T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

***k*-MERTEBELİ LİNEER REKÜRANS BAĞINTISIYLA TANIMLI SAYI DİZİLERİ ve ÖZELLİKLERİ**

Fatih YILMAZ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

ARALIK-2013

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Fatih YILMAZ tarafından hazırlanan *"k-Mertebeli Lineer Rekürans Bağıntısı İle Tanımlı Sayı Dizileri ve Özellikleri"* adlı tez çalışması 04/12/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Hacı AKTAŞ	
Danışman Prof. Dr. Durmuş BOZKURT	
Üye Doç. Dr. Süleyman SOLAK	
Üye Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN	
Üye Doç. Dr. Yıldıray KESKİN	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Fatih YILMAZ

Tarih: 04/12/2013

ÖZET

DOKTORA TEZİ

k-MERTEBELİ LİNEER REKÜRANS BAĞINTISIYLA TANIMLI SAYI DİZİLERİ ve ÖZELLİKLERİ

Fatih YILMAZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2013, 74 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Doç. Dr. Süleyman SOLAK
Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

Bu çalışmada, *k*-mertebeli lineer rekürans bağıntısıyla tanımlanan bazı özel sayı dizileri için matrisler yardımıyla bir takım yeni özellikler elde edilmiştir. Bu bağlamda, çalışma üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda bilinen bazı sayı dizileri için permanentleri bu sayı dizilerini verecek şekilde Hessenberg matrisler tanımlanmıştır. İkinci kısımda Padovan sayı dizisi için bir takım yeni özellikler elde edilmiştir. Son kısımda da elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olan sirkülant matrislerin determinant ve tersleri için formüller elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sirkülant matris, Determinant, Permanent, Matris tersi, Fibonacci ve Lucas sayıları, Jacobsthal sayılar, Pell ve Pell-Lucas sayıları, Perrin ve Padovan sayıları

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SOME WELL-KNOWN NUMBER SEQUENCES DEFINED WITH *k*-ORDER LINEER RECURRENCE RELATION

Fatih YILMAZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
DOCTOR OF MATHEMATICS
IN SCIENCE FACULTY

Advisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2013, 74 Pages

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Hacı AKTAŞ
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Assoc. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
Assoc. Prof. Dr. Yıldıray KESKİN

In this study, some new properties for some well-known number sequences defined with *k*-order lineer recurrrence relation have been obtained. In this content, the study consists of three sections. In the first section, some special Hessenberg matrices are defined whose permanents will give these number sequences. At the second section, some new properties are obtained for Padovan sequence and at the last section, determinant and inverse formulas are obtained for circulant matrices whose elements are Pell and Pell-Lucas numbers.

Keywords: Circulant matrix, Determinant, Permanent, Matrix inverse, Fibonacci and Lucas numbers, Jacobsthal numbers, Pell and Pell-Lucas numbers, Perrin and Padovan nembers

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Durmuş BOZKURT yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma başlıca üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmamızın amaç ve kapsamı açıklanmış, bazı özel sayı dizilerinin tanımları ve özellikleri verilmiştir.

Çalışmamızın esas kısmı olan ikinci bölüm ise üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda ikinci ve üçüncü mertebeli lineer rekürans bağıntısıyla tanımlı bazı özel sayı dizileri matrislerin permanenti ve determinantı olarak ifade edilmiştir. İkinci kısımda Padovan sayı dizisi için bazı özellikler elde edilmiştir. Son kısımda da elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olan sirkülant matrislerin determinant ve tersleri için formüller elde edilmiştir.

Son bölümde ise yapılan çalışma ile ilgili bazı sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen başta değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT olmak üzere Tez İzleme Komitesinin değerli üyeleri Sayın Doç. Dr. Hacı AKTAŞ ve Sayın Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Fatih YILMAZ
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

F_n : n. Fibonacci sayısı

L_n : n. Lucas sayısı

P_n : n. Pell sayısı

Q_n : n. Pell-Lucas sayısı

J_n : n. Jacobsthal sayısı

R_n : n. Perrin sayısı

$\mathcal{P}_n$: n. Padovan sayısı

$\circ$: Hadamard çarpımı

$\oplus$: Direkt toplam

GİRİŞ

Matematiğin temelini oluşturan sayıların tarihi insanlığın tarihi kadar eskidir. İlk çağlarda insanlar sayıların yerine mağara duvarlarına çizgi çizmek, ağaç dallarına çentik atmak gibi bazı yöntemler kullanmıştır. Zamanla doğadaki olaylar gözlenerek yeni sayı sistemleri tanımlanmış, bu tanımlar üzerinde çalışılarak daha da geliştirilmiş, matematiğin ve diğer bilimlerin konuları ile tanımlanan sayı dizileri ilişkilendirilerek sayı sistemlerinin daha başka özelliklerinin ortaya çıkması sağlanmıştır.

Bu çalışmada daha önce bilinen ve son yıllarda üzerinde çokça çalışılan ve çalışıldıkça her defasında yeni özellikleri ortaya çıkarılan bazı özel sayı dizileri incelenmiştir. Bu bağlamda; Pell, Perrin, Jacobsthal, Lucas sayı dizileri için permanentleri bu sayı dizilerini verecek şekilde matrisler tanımlanmıştır. Bunun yanında Padovan sayı dizisi üzerinde çalışılmış ve matrisler yardımıyla bazı yeni özellikler elde edilmiştir. Ayrıca elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olan sirkülant matrislerin determinant ve tersleri için formüller elde edilmiştir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Matris kavramı nümerik analiz, sayılar teorisi, görüntü işleme, graf teori, kombinatorik, olasılık teorisi ve istatistik, sınır değer problemleri, yüksek mertebeli spektral filtreleme teorisi gibi birçok bilimsel alanda kullanılmaktadır. Kullanıldığı alana göre matrislerin uygulamaları da çeşitlilik göstermektedir. Bazı özel tipteki matrislerin özellikleri ve matrislere ait bir takım özellikler ile sayı dizileri arasında ilişkiler kurulmuş ve böylece de sayı dizilerinin geliştirilmesinde matris özellikleri sıkça kullanılmıştır.

Diziler ise tanım cümlesi doğal sayılar olan fonksiyonlardır. Dizi kavramı ise özellikle Matematik ve Bilgisayar alanlarında önemli bir yere sahiptir. Sayı dizisi kavramı da genel bir ifadeyle doğadaki olayların gözlenerek matematiksel bir model olarak ifade edilmesiyle ortaya çıkmıştır. Örneğin, bilim dünyasının ilgisini çeken, sanat ve mimari gibi birçok alanda karşımıza çıkan Fibonacci sayıları, 13. Yüzyılda yaşamış olan İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci tarafından, tavşanların üremesi ile ilgili bir problem üzerine tanımlanmıştır. Benzer şekilde Padovan sayıları da mimaride taşların dizilişi üzerine tanımlanmış bir sayı dizisidir.

Bu çalışmada özellikle üzerinde uzun yıllardır çalışılan ve çalıştıkça yeni yeni özellikleri ortaya çıkan Lucas, Pell, Pell-Lucas, Perrin, Padovan, Jacobsthal sayı dizileri üzerinde çalışılmıştır. Bu sayı dizileri, matris teori ve lineer cebir alanlarıyla ilişkilendirilerek bazı özellikleri incelenmiştir.

1.2. Sayı Dizileri ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler

Bu kısımda, öncelikle dizi tanımından bahsedilmiştir. Daha sonra da bazı özel sayı dizilerinin tanımları, sık kullanılan bazı özelikleri ve birbirleri ile aralarındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Tanımlanan özel sayı dizilerinden hareketle genelleştirilmiş bazı sayı dizilerinin tanımları da verilmiştir.

Tanım 1.2.1. [Yüksel, 2002] X bir küme olsun. $f:\mathbb{N}\to X$ fonksiyonu, her $n\in\mathbb{N}$ sayısı için $f(n)=x_n$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonuna, X kümesi için bir *dizi* denir. Yani tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyon dizi olarak adlandırılabilir.

Tanım 1.2.2. [Koshy, 2001] $F_1=F_2=1$ olmak üzere, $n\geq 1$ için

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi *Fibonacci Dizisi*, bu dizinin terimleri ise *Fibonacci Sayıları* olarak bilinmektedir.

Fibonacci sayıları bilim dünyasında en çok ilgi gören sayı dizilerinden birisidir. Ardışık iki Fibonacci sayısının oranı *Altın Oran* diye bilinen, sanat ve mimaride güzel sonuçlar veren 1,61803… sayısına yakınsamasıdır. Bu oran, bir *AB* doğru parçasında küçük parçanın büyük parçaya oranı, büyük parçanın bütüne oranını verecek şekilde ifade edilebilir. Öyle ki, büyük parça a birim ve küçük parça da 1 birim ise

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{a+1}$$

oranı bize altın oranı verir. Bu ifade düzenlenirse

$$a^2-a-1=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri $\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$ olup, pozitif kök altın oranı ifade etmektedir. Yani, ardışık iki Fibonacci sayısının oranı olan

$$\tau=\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1,618$$

değeri *Altın Oran* olarak bilinmektedir. Bu dizinin terimleri matematikte ve fizikteki uygulamalarının yanı sıra mimariden sanata, şifrelemeden mühendislik uygulamalarına kadar birçok alanda binlerce bilimsel makaleye konu olmuştur [Koshy, 2001].

1718'de Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667–1754) sabit kat sayılı lineer rekürans bağıntıları hesaplamak amacıyla üreteç fonksiyonu kavramını ortaya atmıştır.

Tanım 1.2.3. [Koshy, 2001**]** $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reel sayıların bir dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

fonksiyonuna $\{a_n\}$ dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir. Üreteç fonksiyonları genellikle

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^n x^n + \cdots$$

şeklinde kullanılmaktadır.

Teorem 1.2.1. [Koshy, 2001**]** $F_1 = F_2 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan Fibonacci dizisi verilsin. $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

dir.

Yukarıdaki teoremde üreteç fonksiyonları yardımı ile 1718'de Abraham De Moivre tarafından ispatlanan formül, 1843'te Fransız matematikçi Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786–1856) tarafından farklı bir yoldan ispatlanmıştır. Binet, α ve β sayıları sırasıyla $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin pozitif ve negatif kökleri olmak üzere, $n \geq 1$ için n. Fibonacci sayısını

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde kesin olarak tanımlanmıştır. Bu formül Fibonacci sayıları için *Binet Formülü* olarak bilinir.

Tanım 1.2.4. [Koshy, 2001**]** $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Lucas Dizisi*, bu dizinin terimlerine ise *Lucas sayıları* denir. Lucas sayıları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir. Bu üreteç fonksiyonu yardımı ile $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere Lucas sayılarına ait Binet formülü,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Tanım 1.2.5. [Horadam, 1994**]** $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, P_0 = 0, P_1 = 1$$
$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, Q_0 = 0, Q_1 = 2$$

dizilerine sırasıyla *Pell* ve *Pell-Lucas* dizisi denir. Bu dizilerin terimlerine ise sırasıyla *Pell* ve *Pell-Lucas sayıları* denir.

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere n. Pell, Pell-Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla,

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Ardışık iki Pell sayısının oranı olan

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2} \cong 2,414$$

değeri literatürde *Gümüş Oran* olarak bilinir.

Tanım 1.2.6. [Cerin, 2007] $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Jacobsthal dizisi*, bu dizinin terimlerine ise *Jacobsthal sayıları* denir. Jacobsthal dizisinin genel terimi,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 1.2.7. [Cerin, 2007] $j_0 = 2$ ve $j_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için,

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Jacobsthal-Lucas dizisi*, bu dizinin terimlerine ise *Jacobsthal-Lucas sayıları* denir. Jacobsthal-Lucas dizisinin genel terimi,

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.8. [Shannon, 2006**]** *Perrin* sayı dizisi de $n > 2$ için, $R_0 = 3,\ R_1 = 0,\ R_2 = 2$ başlangıç koşullarıyla,

$$R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.9. [Shannon, 2006] *Padovan* sayı dizisi Richard Padovan adına I. Steward tarafından $n > 2$ olmak üzere ve $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ başlangıç koşullarıyla,

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

olarak tanımlanmıştır.

Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal, Pell-Lucas, Perrin ve Padovan sayılarının ilk on terimi Tablo 1'de verilmiştir.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Fibonacci	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Lucas	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
Pell	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Jacobsthal	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
Pell-Lucas	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726
Perrin	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17
Padovan	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

Tablo 1

Bu diziler üzerinde çalışılarak daha da genel ifadeler elde edilmiştir. Bu tanımları da aşağıdaki gibi verebiliriz.

Tanım 1.2.10. [Kalman, 1982**]** Kalman c_i'ler sabit ve a_i'ler dizinin elemanları olmak üzere

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

dizisini tanımlamıştır.

Tanım 1.2.11. [Er, 1984]'de yazar, $1-k \le n \le 0$ için

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n, \\ 0 & \text{diğer}, \end{cases}$$

sınır koşulları ile $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i$$

şeklinde *genelleştirilmiş* k*.mertebeden Fibonacci dizisini* tanımlamıştır.

Tanım 1.2.12. [Akbulak ve ark., 2009]'da yazarlar, $m-$mertebeli $k-$Fibonacci sayılarının daha genel bir halini $n > 0$, $k, t \ge 1$ *ve* $1 \le i \le m$ olmak üzere,

$$F_{k,n}^i = \begin{cases} 1, & n+i = 1 \text{ için} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \qquad 1-m \le n \le 0$$

başlangıç koşullarıyla,

$$F_{k,n}^{i} = kF_{k,n}^{i} + tF_{k,n}^{i} + F_{k,n}^{i} + \cdots + F_{k,n}^{i}$$

şeklinde tanımlamışlar ve matris metotlar kullanarak dizi için Binet formülü ve diğer bazı özellikleri elde etmişlerdir.

Tanım 1.2.13. [Lee ve ark., 2003]'da Lee ve Kim $k \geq 2$ için $\{g(k)_n\}$ ile gösterdikleri $k-$*Fibonacci dizisini* $n > k \geq 2$ için,

$$g\left(k\right)_1 = \cdots = g\left(k\right)_{k-2} = 0, g\left(k\right)_{k-1} = g\left(k\right)_k = 1$$

ve

$$g\left(k\right)_n = g\left(k\right)_{n-1} + g\left(k\right)_{n-2} + \cdots + g\left(k\right)_{n-k}$$

şeklinde tanımlamışlardır. $k-$ Fibonacci sayılarının birkaç terimi Tablo 2 ile verilmiştir.

k	**İsim**	**Başlangıç Koşulları**	**Sayılar**
2	Fibonacci	0,1	1,1,2,3,5,8,13,21
3	Tribonacci	0,0,1	1,1,2,4,7,13,24,44
4	Tetranacci	0,0,0,1	1,1,2,4,8,15,29,56
5	Pentanacci	0,0,0,0,1	1,1,2,4,8,16,31,61

Tablo 2

Aşağıda Fibonacci, Pell ve Lucas sayıları ile ilgili iyi bilinen ve çok kullanılan bazı özelikler verilmiştir. [Koshy, Vajda]

- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ (Cassini Formülü)
- $\sum_{i=1}^{n} L_i L_{i-1} = \begin{cases} L_n^2 - 4 & n \text{ çift ise,} \\ L_n^2 + 1 & n \text{ tek ise,} \end{cases}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 = \dfrac{3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^2 = \dfrac{3F_{2n}^2 + 2F_{2n-1}^2 - 4F_{2n-2}F_{2n} + 2n - 2}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^3 = \dfrac{F_{n+2}^3 - 3F_{n+1}^3 + 3(-1)^n F_n + 2}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i F_{i+2} = F_{2n+1}F_{2n+2} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} iF_i^2 = nF_nF_{n+1} - F_n^2 + [1 + (-1)^{n-1}]/2$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$

- $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$
- $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} F_{2i++} = \frac{F_{2n+2}^2 + F_{2n+1}^2 - n - 2}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^3 = \frac{F_{2n}^3 + 3F_{2n}}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$
- $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
- $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5L_{2m} F_{2n}$
- $P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1} P_n$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$
- $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$

- $\sum_{j=0}^{k} F_{i+j} + F_{i+1} = F_{i+k+2}$
- $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$
- $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m-1} F_{n-m}$
- $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i+1} = F_{2n+1}^2 - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^3 = \frac{F_{2n+1}^2 - 3F_{2n-1} + 2}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$
- $L_{n-1} L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$
- $L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$
- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$
- $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
- $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2$
- $F_m L_n + F_n L_m = 2F_{m+n}$
- $\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = \frac{P_n P_{n+1}}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$
- $L_{n-1} L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$
- $L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$
- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$
- $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
- $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2$

1.3. Matris Teori ile İlgili Bazı Tanım ve Özellikler

Bu kısımda, hazırlanan tezde kullanılacak olan ve daha çok Matris Teori alanında faydalanılan bazı tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 1.3.1. [Horn, 1985] $A=[a_{i,j}]$ $n-$kare matris olmak üzere $i>j+1$ ise $a_{i,j}=0$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

formundaki matrise üst *Hessenberg matris* denir. Üst Hessenberg matrisin transpozesi durumunda olan matrise *alt Hessenberg matris* denir.

Tanım 1.3.2. [Horn, 1985] $A=[a_{i,j}]$ $n-$kare matris olmak üzere, hem alt hem de üst Hessenberg matris *tridiagonal matris* olarak adlandırılır. Yani, $|i-j|>1$ ise $a_{i,j}=0$, diğer bir ifadeyle

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dır.

Tanım 1.3.3. [Taşçı, 2005**]** $A\in M_n(F)$ matrisinin permanenti, S_n simetrik grubu ve σ da permütasyonu göstermek üzere

$$per(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. Permanent artı determinant olarak da bilinmektedir ve genelde $per(A)$ sembolü ile gösterilir.

Şimdi de R. A. Brualdi ve P. M. Gibson (1977) tarafından tanımlanan ve bu çalışmada permanent hesaplamada kullanacağımız *contraction* (büzüşme) tanımı verelim.

Tanım 1.3.4. [Brualdi, 1977] $A=[a_{i,j}]$, satır vektörleri $r_1, r_2, \ldots, r_m$ olacak şekilde $m \times n$ mertebeli bir matris olsun. Eğer A matrisinin k. sütununda tam iki elemanı sıfırdan farklı diğer elemanlarının hepsi sıfır ise A matrisine k. sütuna göre *contraction* uygulanabilir denir. Farz edelim ki, A matrisinde $a_{i,k} \neq 0 \neq a_{j,k}$ ve $i \neq j$ olmak üzere k. sütuna göre *contraction* uygulayalım. O halde $A_{ij:k}$ olarak adlandıracağımız $(m-1)\times(n-1)$ mertebeli matris A matrisinde i. satıra $a_{jk}r_i + a_{ik}r_j$ vektörü yazılıp j. satır ve k. sütunun silinmesiyle elde edilir. Bu işlem A matrisinin k. sütununa göre *contraction* olarak adlandırılır. Eğer A matrisi $a_{k,i} \neq 0 \neq a_{k,j}$ ve $i \neq j$ olmak üzere k. satıra göre contraction yapılabilirse $A_{k:ij} = (A^T_{ij:k})^T$ ifadesi doğrudur. Eğer A matrisi tam sayılardan oluşan bir matris ve B matrisi de A matrisinden *contraction* ile elde ediliyorsa,

$$perA = perB$$

dir.

Tanım 1.3.5. [Horn, 1985**]** $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ aynı mertebeli iki matris olmak üzere, A'nın $(i,j)-$inci elemanı ile B'nin $(i,j)-$inci elemanının çarpımına A ve B matrislerinin *Hadamard çarpımı* denir ve $A \circ B$ ile gösterilir. Yani

$$A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]$$

dır.

Tanım 1.3.6. [Kılıç, 2010 (a)] A $n-$kare matrisi $perA = \det(A \circ H)$ olacak şekilde $(-1,1)$ elemanlarından oluşan

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki bir H matrisi ile Hadamard çarpılırsa, H matrisine A matrisinin *dönüştürücüsü* (*converter*) denir. A matrisine de *dönüştürülebilen* matris denir.

Tanım 1.3.7. [Aldrovandi, 2001] $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ sayılarına bağlı $n-$kare $C_n = circ(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$ *sirkülant matrisi*

$$C_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$$

ile ifade edilir.

C_n matrisinin özdeğerleri $w = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{jk} \qquad j = 0, 1, ..., n-1$$

dir. Dolayısıyla

$$\det(C_n) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{jk}$$

dir.

Tanım 1.3.8. [Horn, 1985] $c_k \neq 0$ olmak üzere $C(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k$ monik polinomu verilsin. Polinomun katsayılarına bağlı olarak ifade edilen

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{veya} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrise *companion matris* denir.

1.4. Kaynak Araştırması

Çalışmamıza kaynak teşkil eden, bilinen bazı sayı dizileri üzerine son yıllarda yapılan çalışmalar bu bölümde özetlenmiştir. Buna göre,

[Lee ve ark., 1995]'de yazarlar,

$$\Im^{(n,k)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & 1 & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tipinde iki matris tanımlamışlar ve permananetlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Fibonacci sayılarına eşit olduğunu contraction metodu ile göstermişlerdir.

[Gwan, 2000]'de yazar, $k-$Fibonacci ve $k-$Lucas dizisi ile iki parçalı bir grafın 1-çarpanları arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

[Kılıç ve ark., 2007 (a)]'de yazarlar,

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 1 & -1 & & & \\ & -1 & 1 & -1 & & \\ & & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B_n = \begin{bmatrix} -1 & 2 & & & & 0 \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tipinde matrisler tanımlamışlar ve permanentlerinin sırasıyla Fibonacci ve negatif indisli Lucas sayılarına eşit olduğunu göstermişlerdir. Bunun yanında, permanenti genelleştirilmiş $k-$mertebeli Lucas sayılarını verecek şekilde bir matris tanımlamışlardır.

[Kılıç ve ark., 2010 (a)]'de yazarlar,

$$A_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } B_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & & & & 0 \\ 1 & -1 & 1 & & & \\ & 1 & -1 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrislerini tanımlamışlar ve permanentlerinin sırasıyla negatif indisli Fibonacci ve Lucas sayılarına eşit olduğunu göstermiştir. Aynı zamanda bu sayı dizileri için kompleks çarpanlama formülleri vermişlerdir.

[Milan, 2010]'de yazar, üst Hessenberg matrislerin özel bazı durumunu incelemiştir. Bir tipteki Hessenberg matrislerin determinantlarını genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ve polinomlar ile ilişkilendirmiştir.

[Kılıç ve ark., 2007 (b)]'de yazarlar, tridiagonal matrislerin permanentleri ve determinantları ile negatif indisli ikinci merteben reküranslar arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Bu bağlamda,

$$H_n(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix} -\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2} & -\frac{1}{\alpha\beta^2} & & & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} & & \\ & \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{\beta} \\ 0 & & & \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \; G_n(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix} \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \frac{2}{\beta} & & & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} & & \\ & \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{\beta} \\ 0 & & & \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

matrislerini tanımlamışlar ve bu matrislerin determinantlarını incelemişlerdir. Daha sonra da $A^2-4B\neq 0$, α ve β da $t^2-At+B=0$'ın kökleri olmak üzere

$$C_n(A,B)=\begin{bmatrix} -\frac{A}{B^2} & -\frac{1}{B} & & & 0 \\ \frac{1}{B} & \frac{A}{B} & 1 & & \\ & \frac{1}{B} & \frac{A}{B} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}, \; D_n(A,B)=\begin{bmatrix} \frac{A}{B} & 2 & & & 0 \\ \frac{1}{B} & \frac{A}{B} & 1 & & \\ & \frac{1}{B} & \frac{A}{B} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$$

matrislerinin permanent ve determinantlarını incelemişlerdir. Daha sonra da bu diziler için çarpanlama (faktorizasyon) formülleri elde etmişlerdir.

[Kılıç ve ark., 2008 (c)]'de yazarlar, Hessenberg matrislerin determinant ve permanentleriyle ikinci mertebeden lineer reküranslar arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Yani, α *ve* β, $t^2-At+B=0$'ın kökleri olmak üzere,

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & -\alpha\beta & & & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & -\alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\alpha\beta \\ 0 & & & 1 & \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlamışlar ve tanımlanan bu matris yardımıyla başka matrisler de tanımlayarak permanent hesaplamışlardır.

[Kılıç ve ark., 2010 (c)]'de yazarlar, bazı Hessenberg matrislerin permanent ve determinantları ile genelleştirilmiş Lucas dizisinin arasındaki bağıntıyı incelemiştir. Bu bağlamda,

$$Q_n = \begin{bmatrix} A^2+3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & A^2+1 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 1 & A^2+1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & & \ddots & \ddots & A^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & A^2+1 \end{bmatrix}, D_n = \begin{bmatrix} A^2+3 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & A^2+1 & -1 & & & \vdots \\ 1 & 1 & A^2+1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & & \ddots & \ddots & A^2+1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & A^2+1 \end{bmatrix}$$

matrislerin sırasıyla determinant ve permanentini hesaplamışlardır. Bu tipte daha başka matrisler de tanımlayarak determinant ve permanentlerini hesaplayarak Lucas dizileri arasındaki bağıntıyı incelemişlerdir.

[Kılıç ve ark., 2009 (c)]'de yazarlar, tridiagonal matrisler permanent ve determinantları ile ikinci mertebeden lineer reküranslar arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Daha açık bir ifadeyle yazarlar,

$$T_n = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta & & & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & & \\ & \alpha & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & & \alpha & \alpha+\beta \end{bmatrix}, H_n = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 2\beta & & & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & & \\ & \alpha & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & & \alpha & \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

matrislerini tanımlamışlar ve determinantlarını hesaplamışlardır.

[Kılıç ve ark., 2010 (b)]'de yazarlar, genelleştirilmiş Fibonacci ve Pell dizileri ile Hessenberg matrislerin permanentleri üzerine çalışmışlardır. Bu amaçla,

$$H_n = \begin{bmatrix} A^2+1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & A^2+1 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 1 & A^2+1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & & \ddots & \ddots & A^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & A^2+1 \end{bmatrix}, T_n = \begin{bmatrix} A^2+1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & A^2+1 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 1 & A^2+1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & & \ddots & \ddots & A^2+1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerinin determinantlarını hesaplamışlardır. Daha sonra da,

$$W_n=\begin{bmatrix} A^2+1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A^2 & A^2+1 & -1 & & & \vdots \\ A^2 & A^2 & A^2+1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & A^2 & A^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ A^2 & & \ddots & \ddots & A^2+1 & -1 \\ A^2 & A^2 & \cdots & A^2 & A^2 & A^2+1 \end{bmatrix}, V_n=\begin{bmatrix} A^2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A^2 & A^2+1 & -1 & & & \vdots \\ A^2 & A^2 & A^2+1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & A^2 & A^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ A^2 & & \ddots & \ddots & A^2+1 & -1 \\ A^2 & A^2 & \cdots & A^2 & A^2 & A^2+1 \end{bmatrix}$$

matrislerinin de determinantını hesaplamışlar ve elde edilen sonuçlar ile Fibonacci ve Pell sayıları arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

[Kılıç ve ark., 2011]'de yazarlar, her hangi başlangıç şartlarına sahip, $k-$mertebeli lineer reküransların k-dizileri üzerinde çalışmışlardır. Bu bağlamda, $n>0$ ve $1\leq i\leq k$ için,

$$t_n^i=\begin{cases} r_1, & n=1-i \\ r_2, & n=2-i \\ \vdots & \vdots \\ r_k, & n=k-i \\ 0, & di\check{g}er \end{cases}, 1-k\leq n\leq 0$$

başlangıç koşullarıyla,

$$t_n^i=c_1t_{n-1}^i+c_2t_{n-2}^i+\cdots+c_kt_{n-k}^i$$

dizisini tanımlamışlardır. Genelleştirilmiş Binet formülü ve üreteç fonksiyonu vermişlerdir. Bunun yanında Hessenberg matrislerin determinantları ve bu dizinin elemanları arasındaki ilişkileri de incelemişlerdir.

[Kılıç ve ark., 2009 (b)]'de yazarlar, dördüncü mertebeden reküranslar üzerine çalışmışlar ve matris metotlarla kombinatorial sunuşlar ve kesin (explicit) formüller elde etmişlerdir. Dahası tanımlanan matrislerle de toplamlar arasındaki ilişkileri de incelemişlerdir.

[Kılıç ve ark., 2008 (b)]'de yazarlar, $k-$mertebeli Fibonacci ve Lucas sayıları ile iki parçalı bir grafın 1-çarpanları arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

[Kılıç ve ark., 2009 (a)]'da yazarlar, bir tipteki iki parçalı grafın 1-çarpanları (factors) ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas–p sayıları arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Ayrıca yazarlar, permanentleri genelleştirilmiş Fibonacci-p sayılarını ve toplamlarını verecek şekilde

$$M(n,p)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ T(n,p)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlamışlardır.

[Lee ve ark., 2003]'da Lee ve Kim $k \geq 2$ için $\{g(k)_n\}$ ile gösterdikleri $k-$Fibonacci dizisine bağlı olarak $k \geq 2$ sayıları için $g_n = g(k)_{n+k-2}$ ve

$$f(k)_{ij} = \begin{cases} g_{i-j+1} & i-j+1 \geq 0, \\ 0 & i-j+1 < 0, \end{cases}$$

olmak üzere, elemanları bu dizinin elemanlarına bağlı olan $n \times n$ mertebeli $k-$Fibonacci matrisini

$$F(k)_n = \left[f(k)_{ij} \right]$$

ve $j \leq 0$ için $q(k)_{ij} = 0$ iken

$$q(k)_{ij} = q(k)_{ji} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{k} q(k)_{i,j-l}, & i+1 \leq j \\ \sum_{l=1}^{k} q(k)_{i,i-l} + g_1, & i = j \end{cases}$$

olmak üzere $n \times n$ mertebeli $k-$simetrik Fibonacci matrisini

$$L(k)_n = \left[q(k)_{ij} \right]_n$$

tanımlamışlar ve bu matrislerin özeliklerini araştırmışlardır.

[Shannon ve ark., 2006]'de yazarlar, Cordonnier, Perrin ve Padovan sayı dizileri ve bu dizilerle alakalı polinomlar üzerine çalışmışlar ve bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

[Öcal ve ark., 2005]'de yazarlar, $k-$genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları için determinant ve permanent ifadeleri elde etmişlerdir. Bu bağlamda yazarlar,

$$H_{n,k}=\begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i^2 & i & 1 & i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ i^{k-1} & i^{k-2} & i^{k-3} & i^{k-4} & \cdots & 0 \\ 0 & i^{k-1} & i^{k-2} & i^{k-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & i^{k-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } C_{n,k}=\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & -i & 0 & \cdots & 0 \\ i^2 & i & 1 & -i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ i^{k-1} & i^{k-2} & i^{k-3} & i^{k-4} & \cdots & 0 \\ 0 & i^{k-1} & i^{k-2} & i^{k-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & i^{k-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerinin sırasıyla determinant ve permanentlerini hesaplamışlar ve bu ifadenin genelleştirilmiş Fibonacci sayılarına eşit olduğunu göstermişlerdir. Bazı özel durumlarının da Lucas sayılarına eşit olduğunu göstermişlerdir. Bunun yanında verilen diziler için Binet formülü elde etmişlerdir.

[Kaygısız ve ark., 2012]'de yazarlar, genelleştirilmiş Perrin dizisini c_i'ler sabit olmak üzere,

$$R_n = c_{k-2}R_{n-2} + c_{k-3}R_{n-3} + \cdots + c_1 R_{n-k+1} + c_0 R_{n-k}$$

şeklinde tanımlamışlar ve bu dizinin terimlerinin matris metotla elde edilişi üzerine çalışmışlardır.

[Kılıç, 2008 (a)]'de yazar Tribonacci sayı dizisi ve toplamları için yeni rekürans bağıntıları ve üreteç matrisleri elde etmiştir. Bu bağlamda,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ve \quad B_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_n & T_{n+1} & T_n + T_{n-1} & T_n \\ S_{n-1} & T_n & T_{n-1}+T_{n-2} & T_{n-1} \\ S_{n-2} & T_{n-1} & T_{n-2}+T_{n-3} & T_{n-2} \end{bmatrix}$$

matrisleri yardımıyla, matris özelliklerini de kullanarak tribonacci sayıları için farklı özellikler elde etmiştir. Bunun yanında, bu dizinin permanent olarak ifadesi üzerine de çalışmıştır.

[Cahill ve ark., 2003]'da Cahill ve arkadaşları üç bant matrislerin determinantları ve özdeğerleri yardımıyla Chebyshev polinomlarını kullanarak $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$F_{n+1} = i^n \frac{\sin\left(\left(n+1\right)\cos^{-1}\left(-\frac{i}{2}\right)\right)}{\sin\left(\cos^{-1}\left(-\frac{i}{2}\right)\right)}$$

ve

$$L_n = 2i^n \cos\left(n \cos^{-1}\left(-\frac{i}{2} \right) \right)$$

formüllerini elde etmişlerdir.

[Cahill ve ark., 2002]'de yazarlar, genel bir alt Hessenberg matrisinin determinantını hesaplamışlar ve bu matrisin özel durumları için determinantı Fibonacci ve Lucas sayılarını verecek şekilde matrisler tanımlamışlardır.

[Seibert ve ark., 2006(b)]'de yazarlar,

$$B(n) = \begin{pmatrix} p^2-2q & -q & & & & \\ -q & p^2-2q & -q & & & \\ & -q & p^2-2q & -q & & \\ & & -q & p^2-2q & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -q \\ & & & & -q & p^2-2q \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplamışlar Chebyshev polinomlarının da özelliklerinden faydalanarak Fibonacci benzeri sayılar ve bu sayıların toplamları için bazı çarpanlama formülleri vermişlerdir.

[Halıcı ve ark., 2009]'da yazarlar, Fibonacci $Q-$matrisi olarak bilinen,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinden hareketle,

$$Q_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q_{-m} = \begin{pmatrix} -m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q_{\sqrt{-m}} = \begin{pmatrix} \sqrt{-m} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerini incelemişler ve Fibonacci sayıları için bazı yeni özellikler elde etmişlerdir.

[Yılmaz ve ark, 2010]'da yazarlar, determinantı Fibonacci sayıları olan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & & 0 \\ 1 & 1 & -1 & & & & \\ & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & -1 & \\ & & & & 1 & 1 & -1 \\ 0 & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin pozitif tam sayı kuvvetlerini incelemişler ve bu matrisin pozitif tam sayı kuvvetlerini verecek şekilde bir formül elde etmişlerdir.

[Bozkurt ve ark, 2010]'da yazarlar, Fibonacci sayıları için F_{n+1} $(n+1)-$inci Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$F_{n+1}=\prod_{k=1}^{n} i^{2k+1}\sqrt{3+2\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)}$$

şeklinde bir kompleks çarpanlama (factorization) formülü elde etmişlerdir. Bunun yanında çift mertebeli,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & & 0 \\ -1 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & -1 \\ 0 & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi için tam sayı kuvvetlerini veren bir formül elde etmişlerdir.

[Fonseca, 2007]'de yazar, bazı $k-$tridiagonal Toeplitz matrislerin karakteristik polinomları için kesin ifadeler elde etmiştir. Bu bağlamda,

$$T_n=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ b & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & b & a \end{pmatrix}$$

matrisinin öz değerlerini,

$$\lambda_l=a+2\sqrt{b}\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)$$

olarak elde etmiştir. Bu tipte diğer bazı özel Toeplitz matrislerin öz değerleri için de formüller elde etmiştir.

[Cerin, 2007]'da yazar, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının toplamsal ve çarpımsal özelikleri incelemiş ve yeni formüller türetmiştir.

[Feng, 2011]'de yazar, Laplace açılımı ile tridiagonal matrislerin determinantının hesaplanması yolu ile Fibonacci sayılarının özelliklerini incelemiştir.

[Köken ve ark, 2010]'de yazarlar, Fibonacci $Q-$matrisine benzer olarak Lucas Q_L matrisini tanımlamışlardır. Matris özelliklerini kullanarak Lucas sayıları için yeni eşitlikler elde etmişlerdir.

[Shen ve ark., 2011]'de yazarlar, elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olacak şekilde,

$$A_n = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_n \\ F_n & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n & F_1 & \cdots & F_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_2 & F_3 & F_4 & \cdots & F_1 \end{pmatrix} \text{ ve } B_n = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & \cdots & L_n \\ L_n & L_1 & L_2 & \cdots & L_{n-1} \\ L_{n-1} & L_n & L_1 & \cdots & L_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_2 & L_3 & L_4 & \cdots & L_1 \end{pmatrix}$$

sirkülant matrisler tanımlamışlar ve tanımlanan bu matrislerin determinant ve terslerini genel bir ifade ile elde etmişlerdir.

[Bozkurt ve Tam, 2012]'de elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları olacak şekildeki sirkülant matrislerin determinant ve tersleri için formüller elde etmişlerdir.

[Yılmaz ve ark., 2011 (d)]'de yazarlar (0,1) elemanlı, alt ve üst köşegen elemanları matrisin mertebesine göre değişen, simetrik $n-$ kare,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & \ddots & 0 \\ 1 & & & & & & 1 \\ 0 & \ddots & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

matrisini tanımlamışlar ve bu matrisin tam sayı kuvvetlerini genel olarak ifade etmişler ve Fibonacci sayıları cinsinden ifade edilebildiklerini göstermişlerdir.

[Horadam, 1996]'da yazar, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin toplamları, Binet formülleri ile bu iki sayı dizisi arasında bir takım ilişkiler elde etmiştir. Bunun yanında pozitif tam sayıların Jacobsthal sunuşlarını vermiştir.

[Esmaeili, 2006]'de yazar, beş yeni Fibonacci-Hessenberg matrisi tanımlamıştır. Bunun yanında, iki boyutlu Fibonacci dizisi kavramını tanımlamış ve Fibonacci-Hessenberg matrisleri ve genel hallerinin bu kavramı sağladığını göstermiştir.

[Nallı ve ark., 2009]'de yazarlar, determinantları Fibonacci ve Lucas sayıları olacak şekilde simetrik tridiagonal matris ailesi tanımlamışlardır.

[Gogin ve ark., 2006]'de yazarlar, MacWilliams dönüşüm matrisleri ile bilinen Fibonacci, Lucas ve Padovan sayıları arasında ilişki kurmuşlardır.

[Lee ve ark., 2001]'de yazarlar, $k-$genelleştirilmiş Fibonacci dizisi üzerine çalışmışlar ve bu dizi için bir genelleştirilmiş Binet formülü elde etmişlerdir. Bunun yanında $k-$genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için bazı kombinatorial gösterimler elde etmişlerdir.

[Kılıç, 2009 (d)]'de yazar

$$M(n,p)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris tanımlamış ve permanentlerini Pell (p,i) sayıları olarak ifade etmiştir.

[Taşçı ve ark., 2004]'de yazarlar, Lucas sayıları için genel bir tanım vermişler ve matrisler yardımıyla bazı özellikler elde etmişlerdir. Ayrıca, genelleştirilmiş $k-$mertebeli Lucas dizileri ile Fibonacci dizileri arasında ilişki elde etmişlerdir.

[Seibert ve ark., 2006]'de yazarlar, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının farklı çarpımları (factorization) üzerine bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Yani Fibonacci-tipi ve Lucas-tipi sayıların çarpımlarını

$$U_n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(p-2\sqrt{q}\cos\frac{k\pi}{n}\right),\ n\geq 2$$
$$V_n=\prod_{k=1}^{n}\left(p-2\sqrt{q}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right),\ n\geq 1$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Bunun ispatında

$$U(n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & p & \sqrt{q} & & \\ & \sqrt{q} & p & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{q} \\ & & & \sqrt{q} & p \end{pmatrix} \text{ ve } V(n)=\begin{pmatrix} p & \sqrt{2q} & & & \\ \sqrt{2q} & p & \sqrt{q} & & \\ & \sqrt{q} & p & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{q} \\ & & & \sqrt{q} & p \end{pmatrix}$$

matrislerini kullanmışlardır.

[Lee ve ark., 2010]'de yazarlar, $k-$Lucas sayılarını

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^1 & (-1)^2 & (-1)^3 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 1 & 1 & (-1)^1 & (-1)^2 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 1 & 1 & 1 & (-1)^1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (-1)^1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin bazı özel matrislerle Hadamard çarpımıyla elde ettiği matrislerin determinantı olarak ifade etmiştir.

[Aşçı ve ark., 2007]'de yazarlar, Fibonacci polinomlarının ortogonalliği üzerine çalışmışlar, Fibonacci, Lucas ve bazı özel ortogonal polinomlar için üreteç matrisleri tanımlamışlardır.

[Yazlık ve ark., 2013]'de yazarlar, elemanları Horadam sayıları olan sirkülant matrislerin determinant ve terslerini hesaplamışlardır.

2. BİLİNEN BAZI SAYI DİZİLERİ ve MATRİSLER

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, Hessenberg matrisler üzerine çalışılmış ve tanımlanan matrislerin permanent ve determinantları ile bilinen bazı sayı dizileri arasında ilişki kurulmuştur. İkinci kısımda, Padovan sayı dizileri üzerinde durulmuş ve Padovan sayı dizisinin bazı özellikleri matrisler yardımıyla elde edilmiştir. Son kısımda da elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olan sirkülant matrisler için determinant ve tersleri için formüller elde edilmiştir.

Lemma 2.1.1. [Cahill ve ark., 2003] M_n bir $n-$kare tridiagonal matris olmak üzere,

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

bu matrisin determinantı ise,

$$\det A_n = a_{n,n}\left|A_{n-1}\right| - a_{n-1,n}a_{n,n-1}\left|A_{n-2}\right|$$

dir.

Lemma 2.1.2. [Cahill ve ark., 2002] M_n bir $n-$kare alt Hessenberg matris olmak üzere,

$$M_n = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & & \vdots \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & m_{n-1,n} \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

ise,

$$\det M_n = m_{nn}\cdot\det M_{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1}\left((-1)^{n-r} m_{n,r}\prod_{j=r}^{n-1} m_{j,j+1}\cdot\det M_{r-1}\right),\quad n\geq 2$$

dir.

2.1. İkinci ve Üçüncü Mertebeden Lineer Rekürans Bağıntısıyla Tanımlı Bazı Sayı Dizilerinin Permanent Olarak İfadesi

Bu kısımda bazı özel Hessenberg matrisler tanımlanmış ve bu matrislerin permanentleri Tanım 1.3.4 ile verilen *contraction* metodu ile hesaplanmıştır.

Teorem 2.1.1. [Yılmaz ve ark., 2011 (a)] H_n $(0,1,-1)$ elemanlarından oluşan tek mertebeli

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.1.1)$$

bir $n-$kare $(n = 2k-1,\ k = 1,2,\ldots)$ üst Hessenberg matris olsun. O halde P_n, $n.$ Pell sayısı olmak üzere,

$$perH_n = perH_n^{(n-2)} = P_k$$

dir.

İspat: H_n matrisinin tanımından, bu matrise *contraction* metodu uygulanabilir. Metot ilk sütuna göre uygulanırsa,

$$H_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & (-1)^{n-1} & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & (-1)^n \\ & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, bu matrise de ilk sütuna göre tekrar *contraction* uygulanırsa,

$$H_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & (-1)^n \\ & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu metotla devam edilirse,

$$H_n^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & (-1)^n \\ & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Genel bir ifade ile $2 \le r \le n-4$ için,

$$H_n^{(r)} = \begin{pmatrix} P_{k+1} & 0 & P_k & & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad r = 2k-1;\ k = 1,2,...$$

ve

$$H_n^{(r)} = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k + P_{k+1} & -P_{k+1} & & & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad r = 2k;\ k = 1,2,...$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da,

$$H_n^{(n-3)} = \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_{k-2}+P_{k-1} & -P_{k-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olup, bu matrise de birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa,

$$H_n^{(n-2)} = \begin{pmatrix} P_k & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, böylece $perH_n = perH_n^{(n-2)} = P_k$ olup, ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.1.2. [Yılmaz ve ark., 2011 (a)] $n-$ kare üst Hessenberg K_n matrisi,

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & & & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

ile tanımlansın. O halde R_n, $n.$ Perrin sayısı olmak üzere,

$$perK_n = perK_n^{(n-2)} = R_n$$

dir.

İspat: K_n matrisinin tanımından, bu matrise *contraction* metodu uygulanabilir. İlk sütuna göre uygulanırsa,

$$K_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & & & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. $K_n^{(1)}$ matrisine de, matrisin tanımından dolayı birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa,

$$K_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & & & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu metotla devam edilirse $1 \le r \le n-4$ için,

$$K_n^{(r)} = \begin{pmatrix} R_{r+1} & R_{r+2} & R_r & & & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ifadesi ile genel bir şekilde ifade edilebilir. Buradan da,

$$K_n^{(n-3)} = \begin{pmatrix} R_{n-2} & R_{n-1} & R_{n-3} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup, bu matrise de birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa,

$$K_n^{(n-2)} = \begin{pmatrix} R_{n-1} & R_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, böylece

$$perK_n = perK_n^{(n-2)} = R_n$$

olup ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.1.3. [Yılmaz ve ark., 2011 (c)] $n-$ mertebeli W_n matrisi,

$$W_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & & & & 0 \\ 0 & 3 & 2 & & & & \\ -1 & 0 & 3 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 3 & 2 & \\ & & & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & & & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanan bir matris olsun. O halde, J_n $n.$ Jacobsthal sayısı olmak üzere,

$$perW_n = perW_n^{(n-2)} = J_{n+1}$$

dir.

İspat: W_n matrisinin tanımı gereği, bu matrise son sütuna göre *contraction* kuralı uygulanabilir. O halde,

$$W_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & & & & 0 \\ 0 & 3 & 2 & & & & \\ -1 & 0 & 3 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 3 & 2 & \\ & & & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & & & & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $W_n^{(1)}$ matrisinin de son sütuna *contraction* kuralı uygulanırsa,

$$W_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & & & & 0 \\ 0 & 3 & 2 & & & & \\ -1 & 0 & 3 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 3 & 2 & \\ & & & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & & & & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

olur. $W_n^{(2)}$ matrisine de *contraction* kuralını son sütuna göre uygulanırsa,

$$W_n^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & & & & 0 \\ 0 & 3 & 2 & & & & \\ -1 & 0 & 3 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 3 & 2 & \\ & & & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & & & & -5 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu metoda devam edilirse, $r-$inci *contraction* uygulanmış matris,

$$W_n^{(r)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & & & & 0 \\ 0 & 3 & 2 & & & & \\ -1 & 0 & 3 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & 3 & 2 & \\ & & & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & & & & -J_{r+1} & -2J_r & J_{r+2} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. $(n-3)$. adımda *contraction* uygulanmış matris ise,

$$W_n^{(n-3)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -J_{n-2} & -2J_{n-3} & J_{n-1} \end{pmatrix}$$

olup bu matrise de son sütununa göre *contraction* metodu uygulanarak,

$$W_n^{(n-2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2J_{n-2} & J_n \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, buradan

$$perW_n = perW_n^{(n-2)} = 3J_{n-1} - 4J_{n-2} = J_{n+1}$$

olup istenendir. ■

Teorem 2.1.4. [Yılmaz ve ark., 2012 (c)] S_n matrisi $n-$kare $(n = 2k+1,\ k = 2,3,\ldots)$ bir üst Hessenberg matris olsun. Daha açık bir ifade ile,

$$S_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.1.4)$$

şeklinde tanımlansın. O halde, P_n $n.$ Pell sayısı olmak üzere,

$$perS_n = perS_n^{(n-2)} = \sum_{i=k-2}^{k+2} P_i$$

dir.

İspat: (2.1.4) ile tanımlanan matrisin bazı permanentlerini, matrislerin mertebelerine göre irdeleyelim:

$$k=2 \text{ için } n=5; \quad perS_5 = P_4+P_3+P_2+P_1+P_0 = \sum_{i=0}^{4} P_i = 20$$

$$k=3 \text{ için } n=7; \quad perS_7 = P_5+P_4+P_3+P_2+P_1 = \sum_{i=1}^{5} P_i = 49$$

$$k=4 \text{ için } n=9; \quad perS_9 = P_6+P_5+P_4+P_3+P_2 = \sum_{i=2}^{6} P_i = 118$$

$$k=5 \text{ için } n=11; \quad perS_{11} = P_7+P_6+P_5+P_4+P_3 = \sum_{i=2}^{7} P_i = 285$$

olup daha genel bir ifadeyle;

$$perS_n = perS_{2k+1} = \sum_{i=k-2}^{k+2} P_i; \quad n = 2k+1$$

olur. Görüldüğü gibi tek mertebeli üst Hessenberg matrislerin permanentleri ardışık beş Pell sayısının toplamını vermektedir.

Tanımlanan matrisin ilk sütununa göre *contraction* kuralını uygularsak:

$$S_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $S_n^{(1)}$ matrisine de birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa;

$$S_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 3 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. $S_n^{(2)}$ matrisinde de birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa;

$$S_n^{(3)} = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 9 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & -1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & -1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & 1 & \end{pmatrix}$$

olur. Daha genel bir ifadeyle $2 < r < n-3$ için;

$$S_n^{(r)} = \begin{pmatrix} \sum_{i=t-1}^{t+3} P_i - 6 & 6 & \sum_{i=t-1}^{t+3} P_i & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; r = 2t+1, \; (t = 1, 2, \ldots);$$

$r = 2s$ için $(\mathrm{s} = 2, 3, \ldots)$;

$$S_n^{(r)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=s-2}^{s+2} P_i & \sum\limits_{i=s-1}^{s+3} P_i - \left(\sum\limits_{i=s-2}^{s+2} P_i + 6\right) & -\left(\sum\limits_{i=s-2}^{s+2} P_i - 6\right) & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dir. $k \neq 2$ olmak üzere;

$$S_n^{(n-3)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=k-3}^{k+1} P_i & \sum\limits_{i=k-2}^{k+2} P_i - \left(\sum\limits_{i=k-3}^{k+1} P_i + 6\right) & -\left(\sum\limits_{i=k-3}^{k+1} P_i - 6\right) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. $S_n^{(n-3)}$ matrisinde de birinci sütuna göre *contraction* uygulanırsa;

$$S_n^{(n-2)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=k-2}^{k+2} P_i - 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, buradan,

$$perS_n = perS_n^{(n-2)} = \sum_{i=k-2}^{k+2} P_i$$

olup istenendir. ∎

Teorem 2.1.5. [Yılmaz ve ark., 2013] $M_n = [m_{i,j}]_{n \times n}$ $n-$kare alt Hessenberg matrisi,

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & -3 & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 2 & (-1)^{n-1} \\ & & & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. O halde, L_n $n.$ Lucas sayısı olmak üzere

$$perM_n = L_{n-2}$$

dır.

İspat: Son sütuna göre *contraction* metodu uygulayarak teoremi ispatlayalım. Buna göre, ardışık contraction uygulanmış matris, $1 \le r \le n-4$ için n çiftse;

$$M_n^{(r)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 2 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 2 & (-1)^{r-1} \\ & & & & F_{r+1} & (-1)^{r-2}(F_{r+2}-F_{r+1}) & F_{r+2} \end{pmatrix}$$

ve n tekse;

$$M_n^{(r)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 2 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 2 & (-1)^{r} \\ & & & & F_{r+1} & (-1)^{r-1}(F_{r+2}-F_{r+1}) & F_{r+2} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu metotla devam edilirse,

$$M_n^{(n-3)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ F_{n-3} & F_{n-3}-F_{n-1} & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, bu matriste de son sütuna göre contraction uygulanırsa,

$$M_n^{(n-2)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$$

olup, $perM_n = perM_n^{(n-2)} = 2F_n - 3F_{n-2} = L_{n-2}$ şeklinde istenen elde edilir. ■

Teorem 2.1.6. [Yılmaz ve ark., 2013] $N_n = [n_{i,j}]_{n\times n}$ $n-$kare alt Hessenberg matrisi,

$$N_n = \begin{pmatrix} 3 & -2 & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 2 & (-1)^{n-1} \\ & & & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. O halde,

$$perN_n = perN_n^{(n-2)} = \sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$$

dır.

İspat: Son sütuna göre *contraction* metodu uygulayarak teoremi ispatlayalım. Buna göre, ardışık contration uygulanmış matris, $1 \le r \le n-4$ için, n çiftse;

$$N_n^{(r)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 2 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 2 & (-1)^{r-1} \\ & & & & \sum_{i=0}^{r+1} F_i & (-1)^r \sum_{i=0}^{r} F_i & \sum_{i=0}^{r+2} F_i \end{pmatrix}$$

ve n tekse

$$N_n^{(r)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 2 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 2 & (-1)^{r} \\ & & & & \sum_{i=0}^{r+1} F_i & (-1)^{r-1} \sum_{i=0}^{r} F_i & \sum_{i=0}^{r+2} F_i \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu metotla devam edilirse,

$$N_n^{(n-3)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \sum_{i=0}^{n-2} F_i & -\sum_{i=0}^{n-3} F_i & \sum_{i=0}^{n-1} F_i \end{pmatrix}$$

elde edilir ki, bu matriste de son sütuna göre contraction uygulanırsa,

$$N_n^{(n-2)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \sum_{i=0}^{n-2} F_i & \sum_{i=0}^{n} F_i \end{pmatrix}$$

olup, $perN_n = perN_n^{(n-2)} = \sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$ şeklinde istenen elde edilir. ■

Tanım 1.3.6 de tanımlanan *H dönüştürücü matrisi* ile yukarıda tanımlanan H_n, K_n, W_n, M_n matrislerinin Hadamard çarpımları sırasıyla $\boldsymbol{H_n}$, $\boldsymbol{K_n}$, $\boldsymbol{W_n}$ ve $\boldsymbol{M_n}$ olsun. O halde, aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.1.1: $\boldsymbol{H_n}$, $\boldsymbol{K_n}$,$\boldsymbol{W_n}$ ve $\boldsymbol{M_n}$ matrisleri yukarıdaki gibi tanımlanan matrisler olsun. O halde

$$\det \boldsymbol{H_n} = P_k,\ \ n = 2k-1\ (k = 1,2,...),$$

$$\det \boldsymbol{K_n} = R_n,$$

$$\det \boldsymbol{W_n} = J_{n+1},$$

$$\det \boldsymbol{M_n} = L_{n-2}$$

dir. ■

2.2. Padovan Sayı Dizisi ve Matrisler Yardımıyla Bazı Özellikleri

Bu kısımda Padovan sayı dizisi üzerine çalışılmış ve matrisler yardımıyla Padovan dizisi için bazı özellikler elde edilmiştir. Bu kısım "*F. Yılmaz, D. Bozkurt, Some Properties of Padovan Sequence by Matrix Methods, ARS Combinatoria, Volume 104, Nisan 2012*" isimli makalede yayınlanmıştır.

Öncelikle $n \geq 2$ için, dizinin elemanlarının toplamını

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-2} P_k + 1$$

ile gösterelim. Buradan da,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-1} & P_{n-3} \\ S_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-2} & P_{n-4} \\ S_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-3} & P_{n-5} \end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlayalım. Padovan sayı dizisinin tanımından $n \geq 2$ olmak üzere,

$$B_n = AB_{n-1}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 2.2.1. $n \geq 2$ için $A^n = B_n$'dir.

İspat: $B_n = AB_{n-1}$ eşitliği kullanılarak, tümevarım yoluyla, $B_n = A^{n-1}B_1$ eşitliği yazılabilir. Padovan sayı dizisinin tanımından, $A = B_1$ olduğu görülebilir. Buradan da $A^n = B_n$ sonucu elde edilir ki, istenendir. ■

Sonuç 2.2.1. $n \geq 2$ için,

$$S_n = S_{n-2} + S_{n-3} + 1$$

dir.

İspat: İfadenin n üzerinden tümevarımla ispatı kolayca yapılabilir. ■

Sonuç 2.2.1'in bir sonucu olarak, aynı zamanda

$$\sum_{k=0}^{n-5} P_k = P_n - 2$$

eşitliği de yazılabilir.

Sonuç 2.2.2. $m, n \geq 2$ için

$$S_{n+m-1} = S_{n-1} + P_{n-2}S_{m-1} + P_{n-1}S_{m-2} + P_{n-3}S_{m-3}$$

dir.

İspat: B_n matrisinin tanımından, $m, n \geq 2$ için

$$B_{n+m} = B_n B_m = B_m B_n$$

dir. Matris çarpım özelliği kullanılarak, sonuç kolayca görülür. ■

Padovan sayı dizisinin karakteristik denklemi

$$x^3 - x - 1 = 0$$

olup denklemin kökleri, $w = (108 + 12\sqrt{69})^{1/3}$ olmak üzere,

$$r_1 = \frac{w}{6} + \frac{2}{w}$$
$$r_2 = -\frac{w}{12} - \frac{1}{w} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{w}{6} - \frac{2}{w}\right)$$
$$r_3 = -\frac{w}{12} - \frac{1}{w} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{w}{6} - \frac{2}{w}\right)$$

dir. Görüldüğü üzere karakteristik denklem r_1 tek reel kök olmak üzere birbirinden farklı köklere sahiptir. Bu reel köke aynı zamanda *Plastik sayı* da denmektedir. Ardışık iki Padovan sayısının oranının limiti $r_1 = 1.324718$ değerine yakınsamaktadır.

Dizinin üreteç fonksiyonu $g(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \cdots + P_n x^n + \cdots$ olup,

$$xg(x) = xP_0 + P_1 x^2 + P_2 x^3 + P_3 x^4 + \cdots + P_n x^{n+1} + \cdots$$

$$x^2 g(x) = x^2 P_0 + P_1 x^3 + P_2 x^4 + P_3 x^5 + \cdots + P_{n-1} x^{n+2} + \cdots$$

$$x^3 g(x) = x^3 P_0 + P_1 x^4 + P_2 x^5 + P_3 x^6 + \cdots + P_{n-2} x^{n+3} + \cdots$$

ifadeleri yazılabilir (Koshy, T. , 2001, Sayfa 227). Buradan da,

$$g(x) - x^2 g(x) - x^3 g(x) = P_0 + P_1 x + (P_2 - P_0)x^2 + \cdots + (P_n - P_{n-2} - P_{n-3})x^n$$
$$g(x)[1 - x^2 - x^3] = x + 1$$

olup,

$$g(x) = \frac{x+1}{1 - x^2 - x^3} = \frac{a}{1 - r_1 x} + \frac{b}{1 - r_2 x} + \frac{c}{1 - r_3 x}$$
$$= a\sum_{0}^{\infty} r_1^n x^n + b\sum_{0}^{\infty} r_2^n x^n + c\sum_{0}^{\infty} r_3^n x^n$$
$$= ar_1^n + br_2^n + cr_3^n$$

olarak yazılabilir. Polinom eşitliği kullanılarak,

$$a=\frac{(r_1+1)r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}$$
$$b=\frac{(r_2+1)r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}$$
$$c=\frac{(r_3+1)r_3}{(r_2-r_3)(r_1-r_3)}$$

ifadesi elde edilir ki, buradan Padovan sayı dizisi,

$$P_{n+1}=\frac{(r_1+1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}r_1^{n+1}+\frac{(r_2+1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}r_2^{n+1}+\frac{(r_3+1)}{(r_2-r_3)(r_1-r_3)}r_3^{n+1}$$

ifadesi ile de elde edilir.

A matrisinin öz değerleri $1, r_1, r_2$ ve r_3 olsun. D köşegen matrisi ve V matrisi

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&r_1&0&0\\0&0&r_2&0\\0&0&0&r_3\end{pmatrix} \text{ ve } V=\begin{pmatrix}-1/2&0&0&0\\1/2&r_1+1&r_2+1&r_3+1\\1/2&r_1^2&r_2^2&r_3^2\\1/2&r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Matris çarpımı ile $AV=VD$ olduğu kolayca görülebilir. r_1, r_2 ve r_3 kökleri birbirinden farklı olduğu için $\det V\neq 0$ dır.

Teorem 2.2.1. $n\geq 2$ için,

$$S_{n-1}=P_{n-2}+P_{n-1}+P_{n-3}-1$$

dir.

İspat: $AV=VD$ ve $\det V\neq 0$ olduğundan, $V^{-1}AV=D$ ifadesi yazılabilir. Yani, A matrisi ile D matrisi benzer matrislerdir. O halde $A^nV=VD^n$ dir. Lemma 2.2.1'den,

$$B_nV=VD^n \tag{2.1.1}$$

yazılabilir. (2.2.1) eşitliğindeki matris çarpımındaki matrislerin $(2,1)-$inci elemanlarının eşitliğinden, istenen sonuç elde edilir. ■

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \text{ ve } K_n=\begin{pmatrix}S_n&S_{n-4}+1&-S_{n-2}&-S_{n-1}\\S_{n-1}&S_{n-5}+1&-S_{n-3}&-S_{n-2}\\S_{n-2}&S_{n-6}+1&-S_{n-4}&-S_{n-3}\\S_{n-3}&S_{n-7}+1&-S_{n-5}&-S_{n-4}\end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlayalım.

Teorem 2.2.2. $n\geq 2$ için $R^n=K_n$'dir.

İspat: $S_n = S_{n-2} + S_{n-3} + 1$ ve $S_{n+1} = S_n + S_{n-1} - S_{n-3}$ eşitlikleri kullanılarak, $K_n = RK_{n-1}$ ifadesi yazılabilir. Tümevarım metodu ile $K_n = R^{n-1}K_1$ olarak da yazılabilir. R ve K_n matrislerinin tanımından, $R = K_1$ yazılabilir. Böylece de istenen elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur. ■

R matrisinin karakteristik denklemi $x^4 - x^3 - x^2 + 1 = 0$ olup kökleri de $1, r_1, r_2$ ve r_3 dir.

Sonuç 2.2.3. $n > 2$ için $\{S_n\}$ dizisi

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} - S_{n-4}$$

ifadesini sağlar.

2.2.1. $\{4n\}$ Alt İndisli Padovan Sayı Dizisi Üzerine

Bu kısımda, $4n$ alt indisli Padovan sayıları incelendi. Bunun için öncelikle, üçüncü mertebeden yeni bir rekürans bağıntısı tanımlandı. Daha sonra da bu sayı dizisi için yeni bir üreteç matrisi verildi.

Lemma 2.2.1.1 $n>1$ için,

$$P_{4(n+1)} = 2P_{4n} + 3P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}, \quad P_0 = 1,\ P_4 = 2\ ve\ P_8 = 7$$

dir.

İspat: Tümevarım metodu ile ispat kolayca yapılır. ■

Burada da $4n$ alt indisli Padovan sayılarının toplamını

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_{4k}$$

şeklinde tanımlayalım ve aşağıdaki matrisleri verelim:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_n & P_{4k} & 3P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} & P_{4(k-1)} \\ s_{n-1} & P_{4(k-1)} & 3P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} & P_{4(k-2)} \\ s_{n-2} & P_{4(k-2)} & 3P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} & P_{4(k-3)} \end{pmatrix}$$

matris çarpım özelliği ile $H_n = WH_{n-1}$ olup aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.1.1 $n \geq 1$ için

$$H_n = W^n$$

dir.

W matrisinin tanımından da görüleceği üzere, matrisin öz değerleri r_1^4, r_2^4, r_3^4 ve 1'dir. Buna göre,

$$E = \begin{pmatrix} -5/16 & 0 & 0 & 0 \\ 1/16 & r_1^8 & r_2^8 & r_3^8 \\ 1/16 & r_1^4 & r_2^4 & r_3^4 \\ 1/16 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \text{ ve } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3^4 \end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlayalım.

Teorem 2.2.1.1 $n>1$ için,

$$s_n = \frac{P_{4n} + 4P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} - 1}{5}$$

dir.

İspat: r_1, r_2 ve r_3 birbirinden farklı olduğundan dolayı $\det E \neq 0$ olacaktır. Aynı zamanda $WE = E\Lambda$ eşitliği de sağlanmaktadır. Diğer bir ifade ile $W^n E = E\Lambda^n$'dir. Sonuç 2.2.5'ten de $H_n E = E\Lambda^n$ elde edilmektedir. Matris çarpımı ile (2,1) elemanlarının eşitliği kullanılarak teorem ispatlanmış olur. ■

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } U_n = \begin{pmatrix} s_{n+1} & (s_n - 2s_{n-1} - s_{n-2}) & -(2s_n - s_{n-1}) & -s_n \\ s_n & (s_{n-1} - 2s_{n-2} - s_{n-3}) & -(2s_{n-1} - s_{n-2}) & -s_{n-1} \\ s_{n-1} & (s_{n-2} - 2s_{n-3} - s_{n-4}) & -(2s_{n-2} - s_{n-3}) & -s_{n-2} \\ s_{n-2} & (s_{n-3} - 2s_{n-4} - s_{n-5}) & -(2s_{n-3} - s_{n-4}) & -s_{n-3} \end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlayalım. Buradan da aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.1.2 $n > 4$ için

$$K^n = U_n$$

dir.

İspat: Tümevarım metodu ile yapılır. ■

2.3. Pell ve Pell-Lucas Elemanlı Sirkülant Matrislerin Determinantları ve Tersleri

Bu bölümde sirkülant matrisler üzerinde çalışılmış ve bu bağlamda elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olacak şekilde sirkülant matrislerin determinantları ve tersleri için formüller elde edilmiştir. Bu kısım "*F. Yılmaz, D. Bozkurt, Determinants and inverses of circulant matrices with Pell and Pell-Lucas numbers, SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Valencia/Spain, 117, 2012*" isimli bildiride sunulmuştur.

Tanım 2.3.1: $\mathcal{P} = circ(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ ve $\mathcal{Q} = circ(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ sırasıyla Pell ve Pell-Lucas elemalarından oluşan sirkülant matrisler olsun. Diğer bir ifadeyle,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_{n-1} & P_n \\ P_n & P_1 & \cdots & P_{n-2} & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n & \cdots & P_{n-3} & P_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_2 & P_3 & \cdots & P_n & P_1 \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{n-1} & Q_n \\ Q_n & Q_1 & \cdots & Q_{n-2} & Q_{n-1} \\ Q_{n-1} & Q_n & \cdots & Q_{n-3} & Q_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_n & Q_1 \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

şeklinde sirkülant matrisler olsunlar.

2.3.1. Pell ve Pell-Lucas Elemanlı Sirkülant Matrislerin Determinantları

Bu kısımda yukarıda tanımlanan Pell ve Pell-Lucas elemanlı sirkülant matrislerin determinantları için formüller elde edilmiştir.

Teorem 2.3.1.1: $\mathcal{P}$, (2.3.1) deki gibi tanımlanan bir sirkülant matris olmak üzere $n \geq 2$ için

$$\det(\mathcal{P}) = (P_1 - P_{n+1})^{n-2}(P_1 - 2P_n) + \sum_{k=2}^{n-1}[P_{k-1}P_n^{n-k}(P_1 - P_{n+1})^{k-2}]$$

dir.

İspat: $n = 2$ ve $n = 3$ için $\det(\mathcal{P}) = -1$ ve $\det(\mathcal{P}) = 104$ olarak elde edilir. $n > 3$ için aşağıdaki matrisleri tanımlayalım:

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

ve

$$\mathcal{N}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{P_n}{P_1-P_{n+1}}\right)^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{P_n}{P_1-P_{n+1}}\right)^{n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{P_n}{P_1-P_{n+1}}\right)^{n-4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{P_n}{P_1-P_{n+1}}\right) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matris çarpımı kullanılarak aşağıda verilen $\mathcal{S}$ matrisi elde edilir:

$$\mathcal{S}=\mathcal{MPN}=\begin{pmatrix} 1 & g_n' & P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} & \cdots & P_2 \\ & g_n & P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} & \cdots & P_1 \\ & & P_1-P_{n-1} & & & & \\ & & -P_n & P_1-P_{n-1} & & & \\ & & & -P_n & P_1-P_{n-1} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & -P_n & P_1-P_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Burada

$$g_n' = P_n + \sum_{k=2}^{n-1} P_k \left(\frac{P_n}{1-P_{n+1}}\right)^{n-k}$$

$$g_n = P_1 - 2P_n + \sum_{k=2}^{n-1} P_{k-1} \left(\frac{P_n}{1-P_{n+1}}\right)^{n-k}$$

dır. Bilindiği üzere

$$\det(\mathcal{S}) = \det(\mathcal{M})\det(\mathcal{P})\det(\mathcal{N})$$

dir. Ayrıca $n > 3$ için

$$\det(\mathcal{M}) = \det(\mathcal{N}) = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \; veya \; n \equiv 2 \mod 4 \\ -1, & n \equiv 0 \; veya \; n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

dir. Yani

$$\det(\mathcal{M})\det(\mathcal{N}) = 1$$

olup, Laplace açılımından

$$\det(\mathcal{P}) = \det(\mathcal{S}) = (P_1 - P_{n+1})^{n-2} g_n$$

olarak elde edilir. ■

Teorem 2.3.1.2: $\mathcal{Q}$, (2.3.2) deki gibi tanımlanan bir sirkülant matris olmak üzere $n \geq 3$ için

$$\det(\mathcal{Q}) = 2(2 - Q_{n+1})^{n-2}(2 - 3Q_n) + 2\sum_{k=2}^{n-1}[(Q_{k+1} - 3Q_k)(Q_n - 2)^{n-k}(2 - Q_{n+1})^{k-2}]$$

dir.

İspat: $n = 3$ için Teorem 2.3.1.2 ifadesi kullanılarak $\det(\mathcal{Q}) = 2464$ olarak elde edilir. $n > 3$ için Teorem 2.3.1.1 ispatındaki yol izlenirse bu bağlamda;

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

ve

$$\mathcal{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{-2+Q_n}{Q_1-Q_{n+1}}\right)^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\dfrac{-2+Q_n}{Q_1-Q_{n+1}}\right)^{n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{-2+Q_n}{Q_1-Q_{n+1}}\right)^{n-4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \left(\dfrac{-2+Q_n}{Q_1-Q_{n+1}}\right) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerini tanımlayalım. Bu matrislerin çarpımından

$$\mathcal{U}=\mathcal{K}\mathcal{Q}\mathcal{L}$$

$$=\begin{pmatrix} Q_1 & u_n' & Q_{n-1} & Q_{n-2} & Q_{n-3} & \cdots & Q_2 \\ & u_n & Q_n-3Q_{n-1} & Q_{n-1}-3Q_{n-2} & Q_{n-2}-3Q_{n-3} & \cdots & Q_3-3Q_2 \\ & & Q_1-Q_{n+1} & & & & \\ & & 2-Q_n & Q_1-Q_{n+1} & & & \\ & & & 2-Q_n & Q_1-Q_{n+1} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & 2-Q_n & Q_1-Q_{n+1} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Burada

$$u_n=Q_1-3Q_n+\sum_{k=2}^{n-1}(Q_{k+1}-3Q_k)\left(\frac{Q_n-2}{Q_1-Q_{n+1}}\right)^{n-k}$$

$$u_n'=\sum_{k=2}^{n}Q_k\left(\frac{Q_n-2}{Q_1-Q_{n+1}}\right)^{n-k}$$

dır. Bilindiği üzere

$$\det(\mathcal{U})=\det(\mathcal{K})\det(Q)\det(\mathcal{L})$$

dir. Ayrıca $n>3$ için

$$\det(\mathcal{K})=\det(\mathcal{L})=\begin{cases} 1, & n\equiv 1 \ veya \ n\equiv 2 \mod 4 \\ -1, & n\equiv 0 \ veya \ n\equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

dir. Yani,

$$\det(\mathcal{K})\det(\mathcal{L})=1$$

olup, Laplace açılımından

$$\det(\mathcal{Q}) = \det(\mathcal{U}) = Q_1(Q_1 - Q_{n+1})^{n-2} u_n$$

olarak elde edilir. ■

2.3.2. Pell ve Pell-Lucas Elemanlı Sirkülant Matrislerin Tersleri

Bu kısımda ise (2.3.1) ve (2.3.2) de tanımlanan elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olan sirkülant matrislerin tersleri için formüller elde edildi.

Teorem 2.3.2.1. $\mathcal{P}$, (2.3.1) deki gibi bir sirkülant matris olsun. $n \geq 3$ için $\mathcal{P}$ tersinirdir.

İspat: $n=3$ ve $n=4$ için Teorem 2.3.1.1 den, sırasıyla $\det(\mathcal{P}) = 104 \neq 0$ ve $\det(\mathcal{P}) = -18560 \neq 0$ olarak elde edilir. $n \geq 5$ durumunu inceleyelim. $\alpha+\beta = 2, \alpha\beta = -1$ ve $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ için $P_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}}$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
u(w^k) &= \sum_{r=1}^{n} P_r w^{kr-k} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha^r - \beta^r}{2\sqrt{2}} w^{kr-k} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{n} (\alpha^r - \beta^r) w^{kr-k} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha w^k} - \frac{\beta(1-\beta^n)}{1-\beta w^k} \right], (1-\alpha w^k, 1-\beta w^k \neq 0) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{(\alpha-\beta) - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \alpha\beta w^k (\alpha^n - \beta^n)}{1-\alpha w^k - \beta w^k + \beta\alpha w^{2k}} \right] \\
&= \frac{1-P_{n+1} - P_n w^k}{1-2w^k - w^{2k}}, \; k = 1,2,\ldots,n-1.
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $u(w^k) = 0$ olacak şekilde bir w^k $(k = 1,2,\ldots,n-1)$ varsa, $1-2w^k - w^{2k} \neq 0$ için $1-P_{n+1} - P_n w^k = 0$ dir. Buradan $\dfrac{1-P_{n+1}}{P_n} = w^k$ dir. Ayrıca bilindiği gibi $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere,

$$w^k = \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \tag{2.3.5}$$

dir. $w^k = \dfrac{1-P_{n+1}}{P_n}$ bir reel sayı olduğu için, $0 < \dfrac{2k\pi}{n} < 2\pi$ için $w^k = -1$ $\sin(\dfrac{2k\pi}{n}) = 0$ dir. Bununla birlikte, $x=-1$ ifadesi $1-P_{n+1} - P_n x = 0,\; n \geq 5,$ denkleminin bir kökü olmadığı için bu bir çelişkidir. Diğer bir ifadeyle, herhangi w^k için $k = 1,2,\ldots,n-1$ ve $n \geq 5$ olmak üzere $u(w^k) \neq 0$ dır. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Lemma 2.3.2.1. $C = (c)_{i,j}$ matrisi $(n-2)\times(n-2)$ mertebeli

$$c_{i,j} = \begin{cases} P_1 - P_{n+1},\; i = j \\ -P_n,\; i = j+1 \\ 0, \text{ diğer} \end{cases}$$

tipinde bir kare matris olsun. Bu matrisin tersi de

$$c'_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{P_n^{i-j}}{(P_1 - P_{n+1})^{i-j+1}}, & i \geq j \\ 0, \text{ diğer} \end{cases}$$

formundadır.

İspat: $A = (a)_{i,j} = CC^{-1}$ olmak üzere $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n-2} c_{ik} c'_{kj}$ dir. Bu durumda $i = j$ için

$$a_{i,j} = (P_1 - P_{n+1}) \frac{1}{P_1 - P_{n+1}} = 1$$

olacaktır. $i > j$ olması durumunda ise,

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n-2} c_{ik} c'_{kj} = c_{i,i-1} c'_{i-1,j} + c_{i,i} c'_{i,j} \\ &= -P_n \frac{P_n^{i-j-1}}{(P_1 - P_{n+1})^{i-j}} + (P_1 - P_{n+1}) \frac{P_n^{i-j}}{(P_1 - P_{n+1})^{i-j+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilecektir. Benzer durum $i < j$ için de gösterilebilir. Dolayısıyla

$$CC^{-1} = I_{n-2}$$

dir. ∎

Teorem 2.3.2.2. $\mathcal{P}$, (2.3.1) deki gibi bir sirkülant matris olsun. Bu taktirde

$$g_n = P_1 - 2P_n + \sum_{k=2}^{n-1} P_{k-1} \left(\frac{P_n}{P_1 - P_{n+1}} \right)^{n-k}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{P}^{-1} = circ(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

olup,

$$p_1 = \frac{1}{g_n} \left(1 + \frac{2P_n^{n-3}}{(P_1 - P_{n+1})^{n-2}} + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{P_{n-k} P_n^{k-1}}{(P_1 - P_{n+1})^k} \right)$$

$$p_2 = \frac{1}{g_n} \left(-2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{P_{n-k-1} P_n^{k-1}}{(P_1 - P_{n+1})^k} \right)$$

$$p_i = -\frac{P_n^{i-3}}{g_n (P_1 - P_{n+1})^{i-2}}, \quad i = 3, 4, \ldots, n$$

dir.

İspat: $g'_n = P_n + \sum_{k=2}^{n-1} P_k \left(\frac{P_n}{P_1 - P_{n+1}} \right)^{n-k}$ olmak üzere,

$$U=\begin{pmatrix} 1 & -g_n' & \frac{g_n'}{g_n}P_{n-2}-P_{n-1} & \frac{g_n'}{g_n}P_{n-3}-P_{n-2} & \cdots & \frac{g_n'}{g_n}P_1-P_2 \\ 0 & 1 & -\frac{P_{n-2}}{g_n} & -\frac{P_{n-3}}{g_n} & \cdots & -\frac{P_1}{g_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Ayrıca $H=diag(1,g_n)$ olmak üzere

$$\mathcal{MPN}U=H\oplus C$$

eşitliği sağlanır. $T=\mathcal{N}U$ denirse,

$$\mathcal{P}^{-1}=T(H^{-1}\oplus C^{-1})M$$

elde edilir. $\mathcal{P}$ sirkülant bir matris olduğundan tersi de sirkülant bir matristir. Yani

$$\mathcal{P}^{-1}=circ(p_1,p_2,\dots,p_n)$$

olsun. T matrisinin son satırı

$$\left(0,1,-\frac{P_{n-2}}{g_n},-\frac{P_{n-3}}{g_n},-\frac{P_{n-4}}{g_n},\dots,-\frac{P_2}{g_n},-\frac{P_1}{g_n}\right)$$

olduğu için $\mathcal{P}^{-1}$ matrisinin son satırının bileşenleri de

$$p_2=\frac{1}{g_n}\left(-2+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{P_{n-k-1}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k}\right)$$

$$p_3=-\frac{1}{g_n(P_1-P_{n+1})}$$

$$p_4=-\frac{P_n}{g_n(P_1-P_{n+1})^2}$$

$$p_5=-\frac{1}{g_n}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{P_{4-k}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k}-2\sum_{k=1}^{2}\frac{P_{3-k}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k}-\frac{P_1}{(P_1-P_{n+1})}\right)$$

$$\vdots$$

$$p_n=-\frac{1}{g_n}\left(\sum_{k=1}^{n-2}\frac{P_{n-k-1}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k}-2\sum_{k=1}^{n-3}\frac{P_{n-k-2}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k}-\sum_{k=1}^{n-4}\frac{P_{n-k-3}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k}\right)$$

$$p_1=\frac{1}{g_n}\left(1+\frac{2P_n^{n-3}}{(P_1-P_{n+1})^{n-2}}+\sum_{k=1}^{n-3}\frac{P_{n-k}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k}\right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan $S_n^{(r)}=\sum_{k=1}^{r}\frac{P_{r-k+1}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k},\quad r=1,2,\ldots,n-2$ olmak üzere

$$S_n^{(2)}-2S_n^{(1)}=\frac{P_n}{(P_1-P_{n+1})^2}$$

ve

$$S_n^{(r+2)}-2S_n^{(r+1)}-S_n^{(r)}=\frac{P_n^{r+1}}{(P_1-P_{n+1})^{r+2}},\qquad r=1,2,\ldots,n-4$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{-1}&=\frac{1}{g_n}circ(1+2S_n^{(n-2)}+S_n^{(n-3)},-2+S_n^{(n-2)},-S_n^{(1)},-S_n^{(2)},S_n^{(3)}-2S_n^{(2)}-S_n^{(1)},\\&\qquad\ldots,S_n^{(n-2)}-2S_n^{(n-3)}-S_n^{(n-4)})\\&=\frac{1}{g_n}circ\left(1+\frac{2P_n^{n-3}}{(P_1-P_{n+1})^{n-2}}+\sum_{k=1}^{n-3}\frac{P_{n-k}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k},-2+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{P_{n-k-1}P_n^{k-1}}{(P_1-P_{n+1})^k},\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{(P_1-P_{n+1})},-\frac{P_n}{(P_1-P_{n+1})^2},-\frac{P_n^2}{(P_1-P_{n+1})^3},\ldots,-\frac{P_n^{n-3}}{(P_1-P_{n+1})^{n-2}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir ki, istenendir. ■

Teorem 2.3.2.3. $\mathcal{Q}$ (2.3.2) deki gibi bir sirkülant matris olsun. $n\geq 3$ için $\mathcal{Q}$ tersinirdir.

İspat: Teorem 2.3.2.1 deki benzer yol kullanılarak ispat elde edilir. ■

Lemma 2.3.2.2. $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n-2}$ matrisi

$$a_{i,j}=\begin{cases}Q_1-Q_{n+1},\ i=j\\2-Q_n,\ i=j+1\\0,\ \text{diğer}\end{cases}$$

tipinde bir kare matris ise tersi

$$a'_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{(Q_n-2)^{i-j}}{(Q_1-Q_{n+1})^{i-j+1}},\ i\geq j\\0,\ \text{diğer}\end{cases}$$

formundadır.

İspat: Lemma 2.3.2.1 in ispatına benzer şekilde elde edilir. ■

Teorem 2.3.2.4. $\mathcal{Q}$, (2.3.2) deki gibi bir sirkülant matris olsun. O halde

$$u_n=Q_1-3Q_n+\sum\nolimits_{k=2}^{n-1}(Q_{k+1}-3Q_k)\left(\frac{Q_{n-2}}{Q_1-Q_{n+1}}\right)^{n-k}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{Q}^{-1} = circ(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

olup,

$$q_1 = \frac{1}{u_n}\left(1 - \frac{8(Q_n-2)^{n-3}}{(Q_1-Q_{n+1})^{n-2}} + \sum_{k=1}^{n-3}\frac{(Q_{n-k+2}-3Q_{n-k+1})(Q_n-2)^{k-1}}{(Q_1-Q_{n+1})^k}\right)$$

$$q_2 = \frac{1}{u_n}\left(-3 + \sum_{k=1}^{n-2}(Q_{n-k+1}-3Q_{n-k})\left(\frac{(Q_n-2)^{k-1}}{(Q_1-Q_{n+1})^k}\right)\right)$$

$$q_m = \frac{4(Q_n-2)^{m-3}}{u_n(Q_1-Q_{n+1})^{m-2}},\; i = 3,4,\dots,n$$

dir.

İspat: $u'_n = \sum_{k=2}^{n} Q_k \left(\frac{Q_n-2}{Q_1-Q_{n+1}}\right)^{n-k}$ olmak üzere,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}u'_n & \frac{u'_n(Q_n-3Q_{n-1})}{2u_n}-\frac{Q_{n-1}}{2} & \frac{u'_n(Q_{n-1}-3Q_{n-2})}{2u_n}-\frac{Q_{n-2}}{2} & \cdots & \frac{u'_n(Q_3-3Q_2)}{2u_n}-\frac{Q_2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{Q_n-3Q_{n-1}}{u_n} & -\frac{Q_{n-1}-3Q_{n-2}}{u_n} & \cdots & -\frac{Q_3-3Q_2}{u_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Ayrıca $G = diag(2, u_n)$ olmak üzere

$$\mathcal{KQL}S = G \oplus A$$

ifadesi sağlanır. $W = \mathcal{L}S$ denirse,

$$\mathcal{Q}^{-1} = W(G^{-1} \oplus A^{-1})K$$

elde edilir. $\mathcal{Q}$ sirkülant bir matris olduğundan tersi de sirkülant bir matristir. Yani

$$\mathcal{Q}^{-1} = circ(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

olsun. W matrisinin son satırı

$$\left(0, 1, -\frac{Q_n-3Q_{n-1}}{u_n}, -\frac{Q_{n-1}-3Q_{n-2}}{u_n}, -\frac{Q_{n-2}-3Q_{n-3}}{u_n}, \dots, -\frac{Q_4-3Q_3}{u_n}, -\frac{Q_3-3Q_2}{u_n}\right)$$

olduğu için $\mathcal{Q}^{-1}$ matrisinin son satırının bileşenleri de

$$q_2 = \frac{1}{u_n}\left(-3 + \sum_{k=1}^{n-2}(Q_{n-k+1}-3Q_{n-k})\frac{(Q_n-2)^{k-1}}{(Q_1-Q_{n+1})^k}\right)$$

$$q_3 = -\frac{Q_3 - 3Q_2}{u_n(Q_1 - Q_{n+1})}$$

$$q_4 = -\frac{2(Q_3 - 3Q_2)}{u_n(Q_1 - Q_{n+1})} - \frac{1}{u_n}\sum_{k=1}^{2}\frac{(Q_{5-k} - 3Q_{4-k})(Q_n - 2)^{k-1}}{(Q_1 - Q_{n+1})^k}$$

$$q_5 = -\frac{1}{u_n}\left(\frac{Q_3 - 3Q_2}{Q_1 - Q_{n+1}} - \sum_{k=1}^{3}\frac{(Q_{6-k} - 3Q_{5-k})(Q_n - 2)^{k-1}}{(Q_1 - Q_{n+1})^k} + 2\sum_{k=1}^{2}\frac{(Q_{5-k} - 3Q_{4-k})(Q_n - 2)^{k-1}}{(Q_1 - Q_{n+1})^k}\right)$$

$$\vdots$$

$$q_n = -\frac{1}{u_n}\Big(\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(Q_{n-k+1} - 3Q_{n-k})(Q_n - 2)^{k-1}}{(Q_1 - Q_{n+1})^k} - 2\sum_{k=1}^{n-3}\frac{(Q_{n-k} - 3Q_{n-k-1})(Q_n - 2)^{k-1}}{(Q_1 - Q_{n+1})^k}$$
$$- \sum_{k=1}^{n-4}\frac{(Q_{n-k-1} - 3Q_{n-k-2})(Q_n - 2)^{k-1}}{(Q_1 - Q_{n+1})^k}\Big)$$

$$q_1 = \frac{1}{u_n}\left(1 - \frac{8(Q_n - 2)^{n-3}}{(Q_1 - Q_{n+1})^{n-2}} + \sum_{k=1}^{n-3}\frac{((Q_{n-k+2} - 3Q_{n-k+1})(Q_n - 2)^{k-1})}{(Q_1 - Q_{n+1})^k}\right)$$

şeklinde elde edilir.

$i \geq 4$ için q_i 'leri düzenlersek,

$$q_4 = \frac{1}{u_n}\left(\frac{2Q_3 - 6Q_2 - Q_4 + 3Q_3}{Q_1 - Q_{n+1}} - \frac{(Q_3 - 3Q_2)(Q_n - 2)}{(Q_1 - Q_{n+1})^2}\right)$$

$$= \frac{1}{u_n}\left(\frac{\overbrace{Q_2 - 2Q_3 - Q_4}^{0} + 3\overbrace{Q_1 - Q_2}^{0}}{Q_1 - Q_{n+1}} - \frac{-4(Q_n - 2)}{(Q_1 - Q_{n+1})^2}\right)$$

$$= \frac{4(Q_n - 2)}{u_n(Q_1 - Q_{n+1})^2}$$

$$q_5 = \frac{1}{u_n}\Big(\frac{1}{Q_1 - Q_{n+1}}((\underbrace{-Q_5 + 2Q_4 + Q_3}_{0}) + 3(\underbrace{Q_4 - 2Q_3 - Q_2}_{0}))$$
$$+ \frac{Q_{n-2}}{(Q_1 - Q_{n+1})^2}((\underbrace{-Q_4 + 2Q_3 + Q_2}_{0}) + 3\underbrace{Q_1 - Q_2}_{0} + \frac{4(Q_n - 2)^2}{(Q_1 - Q_{n+1})^3}))$$

$$= \frac{4(Q_n - 2)^2}{u_n(Q_1 - Q_{n+1})^3}$$

olur. Dolayısıyla genel olarak

$$q_i = \frac{4(Q_n - 2)^{i-3}}{u_n(Q_1 - Q_{n+1})^{i-2}}$$

olup

$$\mathcal{Q}^{-1}=\frac{1}{u_n}circ(1-\frac{8(Q_n-2)^{n-3}}{(Q_1-Q_{n+1})^{n-2}}+\sum_{k=1}^{n-3}\frac{(Q_{n-k+2}-3Q_{n-k+1})(Q_n-2)^{k-1}}{(Q_1-Q_{n+1})^k}$$
$$,-3+\sum_{k=1}^{n-2}(Q_{n-k+1}-3Q_{n-k})\frac{(Q_n-2)^{k-1}}{(Q_1-Q_{n+1})^k}$$
$$,\frac{4(Q_n-2)}{(Q_1-Q_{n+1})^2},\frac{4(Q_n-2)^2}{(Q_1-Q_{n+1})^3},\ldots,\frac{4(Q_n-2)^{n-3}}{(Q_1-Q_{n+1})^{n-2}})$$

elde edilir ki, istenendir. ■

2.4. Maple Uygulamaları

Bu bölümde Kısım 2.1'de tanımlanan matrislerin permanentlerinin hesaplanması için Maple 14 prosedürleri verilmiştir. Bu prosedürler yardımıyla matrisin mertebesi klavyeden girilerek matrisin kendisi yazdırılabilmekte ve permanent değerleri hesaplanabilmektedir. Bu prosedürler aşağıdaki gibidir:

Perrin Sayı Dizisi

```
> restart:
with(LinearAlgebra):
>permanent:=proc(n)
local i,j,k,c,C;
c:=(i,j)->piecewise(i=1 and j=1,1,i=1 and j=2,2,i=1 and
j=3,3,i=2 and j=3,0,i=2 and
j=4,0,i=j+1,1,j=i+1,1,i=j,0,j=i+2,1);
C:=Matrix(n,n,c):
for k from 0 to n-3 do
print(k,C):
for j from 2 to n-k do
C[1,j]:=C[2,1]*C[1,j]+C[1,1]*C[2,j]:
od:
C:=DeleteRow(DeleteColumn(Matrix(n-k,n-k,C),1),2):
od:
print(k,eval(C)):
end proc:
> with(LinearAlgebra):
permanent();
```

Pell Sayı Dizisi

```
> restart:
with(LinearAlgebra):
>permanent:=proc(n)
local i,j,k,c,C;
c:=(i,j)->piecewise(i=j+1,1,j=i+1,1,i=j,1,j=i+2,((-1)^i));
C:=Matrix(n,n,c):
for k from 0 to n-3 do
print(k,C):
for j from 2 to n-k do
C[1,j]:=C[2,1]*C[1,j]+C[1,1]*C[2,j]:
od:
C:=DeleteRow(DeleteColumn(Matrix(n-k,n-k,C),1),2):
od:
print(k,eval(C)):
end proc:
> with(LinearAlgebra):
permanent( );
```

Ardışık Beş Pell Sayısının Toplamı

```
> restart:
with(LinearAlgebra):
> permanent:=proc(n)
local i,j,k,c,C;
c:=(i,j)->piecewise(i=j+1,1,j=i+1,1,j=i+2,(-1)^i,j=4 and
i=1,1,j=5 and i=1,1,j=6 and i=2,1,j=5 and i=2,1,j=1 and
i=1,3,i=j,1);
C:=Matrix(n,n,c):
for k from 0 to n-3 do
print(k,C):
for j from 2 to n-k do
C[1,j]:=C[2,1]*C[1,j]+C[1,1]*C[2,j]:
od:
C:=DeleteRow(DeleteColumn(Matrix(n-k,n-k,C),1),2):
od:
print(k,eval(C)):
end proc:
> with(LinearAlgebra):
permanent ( );
```

Jacobsthal Dizisi

```
restart:
with(LinearAlgebra):
permanent:=proc(n)
local i,j,k,c,m,C;
k:= 2:
c:=(i,j)->piecewise(i=j+1,0,i=j+k,-1,j=i+1,2,j=n and
i=n,1,i=j,3);
C:=Matrix(n,n,c):
for m from 1 to n-1 do
print(k,C):
for j from 1 to n+1-m do
C[n-m,j]:=C[n+1-m,n+1-m]*C[n-m,j]+C[n-m,n+1-m]*C[n+1-m,j]:
od:
C:=DeleteRow(DeleteColumn(Matrix(n+1-m,n+1-m,C),n+1-
m),n+1-m):
od:
print(m,eval(C)):
end proc:
with(LinearAlgebra):
permanent( );
```

Elemanları Pell Sayıları Olan Sirkülant Matrislerin Determinantı

```
> restart:
with(LinearAlgebra):with(linalg):
> P:= proc(n)
description `returns the nth Pell number`:
if n = 0 then
return 0:
elif n = 1 then
return 1:
elif n = 2 then
return 2:
else
return 2*P(n-1)+P(n-2):
end if;
end proc;
> n:=-:
> ((P(1)-P(n+1))^(n-2))*((P(1)-2*P(n)))+add(P(k-
1)*(P(n)^(n-k))*(P(1)-P(n+1))^(k-2),k=2..n-1);
```

Elemanları Pell-Lucas Sayıları Olan Sirkülant Matrislerin Determinantı

```
> restart:
with(LinearAlgebra):with(linalg):
> Q:= proc(n)
description `returns the nth Pell-Lucas number`:
if n = 0 then
return 2:
elif n = 1 then
return 2:
elif n = 2 then
return 6:
else
return 2*Q(n-1)+Q(n-2):
end if;
end proc;
> n:=-:
> 2*((2-Q(n+1))^(n-2))*(2-3*Q(n))+2*add((Q(k+1)-
3*Q(k))*((Q(n)-2)^(n-k))*((2-Q(n+1))^(k-2)),k=2..n-1);
```

Lucas Sayıları

```
restart:
with(LinearAlgebra):
permanent:=proc(n)
local i,j,k,c,m,C;
k:= 2:
c:=(i,j)->piecewise(i=1 and j=1, 2, i=1 and j=2, -
3,i=j+1,0,i=j+k,1,j=i+1,(-1)^i,j=n and i=n,1,i=j,2);
C:=Matrix(n,n,c):
for m from 1 to n-1 do
print(k,C):
for j from 1 to n+1-m do
C[n-m,j]:=C[n+1-m,n+1-m]*C[n-m,j]+C[n-m,n+1-m]*C[n+1-m,j]:
od:
C:=DeleteRow(DeleteColumn(Matrix(n+1-m,n+1-m,C),n+1-
m),n+1-m):
od:
print(m,eval(C)):
end proc:
with(LinearAlgebra):
permanent( );
```

Lucas Sayılarının Toplamı

```
restart:
with(LinearAlgebra):
permanent:=proc(n)
local i,j,k,c,m,C;
k:= 2:
c:=(i,j)->piecewise(i=1 and j=1, 3, i=1 and j=2, -2,i=n
and j=n,2,i=j+1,0,i=j+k,1,j=i+1,(-1)^i,j=n and
i=n,1,i=j,2);
C:=Matrix(n,n,c):
for m from 1 to n-1 do
print(k,C):
for j from 1 to n+1-m do
C[n-m,j]:=C[n+1-m,n+1-m]*C[n-m,j]+C[n-m,n+1-m]*C[n+1-m,j]:
od:
C:=DeleteRow(DeleteColumn(Matrix(n+1-m,n+1-m,C),n+1-
m),n+1-m):
od:
print(m,eval(C)):
end proc:
with(LinearAlgebra):
permanent( );
```

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

Bu çalışmada bazı bilinen sayı dizileri üzerine çalışılmıştır. Bazı çalışmalar sonucunda sayı dizileri için özellikler elde edilmiş, bazılarında ise sonuca tam ulaşılamamıştır. Örneğin,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matrisin determinantları Perrin sayılarını vermektedir. Bu tipteki matrisin karakteristik denklemi $p_0(x)=3, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2+2$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$P_n(x)=xP_{n-1}(x)+P_{n-2}(x)-P_{n-3}(x)$$

şeklindedir. Bu denklem çözülerek, Perrin sayı dizisi için bir çarpanlama formülü elde edilebilir.

Bunun yanında,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin de determinantı Padovan sayılarını vermektedir. Bu tipteki matrislerin karakteristik denklemleri de genel olarak $p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2+1$ başlangıç koşullarıyla,

$$P_n(x)=xP_{n-1}(x)+P_{n-2}(x)-P_{n-3}(x)$$

ile ifade edilebilmektedir. Yine bu denklemin çözümü ile Padovan sayıları için çarpanlama formülü elde edilebilir.

Son olarak da determinantları Fibonacci sayıları olan

$$A=\begin{pmatrix} & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 2 & 1 \\ & & 1 & 0 & 2 & -1 & \\ & \iddots & 0 & 2 & 1 & & \\ 1 & \iddots & 2 & -1 & & & \\ 0 & \iddots & \iddots & & & & \\ 2 & (-1)^n & & & & & \end{pmatrix}$$

matrisini verelim. Bu tipteki matrislerin karakteristik denklemleri genel olarak $p_2(x)=x^2-x-2,\ p_3(x)=x^3-3x^2+x+3$ başlangıç koşullarıyla,

$$P_n(x)=(x-2)P_{n-1}(x)+P_{n-3}(x)$$

ifadesi ile elde edilmektedir. Bu denklemin çözümü ile de Fibonacci sayıları için bir çarpanlama formülü elde edilebilir.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Çalışma hakkındaki sonuçlar ve önerilerimiz aşağıda verilmiştir.

4.1. Sonuçlar

Daha önce de bahsedildiği gibi bu çalışmada, bilinen bazı sayı dizileri incelenmiş, determinantları ve permanentleri bu sayı dizilerini verecek şekilde yeni matrisler tanımlanmıştır. Bunun yanında Padovan sayı dizisi için matrisler yardımıyla bazı yeni özellikler elde edilmiştir. Ayrıca elemanları Pell ve Pell-Lucas sayıları olan sirkülant matrislerin determinant ve tersleri için formüller elde edilmiştir. En son olarak da ise elde edilen sonuçlar örneklendirilmiş ve Maple 14 prosedürü ile sonuçlar desteklenmiştir.

4.2. Öneriler

Son yıllarda graf teori alanında yapılan çalışmalar bilim dünyasında büyük ilgi görmektedir. Bununla birlikte uzun yıllardır çalışılmasına rağmen her seferinde ilginç sonuçlar veren sayı dizileri ile graf teori alanı arasında yeterince ilişki kurulmamıştır. Bu iki alan arasındaki ilişkiler incelenerek her iki alanında gelişmesine katkıda bulunulabilir.

5. KAYNAKLAR

Akbulak, M., Bozkurt, D., 2009, On the order-*m* generalized Fibonacci *k*-numbers, Chaos, Solitons and Fractals, 1347-1355.

Aldrovandi, R., 2001, Special Matrices of Mathematical Physics: Syochastic, Circulant and Bell matrices, World Scientific, Singapore.

Alptekin, E. G., 2005, Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell Sayıları ile Tanımlı Circulant ve Semicirculant Matrisler, Doktora Tezi, *S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Aşçı, M., Çekim, B., Taşçı, D., 2007, Generating matrices for Fibonacci, Lucas and 'special orthogonal polynomials with algorithms, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 267-278.

Bozkurt, D., Gürses, İ., Kıyak, H., Yılmaz, F., 2010, On arbitrary positive integer powers for one type of symmetric pentadiagonal matrices of even order, *The First International Conference on Mathematics and Statistics Sharjah*, U.A.E, 1 114.

Bozkurt, Ş. B., Gürses, İ, Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2010, On the complex factorization of Fibonacci numbers by tridiagonal matrix method and the powers of the tridiagonal matrices, *The First International Conference on Mathematics and Statistics Sharjah, U.A.E*, 113.

Bozkurt, D., Tam, T. Y., 2012, Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation, 219 (2012) 544-551.

Brualdi, R. A., Gibson, P. M., 1977, Convex polyhedra of doubly stochastic matrices I: Applications of the permanent Function, *J. Combin. Theory A,* 194-230.

Caferov, V., 1999, Analiz, Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi Yayınları No: 600, Eskişehir.

Cahill, N. D., D'Errico, J. R., Narayan, D. A., Narayan, J. Y., 2002, Fibonacci determinants, *The College Math. Journal of The Math. Association of America*, 221–225.

Cahill, N. D., J. R. D'Errico and J. P. Spence, 2003, Complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers, *Fibonacci Quarterly*, 13-19.

Cerin, Z., 2007, Sums of squares and products of Jacobsthal numbers, *Journal of Integer Sequences,* 1-15.

Clark, J., Holton, D. A., 1995, A First Look at Graph Theory, *Allied Publishers LTD*,

Er, M. C., 1984, Sums of Fibonacci numbers by matrix methods, *Fibonacci Quarterly*, 22(3), 204–207.

Esmaeili, M., 2006, More on the Fibonacci sequence and Hessenberg matrices, *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 1-8.

Feng, J., 2011, Fibonacci identities via the determinant of tridiagonal matrix, *Applied Mathematics and Computation*, 5978-5981.

Fonseca, C. M. D., 2007, The characteristic polynomial of some perturbed tridiagonal *k*-Toeplitz matrices, *Applied Mathematical Sciences*, 59-67.

Gogin, N. D., Myllari, A. A., 2006, The Fibonacci-Padovan sequence and Mac Williams transform matrices, *Programming and Computer Software*, 74-79.

Gwan, G.-Y. Lee, 2000, *k*-Lucas numbers and associated bipartite graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 51-61.

Halıcı, S., Batu, T., 2009, On the Fibonacci Q-Matrices of the Order-*m*, *Acta Universitatis Apulensis.*

Harris, J. M., Hirst, J. L., Mossinghoff, M. J., 2008, Combinatorics and Graph Theory, Springer-Verlag New York, Inc.

Horadam, A., F., Filipponi, P., 1994, Real Pell and Pell-Lucas numbers with real subscripts, Fibonacci Quarterly.

Horadam, A. F., 1996, Jacobsthal Representation Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 34 (1), 40-53.

Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, Matrix Analysis, Cambridge University Press.

http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence [Ziyaret Tarihi: 21Temmuz 2012].

Janjic, M., 2010, Hessenberg matrices and integer sequences, *Journal of Integer Sequences*, Vol. 13.10.7.8.

Kalman, D., 1982, Generalized Fibonacci numbers by matrix methods, Fibonacci Quarterly, 73-76.

Karaduman E., 2005, On determinants of matrices with general Fibonacci numbers entries, *Applied Mathematics and Computation*, 670–676.

Kaygısız, K., Bozkurt, D., 2012, *k*-generalized order-*k* Perrin number representation by matrix method, *Ars Combinatoria*, 95-101.

Kılıç, E., Taşçı, D., 2007(a), On the permanents of some tridiagonal matrices with applications to the Fibonacci and Lucas numbers, *Rocky Mountain*, No:6.

Kılıç, E., Taşçı, D.,2007(b), Factorizations and representations of the backward second-order linear recurrences, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 182-197.

Kılıç, E., 2008(a), Tribonacci sequences with certain indices and their sums, *Ars Combinatoria*,13-22.

Kılıç, E., Taşçı, D., 2008(b), On families of bipartite graphs associated with sums of generalized order-*k* Fibonacci and Lucas numbers, *Ars Combinatoria*, 31-40.

Kılıç, E., Taşçı, D., 2008(c), On sums of second linear recurrences by Hessenberg matrices, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, V. 38, No. 2.

Kılıç, E., Stakhov, A. P., 2009(a), On the Fibonacci and Lucas *p*-numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents of certain matrices, *Chaos Solitons and Fractals*, 2210–2221.

Kılıç, E., Stanica, P., 2009(b), Generating matrices for weighted sums of second order linear recurrences, *Journal of Integer Sequences*, 12-09.2.7.

Kılıç, E., Taşçı, D., 2009(c), On the second order linear recurrences by tridiagonal matrices, *Ars Combinatoria*, 1-14.

Kılıç, E., 2009(d), The generalized Pell (p,i)-numbers and their Binet formulas, combinatorial representations, sums, Chaos, Solitons and Fractals 40 2047-2063.

Kılıç, E., Taşçı, D., 2010(a), Negatively subscripted Fibonacci and Lucas numbers and their complex factorizations, *Ars Combinatoria,* 275-288.

Kılıç, E., Taşçı, D., 2010(b), On the generalized Fibonacci and Pell sequences by Hessenberg matrices, *Ars Combinatoria* 161-174.

Kılıç, E., Taşçı, D., Haukkanen, P., 2010(c), On the generalized Lucas sequences by Hessenberg matrices, *Ars Combinatoria*, 383-395.

Kılıç, E., Stanica, P., 2011, A matrix approach for general higher order linear recurrences, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.,* 51-67.

Kıyak, H., Gürses, İ., Yılmaz, F**.**, Bozkurt, D., 2010, A Formula for computing integer powers for one type of tridiagonal matrix, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 351-363.

Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley and Sons, NY.

Koshy, T., 2011, Fibonacci, Lucas and Pell numbers and Pascal's triangle, Applied Probability Trust.

Köken, F., Bozkurt, D., 2010, On Lucas numbers by the matrix method, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,*471-475.

Lee G. Y., Kim J. S., 2003, The linear algebra of the *k*-Fibonacci matrix, *Linear Algebra and Its Applications*, 373, 75–87.

Lee, G. Y., Lee, S. G., 1995, A note on generalized Fibonacci numbers, *Fibonacci Quarterly*.

Lee, G., Lee, Y., 2010, On the *k*-Lucas numbers via determinant, *J. Applied Math. And Informatics*, 1439-1443.

Lee, G-Y., Lee, S-G., Kim, J-S., Shin, H-K., 2001, The Binet Formula and epresentations of *k*-generalized Fibonacci numbers, *Fibonacci Quarterly*, 158-164.

Minc, H., 1978, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Permanents, Vol. 6, *Addison-Wesley Publishing Company*, London.

Nallı, A., Civciv, H., 2009, A generalization of tridiagonal matrix determinants, Fibonacci and Lucas numbers, *Chaos Solitons-Fractals*, 355-361.

Öcal, A. A., Tuğlu, N., Altınışık, E., 2005, On the representation of *k*-generalized Fibonacci and Lucas numbers*, Applied Mathematics and Computation*, 584-596.

Taşçı, D., 2005, Lineer Cebir Kitabı, Gazi Kitapevi, Üçüncü Baskı.

Seibert, J., Trojocsky, P., 2006(a), On factorization of the generalized Fibonacci numbers, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 23-32.

Seibert, J., Trojovsky, P., 2006(b), Circulants and the factorization of the Fibonacci-like numbers, *Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis*, 63-70.

Shen, S. Q., Cen, J. M., Hoa, Y., 2011, On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011) 9790-9797.

Shannon, A. G., Anderson, P. G., Horadam, 2006, A. F., Properites of Cordonnier, Perrin and Van der Laan numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 825-831.

Sharp, J., Padovan, R., 2002, Proportion: Science, Philosophy, Architecture*, Nexus Network Journal*.

Vasudev, C., 2006, Graph Theory with Applications, New Age International Publihers, New Delhi.

Yazlık, Y., Taşkara, N., 2013, On the inverse of circulant matrix via generalized *k*-Horadam Numbers, *Applied Mathematics and Computation* 191–196.

Yılmaz, F., Akbulak, M., Bozkurt, Ş. B., Bozkurt, D., 2010, On computing Integer powers for one type of tridiagonal matrix of odd order, *The First International Conference on Mathematics and Statistics Sharjah*, U.A.E, 79.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2011 (a), Hessenberg matrices and the Pell and Perrin numbers, *Journal of Number Theory*, 1390-1396.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2011 (b), On adjacency matrix of one type of graph and Pell numbers, *The 2011 International Conference of Applied and Engineering Mathematics***,** Londra, İngiltere, 202-204.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2011 (c), On one type of tridiagonal matrix and the Jacobsthal-sequence, International Conference on Applied Analysis and Algebra- ICAAA, İstanbul, Türkiye, 184.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2011 (d), One type of matrix family and the Fibonacci numbers, *The 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society,* Konya/Türkiye, 49.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2012 (a), Determinantal representation of generalized Fibonacci numbers and their sums, *International Conference on Applied Analysis and Algebra*, İstanbul/Türkiye, 91

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2012 (b), Determinants and inverses of circulant matrices with Pell and Pell-Lucas numbers, *SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Valencia/Spain*, 117.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2012 (c), On the Pell sequence and Hessenberg matrices, *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 27-32.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2012 (d), Some Properties of Padovan Sequence by Matrix Methods, *ARS Combinatoria*, 149-160.

Yılmaz, F., Bozkurt, D., 2013, On the Fibonacci and Lucas numbers, their sums and permanents of one type of Hessenberg matrices, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* (accepted).

Yüksel, Ş., 2002, Genel Topoloji, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Fatih YILMAZ
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Karabük, 1984
Telefon	**:**	0 505 369 7278
Faks	**:**	
e-mail	**:**	fyilmaz@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Köksal Toptan (YDA) Lisesi	2002
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi	2007
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi	2009
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi	2013

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008-	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Lineer Cebir, Matris Teori

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

1) F. Yılmaz, D. Bozkurt, ***Hessenberg matrices and the Pell and Perrin numbers***, Journal of Number Theory, Volume 131, Issue 8, August 2011, Pages 1390-1396. (Doktora tezinden)

2) F. Yılmaz, D. Bozkurt, ***Some Properties of Padovan Sequence by Matrix Methods***, ARS Combinatoria, volume 104, April 2012. (Doktora tezinden)

3) F. Yılmaz, D. Bozkurt, ***On the Fibonacci and Lucas numbers, their sums and permanents of one type of Hessenberg matrices***, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2013. (Doktora tezinden)

4) F. Yılmaz, D. Bozkurt, ***Determinants and inverses of circulant matrices with Pell and Pell-Lucas numbers***, *SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Valencia/Spain*, 117, 2012. (Doktora tezinden)

5) F. Yılmaz, D. Bozkurt, ***On the Pell sequence and Hessenberg matrices***, Selcuk Journal of Applied Mathematics. 2012.