy uzayında herhangi bir $a$ kapalı fuzzy kümesini ele alalım. (*f*) gereğince, $f\left(d-cl\left(f^{-1}(a)\right)\right) \leq cl\left(f\left(f^{-1}(a)\right)\right) \leq cla = a$ ve buradan da $d-Pcl\left(f^{-1}(a)\right) \leq f^{-1}(a)$ elde edilir. Diğer yandan, $d-$pre kapanış tanımı gereğince, $f^{-1}(a) \leq d-Pcl\left(f^{-1}(a)\right)$ bulunur. Dolayısıyla, $f^{-1}(a) = d-Pcl\left(f^{-1}(a)\right)$ olup, $f^{-1}(a)$ fuzzy kümesi fuzzy $d-$pre kapalı kümedir.

$\boldsymbol{f \Rightarrow g}$ $m \in I^y$ fuzzy kümesi verilsin. *(f)* gereğince, $f\left(d-Pclf^{-1}(m)\right) \leq clf\left(f^{-1}(m)\right) \leq clm$ olup buradan, $f\left(d-Pcl\ f^{-1}(m)\right) \leq clm$ bulunur. Her iki tarafın ters görüntüsü alınırsa $d-Pcl\ f^{-1}(m) \leq f^{-1}(clm)$ elde edilir.

$\boldsymbol{g} \Rightarrow \boldsymbol{f}$ $a \in I^x$ kümesi verilsin. $f(a) = m$ olsun. ($g$) gereğince,

$d - Pcla \leq d - Pcl\, f^{-1}(m) \leq f^{-1}(clm) = f^{-1}(clf(a))$ olup, buradan, $d - Pcla \leq f^{-1}(clf(a))$ olur. Her iki tarafın $f$ altındaki görüntüsü alınırsa, $f(d - Pcla) \leq clf(a)$ bulunur.

$\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{h}$ $b \in I^y$ fuzzy kümesi verilsin. (*b*) gereğince, $f^{-1}(\text{int}\, b)$, $X$ fuzzy uzayında fuzzy $d-$pre açık kümedir. $f^{-1}\text{int}(b) \leq d - P\text{int}\, f^{-1}(\text{int}\, b) \leq d - P\text{int}\, f^{-1}(b)$

$f^{-1}(b)$ $d-$pre açık olduğundan, $f^{-1}(\text{int}\, b) \leq d - P\text{int}\, f^{-1}(b)$ bulunur.

$\boldsymbol{h} \Rightarrow \boldsymbol{b}$ $a \in \tau_y$ fuzzy kümesi verilsin. $f^{-1}(a) = f^{-1}(\text{int}\, a)$ dır. (*h)* gereğince,

$f^{-1}(a) = f^{-1}(\text{int}\, a) \leq d - P\text{int}\, f^{-1}(a)$ bulunur. Bu durumda, $f^{-1}(a) \leq d - P\text{int}\, f^{-1}(a)$ olur. Diğer taraftan, her zaman $d - P\text{int}\, f^{-1}(a) \leq f^{-1}(a)$ olduğundan, $d - P\text{int}\, f^{-1}(a) = f^{-1}(a)$ bulunur. Yani; $f^{-1}(a)$ fuzzy $d-$pre açık kümedir.

$\boldsymbol{i} \Rightarrow \boldsymbol{b}$**:** $b \in \tau_y$ fuzzy açık kümesi verilsin. $b_a$, $Y$ fuzzy uzayının tabanına ait kümeler olduğundan $b = \bigvee_a b_a$ yazılabilir. Hipotez gereğince $f^{-1}(b_a)$, $\forall a$ için $X$ fuzzy uzayında fuzzy $d-$pre açık küme olduğundan $f^{-1}(b) = f^{-1}(\bigvee_a b_a) = \bigvee_a f^{-1}(b_a)$ olur. Dolayısıyla, fuzzy $d-$pre açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi de fuzzy $d-$pre açık olduğundan, $f^{-1}(b)$, $X$ uzayında fuzzy $d-$pre açık kümedir.

**3. 2. 4 . Uyarı**

2. bölümde ve 3. bölümde yorumlamaya çalıştığımız süreklilik kavramları arasındaki bağıntılar aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

$$\begin{array}{ccc} \text{Fuzzy süreklilik} & \rightarrow & \text{Fuzzy pre süreklilik} \\ & & \downarrow \\ & & \text{Fuzzy } d-\text{pre süreklik} \end{array}$$

**3. 2. Çizelge**

**3. 2. 5. Uyarı**

Çizelge 3. 2.’de verilen gerektirmelerin tersleri genellikle doğru değildir.

**3. 2. 6. Örnek**

$X = \{a, b, c\}$ ve $X$ üzerindeki fuzzy topolojiler $t = \{0, 1, A, A \vee C\}$ ve $J = \{0, 1, B\}$ olsun. $f : (X, t) \to (X, J)$ birim fonksiyonu tanımlansın. $A, B, C$ fuzzy kümeleri, 3. 1. 12. Örnek’ teki fuzzy kümeler olsun. Bu takdirde, $f$ fonksiyonu fuzzy $d-$pre süreklidir, fakat fuzzy pre sürekli değildir.
( Fuzzy pre sürekli olup, fuzzy sürekli olmayan fonksiyon örnekleri için [7]’ ye bakınız.)

**3. 2. 7. Tanım**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $U$, $X$ fuzzy uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $t_U = \{\, a \wedge b \mid b \in t_x \text{ ve } a \in I^u \,\}$ ailesi $U$ kümesi üzerinde bir fuzzy topoloji oluşturuyorsa bu fuzzy topolojiye $t_x$ topolojisinden indirgenen fuzzy topoloji denir ve $(U, t_u)$ ikilisine de, $X$ fuzzy uzayının bir alt uzayı denir [16].

**3. 2. 8. Önerme**

$(X, t_x)$ fuzzy topolojik uzay ve $U$, $X$ fuzzy uzayının $d-$açık alt kümesi olsun. Eğer $b \in d-PO(X)$ ise; bu takdirde $U \wedge b$ fuzzy kümesi, $(U, t_u)$ fuzzy alt uzayında $d-$pre açık kümedir.

**İspat:**

$a \in d-PO(X)$ olduğundan, $a \leq \operatorname{int}(d-cla)$dir. 3. 1. 16. Önerme dikkate alınırsa $U \wedge a \leq U \wedge \operatorname{int}(d-cla) \leq \operatorname{int}_u(U \wedge (d-cla)) \leq \operatorname{int}_u(d-cl(U \wedge a))$ elde edilir.

Buradan; $U \wedge a \leq \text{int}_u \big(d - cl(U \wedge a) \wedge U\big) = \text{int}_u \big(d - cl_u(U \wedge a)\big)$ bulunur ki, bu da $(U \wedge a)$ fuzzy kümesinin , $(U, t_u)$ fuzzy alt uzayında, bir fuzzy $d-$pre açık küme olduğunu gösterir.

**3. 2. 9. Teorem**

$f:(X,t_x) \to (Y,t_y)$ fuzzy $d-$pre sürekli fonksiyon ve $U \in d - O(X)$ olsun. $f|_U : U \to Y$ fonksiyonu da, fuzzy $d-$pre süreklidir.

**İspat:**

$a \in t_y$ olsun. $f$ fonksiyonu fuzzy $d-$pre sürekli olduğundan,

$f^{-1}(a) \in d - PO(X)$' dir. 3. 2. 8. Önerme gereğince, $f^{-1}(a) \wedge U = \big(f|_U\big)^{-1}(a) \in d - PO(U)$ bulunur. Dolayısıyla $f|_U : U \to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu, fuzzy $d-$pre sürekli bir fonksiyondur.

## 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, fuzzy $d-$pre açık kümeler tanımlanıp, özellikleri verilmiş ve ispatlanmıştır. Bunun yanında, fuzzy $d-$pre açık kümeler yardımı ile fuzzy $d-$pre süreklilik tanımı yapılıp, sağladığı özellikler incelenmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda; elde ettiğimiz fuzzy $d-$pre açık küme yardımıyla, fuzzy topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları tanımlanıp, bu aksiyomlar arasındaki geçişler ile söz konusu aksiyomların hangi fonksiyonlar altında korunduğu incelenebilir.

## 5. KAYNAKLAR


[1]. Zadeh, L.A., 1965 Fuzzy Sets. Informa And Control
Studies 8: 338-353.

[2]. Azad, K.K., 1981 Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Pre Contiuity and Fuzzy Weakly Contiuity. J.Math. Anal. Appl.
Studies 82: 14-32.

[3]. Ming, P.P. and Ming,L. Y. , 1980 Fuzzy Topology I. , Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore – Smith Conuergence. J.Math. Anal. Appl.
Studies 76: 571-599.

[4]. Chang, C. L., 1968 Fuzzy Topological Space. J.Math. Anal. Appl.
Studies 24: 182-190.

[5]. Mukherjee, M. N. and Sinha, S. P., 1990 On Some Near Fuzzy Continuous Functions Beetwen Fuzzy Topological Space. Fuzzy Sets and Systems
Studies 34: 245-254.

[6]. Çoker, D. ve Eş, H., 1990 On Some Strong Forms of Fuzzy Continuity. Doğa Tr. J. of Mathematics
Studies 14: 26-38.

[7]. Shahana, A. S. Bin, 1991 On Fuzzy Strong Semicontinuity and Fuzzy Precontinuity. Fuzzy Sets and Systems
Studies 44: 303-308.

[8]. Singal, M. K. and Prakash, Niti, 1991 On Fuzzy Preopen Sets And Fuzzy Preseparation axioms. Fuzzy Sets and Systems
Studies 44: 273-281.

[9]. Pao-Ming P. and Ying-Ming L., 1980 Fuzzy Topology, II. Product and Quotient Spaces. J. Math. Anal. Appl.
Studies 77: 20-37.

[10]. Supriti, S., 1987 On Fuzzy $d-$Continuous Mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications
Studies 126: 130-142.

[11]. Ganguly, S. and Supriti, S., 1988 A note on $d-$Continuity And $d-$connected Sets in Fuzzy Setting. Simon Steuin
Studies 62: 127-141.

[12]. Krsteska, B., 1998 Fuzzy Strongly Preopen Sets And Fuzzy Strong Precontinuity. Mat. Vesnik
Studies 50: 111-123

[13]. Bhaumik, R. N. and Mukherjee, A., 1993 Fuzzy Completely Continuous Mappings. Fuzzy Sets and Systems
Studies 56: 243-246.

[14]. Elnaschie, M.S. , 1998 On the Uncertanity of Cantorian Geometry and the Two-split Experiment. Chaos, Solitons and Fractals
Studies 9: 517-529.

[15]. Elnaschie, M.S., 2000 On the Unification of the Heterotic Strings, M-Theory and $e^{\infty}$ Theory. Chaos, Solitons and Fractals
Studies 11: 2397-2408

[16]. Sarkar, Mira, 1981 On Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis And Applications
Studies 79: 384-394.