1.BÖLÜM

LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, *k*-Fibonacci dizileri ile ilgili literatürde yer almış olan bazı çalışmalar ve Fibonacci dizilerinin bölünebilme özelikleri, *m* modülüne göre *k*-Fibonacci dizilerinin periyodu, periyod uzunluğu ile ilgili yapılan çalışmalar verilmiştir.

Bollinger R.C. , Burchard C.L. (1990), p bir asal ve her hangi n ve k tam sayıları, $0 \le n_i,\ k_i < p$ olduğunda,

$$n = \sum n_i p^i \text{ ve } k = \sum k_i p^i$$

için,

$$\binom{n}{k} = \prod \binom{n_i}{k_i} (\bmod p)$$

olur. Eğer $k_i > n_i$ ise $\binom{n_i}{k_i} = 0$ 'dır.

Bu makalede genişletilmiş Pascal üçgenlerini T_m ile tanımlayarak, 2.bölümde T_m'in $C_m(n,k)$ girdilerine benzeyen Lucas'ın genişletmesini düşüneceğiz. 3.bölümde $0 \le k \le (m-1)n$ sıralamasında k için, $C_m(n,k) \equiv 0(\bmod p)$ denkliği sağlanmadığında $C_m(n,k)$'nın bazı bölünebilme özelikleri incelenmiştir.

$(1 + x + x^2 + ... + x^{m-1})^n$ 'in genişletmesinde katsayıların dizisinde, sıradan Pascal üçgenlerine benzeyen genişletilmiş Pascal üçgenleri ortaya çıkar. T_m dizisinde, n satır ve k sütunda $C_m(n,k)$ sayısı, $m, n, k \ge 0$ için;

$$(1 + x + x^2 + ... + x^{m-1})^n = \sum_{k=0}^{(m-1)n} C_m(n,k) x^k$$

ile tanımlanarak, bazı özelikleri ve uygulamaları verilmiştir.

Ehrlich A. (1989), Bu makalede, $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ Fibonacci dizileri ve m modülüne göre indirgenen Fibonacci dizilerinin periyod uzunluğu olan $k(m)$ aritmetik fonksiyonu üzerinde yapılan çalışmalar verilmiştir.

Falcon S. , Plaza A. (2007), Klasik Fibonacci ve Pell dizilerinin bir genelleştirmesi olan bir *k*-Fibonacci dizisi veriliyor. Bu genel *k*. Fibonacci dizisi $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ iki geometrik dönüşümün meşhur dört üçgenin en uzun kenarında (4ÜEUK) tekrar tekrar uygulanması ile bulunmuştur. Bu sayıların pek çok özelikleri doğrudan temel matris cebirinden çıkarılmıştır.

Falcon S. , Plaza A. (2007), Klasik Fibonacci ve Pell dizilerinin bir genelleştirmesi olan bir *k*-Fibonacci dizisi veriliyor. Bu genel *k*. Fibonacci dizisi $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ iki geometrik dönüşümün meşhur dört üçgenin en uzun kenarında (4ÜEUK) tekrar tekrar uygulanması ile bulunmuştur. Bu makalede bu sayıların pek çok özelikleri için, Pascal-2 üçgeni ile bağlantı kurulmuş ve sonuç çıkarılmıştır.

Falcon S. , Plaza A. (2008), Bu çalışmada, m modülünden yararlanarak k-Fibonacci dizilerinin periyod uzunluğu incelendi. Bu periyod, Pisano periyodu olarak bilinen devirli diziler gibidir. Periyot uzunluğunu $\pi_k(m)$ ile tanımlandı ve burada, her *k* tek sayısı için;

$$\pi_k(k^2+4) = 4(k^2+4)$$

olduğu ispatlandı.

Falcon S. , Plaza A. (2009), *k*-Fibonacci polinomları, *k*-Fibonacci sayılarının doğal bir genişlemesidir ve onların özeliklerinin birçoğunun ispatı açıktır. Özellikle burada, *k*-Fibonacci polinomlarının dönüm noktaları biçimindeki bu polinomların türevleri verilmiştir. Bu gerçek, yeni ve direkt bir yolla tam sayı dizilerinin bir ailesini kolay bir biçimde sunar. Fibonacci polinomlarının türevleri için birçok bağıntı ispatlandı.

Luca F. (2000), Herhangi k pozitif tam sayısı için, $\sigma(k)$ ve $\phi(k)$ sırasıyla; k'nın bölenlerinin toplamı ve k ile aralarında asal ve k'ya eşit veya daha küçük pozitif tam bölenlerinin sayısı olsun. Bu makalede,

$\phi(|F_n|) = 2^m$ eşitliğinin çözümü sadece $n = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm9$ için,

$\phi(|L_n|) = 2^m$ eşitliğinin çözümü sadece $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ için,

$\sigma(|F_n|) = 2^m$ eşitliğinin çözümü sadece $n = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ için,

$\sigma(|L_n|) = 2^m$ eşitliğinin çözümü sadece $n = \pm1, \pm2, \pm4$ için,

bulundu.

Luca F. (1999), Herhangi $k \geq 0$ ve $n \geq 1$ tam sayıları için, $\sigma_k(n)$ ve $\phi(n)$ sırasıyla; n'in bölenlerinin k. kuvvetlerinin toplamı ve n'in Euler fonksiyonu olsun. Bu makalede aşağıda verilen eşitsizlikler çalışılmıştır.

Her $n \geq 1$ için $\phi(F_n) \geq F_{\phi(n)}$'dir. Eşitlik sadece $n = 1,2,3$ için bulundu.

Her $n \geq 1$ ve $k \geq 1$ için $\sigma_k(F_n) \leq F_{\sigma_k(n)}$'dir. Eşitlik sadece $n = 1$ veya $(k,n) = (1,3)$ için bulundu.

Her $n \geq 1$ için $\sigma_0(F_n) \leq F_{\sigma_0(n)}$'dir. Eşitlik sadece $n = 1,2,4$ için bulundu.

McDaniel W.L. (1991), Bu makalede, P ve Q aralarında asal tam sayılar, $x^2 - Px + Q$ ifadesinin sıfırları α ve β $(\alpha > \beta)$ olsun. $k = 0,1,2,3,...$ için;

$$U_k = U_k(P,Q) = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \text{ ve } V_k = V_k(P,Q) = \alpha^k + \beta^k$$

değerlerinin gcd'si ile ilgili çalışmalar verilmiştir.

Morton H.R. (1995), $\{f_n\}$ Fibonacci dizisinin dikkat çeken bir özeliği $k = (m,n)$ olduğunda dizinin k. terimi, (f_m, f_n) en büyük ortak bölenidir. Başlangıç şartı, $f_0 = 0$ ve a ve b her hangi asal tam sayıları için;

$$f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}$$

reqürans bağıntısı ile dizi oluşur. Hardy ve Wright $\{f_n\}$ dizisi ve yardımcı bir dizi arasındaki ilişkiyi kullanarak, $t^2 - at - b$ denkleminin köklerinin terimlerinde her iki diziyi tanımlamışlardır. Bu makalenin amacı, $\{f_n\}$ dizisinin sadece basit uygun özeliklerini kullanarak, $(f_m, f_n) = \pm f_{(m,n)}$ eşitliğini ve f_N, pozitif bir d tam sayısı ile bölündüğünde N tam sayılarının dizisini S alarak, S'nin; d'ye bağlı değişken olan bazı k tam sayılarının bütün çarpanlarından meydana geldiğini ispat etmektir.

M.Farrokki D.G. (2007), $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1,1,2,3,...\}$ Fibonacci sayıları dizisi olsun. Bu çalışmada bir k doğal sayısı için, $F_n = kF_m$ eşitliğinin, n ve m bilinmeyen sayıları ile çözümü için bazı koşullar veriliyor. Aynı zamanda $k > 1$ için, $F_n = kF_m$ eşitliğinin en fazla bir *(n,m)* çözümü olduğu gösteriliyor.

Renault M. (1996), Bu çalışmada, Fibonacci sayılarının tarihçesi, Fibonacci dizisinin bazı özelikleri, Fibonacci dizilerinin modüler temsili, periyod, periyod uzunluğu ve zincir gibi kavramlar ve uygulamaları verilmiştir.

2.BÖLÜM

TAM SAYILARDA BÖLÜNEBİLME VE ÖZELİKLERİ

2.1. Bölme Algoritması

Bir a tam sayısı, pozitif bir b tam sayısı ile bölünsün. Bu taktirde $0 \le r < b$ olmak şartıyla bir tek q bölümü ve bir tek r kalanı vardır. Burada a'ya bölünen, b'ye ise bölen sayı denir. $0 \le r < b$ için,

$$a = b.q + r$$

yazılır. Buradan, $0 \le \frac{r}{b} < 1$ için,

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

olup, sonuç olarak; $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ ve $r = a - bq$

olur.

Bölme algoritmasında varsayalım $r = 0$ olsun. Buradan, $a = bq + 0 = bq$ olup, bu ifade; "b böler a'yı", "b, a'nın bir çarpanıdır", "a, b ile bölünebilir" veya "a, b'nin bir katıdır" şeklinde okunur ve $b \mid a$ ile gösterilir. Eğer b, a'nın bir çarpanı değilse, "b, a'yı bölmez" denir.

2.2. Bölünebilme Özelikleri

1. a ve b pozitif tam sayıları için, $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise $a = b$ olur.

2. a, b, c, s, t her hangi tam sayıları için,

(i) $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$

(ii) $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $a \mid (sb+tc)$

(iii) $a \mid b$ ise $a \mid bc$

olur.

3. a ve b herhangi pozitif tam sayıları için, b ile bölünen ve a'dan küçük olan pozitif tam sayıların sayısı, $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$'dir.

2.3. En Büyük Ortak Bölen

a ve b gibi iki pozitif tam sayının bir çarpanı, pozitif bir tam sayı olabilir. a ve b'nin bu gibi çarpanlarına, "ortak bölenler" veya "ortak çarpanlar" denir. a ve b sayılarının her ikisini de bölen pozitif tam sayıların en büyüğüne " en büyük ortak bölen" denir ve (a,b) ile gösterilir.

2.4. En Büyük Ortak Bölen'in Özelikleri

1. $(a,b)=d$ ise,

(i) $d \mid a$ ve $d \mid b$.

(ii) $d' \mid a$ ve $d' \mid b$ ise $d' \mid d$.

2. a ve b aralarında asal ise, $(a,b)=1$.

3. $(a,b)=d$ ise $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$ ve $(a,a-b)=d$.

4. a ve b pozitif tam sayılarının en büyük ortak böleni, a ve b'nin bir lineer kombinasyonudur. s ve t her hangi tam sayılar olmak üzere,

$$(a,b)=d \text{ ise } d=sa+tb$$

dir.

5. a,b ve c her hangi pozitif tam sayılar ise $(ac,bc)=c(a,b)$.

6. $a \mid c$, $b \mid c$ ve $(a,b)=1$ ise $ab \mid c$.

7. (a,b)=1 ve $a \mid bc$ ise $a \mid c$.

8. $n \geq 2$ için; $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif tam sayıları verilsin. Bu n tam sayının en büyük ortak böleni;

$(a_1, a_2, ..., a_n) = ((a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n)$

dir.

9. $1 \leq i \leq n-1$ için, $d \mid a_1 a_2 ... a_n$ ve $(d, a_i) = 1$ ise $d \mid a_n$.

10. p bir asal ve $p \mid ab$ ise $p \mid a$ veya $p \mid b$.

11. $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif tam sayılar ve $1 \leq i \leq n$ için, p bir asal ve $p \mid a_1 a_2 ... a_n$ ise bazı i'ler için; $p \mid a_i$'dir.

12. $p, q_1, q_2, ..., q_n$ asal sayılar ve $1 \leq i \leq n$ için, $p \mid q_1 q_2 ... q_n$ ise bazı i'ler için; $p = q_i$.

2.5. En Küçük Ortak Kat

a , b pozitif tam sayılarının en küçük ortak katı, a ve b'nin her ikisi ile de bölünen pozitif tam sayıların en küçüğüdür ve $[a, b]$ ile gösterilir.

2.6. En Küçük Ortak Kat'ın Özelikleri

1. $[a, b] = m$ ise $a \mid m$ ve $b \mid m$.

2. m' pozitif bir tam sayı, $a \mid m'$ ve $b \mid m'$ ise $m \leq m'$.

3. a ve b pozitif tam sayıları için, $(a, b).[a, b] = ab$

4. a ve b pozitif tam sayılarının aralarında asal olması için gerek ve yeter koşul $[a, b] = ab$ olmasıdır.

5. $n \geq 2$ için, $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif tam sayıları verilsin. Bu n tam sayının en küçük ortak katı;

$[a_1, a_2, ..., a_n] = [[a_1, a_2, ..., a_{n-1}], a_n]$

dir.

6. $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif tam sayıları ikişer ikişer aralarında asal ise,

$[a_1, a_2, ..., a_n] = a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n$.

7. $1 \le i \le k$, $m_1, m_2, ..., m_k$ ve a pozitif tam sayıları için, $m_i \mid a$ ise $[m_1, m_2, ..., m_k] \mid a$.

2.7. Euclidan Algoritması

a ve b iki tam sayı, $b \neq 0$ olsun. a ve b 'nin en büyük ortak böleni bulalım. a , b ile bölünsün, böylece;

$$a = bq_1 + r_1 ,\ 0 \le r_1 < b$$

olur. Bu şekilde devam edersek, b , r_1 ile bölünsün, böylece;

$$b = r_1 q_2 + r_2 ,\ \ 0 \le r_2 < b$$

olur. Bu şekilde devam edersek, k . adımda;

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k \ ,\ \ 0 \le r_k < r_{k-1}$$

ve $(k+1)$. adımda;

$$r_{k-1} = r_k q_{k-1} + r_{k+1} \quad \text{ve } r_{k+1} = 0 .$$

Çünkü kalanlar, kesinlikle azalan olduğundan, a ve b'nin en büyük ortak böleni yukarıdaki bölme algoritmasında sıfırdan farklı son kalandır.

$$(a,b) = r_k$$

elde edilir.

2.8. Fermat Teoremi

p asal sayı, $(p,a) = 1$ ise

$$a^{p-1} \equiv 1 \,(\text{mod}\, p) \tag{2.1}$$

dir.

2.9. Binom Teoremi

n pozitif bir tam sayı olsun. Bu taktirde,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

dir.

2.10. Binom Kat Sayılarının Çarpanları

p bir asal olsun.

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$$

bir tam sayıdır. Buradan, $n!$, $\dfrac{p!}{(p-n)!}$ 'in bir çarpanıdır. Eğer, $1 \le n \le p-1$ ise $n!$ ile p aralarında asaldır ve bu nedenle $n!$, $\dfrac{(p-1)!}{(p-n)!}$ 'in bir çarpanı olmalıdır. Buradan,

$$p\frac{(p-1)!}{n!(p-n)!}$$

p ile bölünür.

$$\binom{p}{n} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p), \quad (1 \le n \le p-1) \qquad (2.2)$$

$$\binom{p-1}{1} \equiv (-1) (\mathrm{mod}\, p) \ ,$$

(2.2) ve

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m} \qquad (m \ge 1)$$

özeliğinden,

$$\binom{p-1}{2} = \binom{p}{2} - \binom{p-1}{1} \equiv -(-1) = (-1)^2 (\mathrm{mod}\, p)$$

olur. Tümevarım yöntemi ile,

$$\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n (\mathrm{mod}\, p) \ , \quad (1 \le n \le p-1) \qquad (2.3)$$

Diğer taraftan,

$$\binom{p}{n-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p) \ \text{ ve } \binom{p}{n} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p), \quad (2 \le n \le p-1)$$

olup, buradan

$$\binom{p+1}{n} \equiv 0 (\bmod p), \quad (2 \le n \le p-1) \tag{2.4}$$

elde edilir.

2.11. Çin Kalan Teoremi

$m_1, m_2, ..., m_r$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olan r tane pozitif tam sayı, $a_1, a_2, ..., a_r \in Z$ olsun. Bu durumda ,

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x &\equiv a_2 (\bmod m_2) \\ &. \\ &\bullet \\ &. \\ x &\equiv a_r (\bmod m_r) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sisteminin ortak çözümleri vardır. Ayrıca $m_1.m_2...m_r$ modülüne göre (2.5) sisteminin bir tek çözümü vardır.

2.12. Taban ve Tavan Fonksiyonları

x reel sayısının tabanı; $\lfloor x \rfloor$ ile tanımlanır. $\lfloor x \rfloor$ sayısı, x'ten küçük en büyük tam sayıdır. x reel sayısının tavanı ise $\lceil x \rceil$ ile tanımlanır. $\lceil x \rceil$ sayısı; x'ten büyük en küçük tam sayıdır. Taban fonksiyonu $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ve tavan fonksiyonu $g(x) = \lceil x \rceil$ aynı zamanda sırasıyla, en küçük tam sayı fonksiyonu ve en büyük tamsayı fonksiyonu olarak bilinir. (Koshy T. ,2001)

2.13. Taban ve Tavan Fonksiyonlarının Özelikleri

x herhangi reel sayı ve n herhangi tam sayı olsun.

1. $\lfloor n \rfloor = n = \lceil n \rceil$

2. $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

3. n tek sayı ise,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$$

dir.

4. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1 \quad (x \notin Z)$

5. $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

6. n tek sayı ise,

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$$

dir. (Koshy T. ,2001)

3. BÖLÜM

FIBONACCI VE LUCAS SAYILARININ TEMEL ÖZELİKLERİ

Bu bölümde, tam sayı dizilerinin içinde büyük öneme sahip Fibonacci ve Lucas dizilerinin tarihçesinden bahsedeceğiz. Bu sayı dizilerinin tanımları, bazı temel kavramları ve özeliklerini üzerinde duracağız.

3.1. Fibonacci ve Lucas Dizilerinin Tarihçesi

Leonardo Fibonacci 12. yüzyılda yaşamış bir İtalyan matematikçisidir. Pisa şehrinde doğan Leonardo çocukluğunu babasının çalışmakta olduğu Cezayir'de geçirmiştir. İlk matematik bilgilerini Müslüman eğiticilerden almış olup küçük yaşlarda onluk Arap sayı sistemini öğrenmiştir. Ülkesi İtalya'da kullanılmakta olan Roma rakam sisteminin hantallığı yanında Arap sisteminin mükemmelliğini gören Fibonacci 1201 yılında "Liber Abaci" isimli kitabını yazmıştır. Aritmetik ve Cebir içeren ticaret ile ilgili bu kitapta Arap sayı sisteminin tanıtımı ve müdafasını yapmıştır. İlk anda kitabın İtalya'da tüccarlar üzerinde etkisi az olmasına rağmen zamanla bu kitap Arap sayı sisteminin Batı Avrupa'ya girmesinde büyük rol oynamıştır.

Bu kitapta bulunan bir problem ortaçağ matematiğine katkıları olan Fibonacci'yi 600 yıl sonra, 19'uncu yüzyılın başlarından günümüze meşhur hale gelmesine sebep olmuştur. Bu problem "Tavşan Problemi"dir. Ergin bir tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru çifti verdikleri ve yeni doğan bir çiftin 1 ay zarfında tam ergenliğe eriştikleri varsayımıyla yavru olan bir tavşan çiftinden başlayıp 1 yılda çiftlerin sayısı ne olur? Buna göre belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre bir yıl içinde 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olacaktır. Fibonacci bu problemi, kitabına biyoloji biliminde bir uygulama olsun diye ya da nüfus patlamasına bir çözüm getirsin diye koymamış; probleme, bir toplama alıştırması olarak bakmıştır.

Fibonacci'nin kendisi bu sayı dizisi üzerinde bir çalışma yapmamıştır. Hatta bu sayı dizisi üzerinde 19 uncu yüzyılın başlarına kadar ciddi bir araştırma yapılmadığı da belirtilmektedir.

Fibonacci sayılarının ailesi üç ayrı nedenle bir ilgi odağı olmuştur.
Birincisi; dizinin daha küçük elemanlarının doğada, beklenmedik yerlerde tekrar terar karşımıza çıkmasıdır; bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde vb.
İkinci neden; Fibonacci dizisinin bir terimi öncekine bölündüğünde n→ ∞ için bölmün "altın oran" denen ve irrasyonel bir sayı olan $(1+\sqrt{5})/2$ =1,61803398…sayısına yakınsadığı görülmektedir. Bu sayı oyun kartlarının biçiminden Mısır'daki piramitlere kadar birçok yapının matematiksel temelini oluşturmaktadır.

Üçüncü neden; daha çok sayıların kendilerinin, sayılar teorisinde beklenmedik biçimde farklı birçok kullanımı olan ilginç özellikleriyle ilgilidir.

Belirli bir süre sonra bu dizi üzerinde yapılan araştırmaların sayısı artmıştır. Hatta Fibonacci Derneği bile kurulmuştur. Bu derneğin 1963 yılından itibaren yayınladığı "The Fibonacci Quartery" dergisi bu sayı dizisiyle ilgili ilginç araştırmalar yayınlamaktadır. Bazısı bilinen, bazısı öne sürülüp ispatlanamayan ve bilinmeyip keşfedilmesi beklenen birçok özeliğe sahiptir.

Bu sayı dizisinin elemanlarının, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ bağıntısı kullanılarak hesaplandığı düşünülürse, ilk iki sayı seçilmeden diziyi oluşturan elemanların bilinemeyeceği açıktır. Fibonacci dizisi, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ ile başlar, diğer Fibonacci sayıları, verilen Fibonacci denklemine göre belirlenir. Ancak bu iki başlangıç sayısının özel bir yanı olmadığından, başlangıç için başka değerlerde seçilebilir ve aynı tanımlayıcı denklemi kullanarak tümüyle farklı bir sayı dizisi elde edilebilir. Fransız matematikçisi Edward Lucas, başlangıç sayıları için seçilebilecek ikinci en basit $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ sayılarını seçerek ve de $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $n \geq 1$ bağıntısını kullanarak, Fibonacci dizisine benzer bir sayı dizisi elde etmiştir. Günümüze de süregelen araştırmalar, bu iki sayı dizisi arasında ilginç bağıntıların olduğunu kanıtlamıştır. Bu özellikleri birçok çalışmada bulabiliriz. Bu sayılar bazen doğada ve bilimsel alanlarda görülmektedir. Örneğin, 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri olduğu bilinmektedir.

3. 2. Lucas Dizileri

Lucas dizileri ,

$$U_0(a,b) = 0, U_1(a,b) = 1$$

$$V_0(a,b) = 2, V_1(a,b) = a + b$$

başlangıç koşulları olmak üzere;

$$a + b = P, ab = \frac{1}{4}(P^2 - D) = Q, a - b = \sqrt{D}$$

bağıntılarını sağlayan, P ve Q tam sayılarına bağlı

$$U_m(P,Q) = PU_{m-1}(P,Q) - QU_{m-2}(P,Q)$$

$$V_m(P,Q) = PV_{m-1}(P,Q) - QV_{m-2}(P,Q)$$

reküans bağıntıları kullanılarak tanımlanan dizilere denir.

$$U_n(P,Q) \equiv \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$V_n(P,Q) = a^n + b^n$$

şeklinde Binet formülleri tanımlanmıştır (Sun Zhi-H, 2006).

Lucas dizileri ile Fibonacci dizileri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tabloda gösterelim.

(P,Q)	U_n	V_n
(1,-1)	Fibonacci Dizisi	Lucas Dizisi

Tablo 1

3.3. Fibonacci sayıları ve özellikleri

Tanım 3.1. (Fibonacci Dizisi). $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n ,\ n \geq 0 \tag{3.1}$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayı dizisine **Fibonacci Dizisi** denir. Fibonacci disisinde her n tam sayısına karşılık gelen değere ***n.* Fibonacci sayısı** denir.

n = 1, 2, 3,... değerlerine karşılık gelen Fibonacci sayıları 0, 1, 1, 2, 3,…’tür.

Tablo 1’den de görüldüğü gibi Fibonacci dizisi,

$$\{F_n\}_{n=1}^{\infty} = U_n(1,-1)$$

şeklinde özel bir Lucas dizisidir.

Lucas dizilerinin Binet formülünden Fibonacci sayıları için,

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Binet benzeri formülü elde edilir. Negatif indisli Fibonacci sayılarının,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlı olduğu görülür. $\binom{k}{i}$ Binom katsayısı ve F_n , n.Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$F_{kn} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} F_i F_n^i F_{n-1}^{k-i} \,,\; n > 1$$

kapalı formülü ile ifade edilebilir.

Fibonacci sayılarının üreten fonksiyonu,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \ldots$$

Simpson formülü

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{3.3}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

şeklinde verilir.(Koshy T. , 2001).

3.4. Lucas sayıları ve özelikleri

Tanım 3.2. (Lucas Dizisi). $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \,,\; n \geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tam sayılar dizisine **Lucas dizisi** denir. Lucas dizisinde her n tam sayısına karşılık gelen her bir değere ***n*. Lucas sayısı** denir.
$n = 1, 2, 3, \ldots$ değerlerine karşılık gelen Lucas sayıları 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18,… dir.
Tablo 1'den de görüldüğü gibi Lucas dizisi,

$$\{L_n\}_{n=1}^{\infty} = V_n(1,-1)$$

şeklinde özel bir Lucas dizisidir. Lucas dizilerinin Binet formülünden Lucas sayıları için,

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Binet benzeri formülü elde edilir.
Lucas sayılarının üreten fonksiyonu,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

Simpson formülü,

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

ve toplam formülü

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

şeklinde verilir (Koshy T. ,2001).

3.5. Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

$G_1 = a$, $G_2 = b$ ve $n \geq 3$ için $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ tanımlanan diziye Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir. Dizinin terimleri,

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \ldots$$

şeklindedir. Burada a ve b'nin katsayılarının Fibonacci sayıları olduğu görülür.

3.6.Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarının Özelikleri

1. G_n, *n.* genelleştirilmiş Fibonacci sayısı ve $n \geq 3$ için;

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$$

dir.

2. $\sum_{i=1}^{n} G_{k+i} = G_{n+k+2} - G_{k+2}$

3. $c = a + (a-b)\beta$ ve $d = a + (a-b)\alpha$ için,

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir.

4. $\mu = cd = a^2 + ab - b^2$ için,

$$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = \mu(-1)^n$$

dir.

5. $G_{n+m} = F_{m-1}G_n + F_m G_{n+1}$

3.7. Fibonacci ve Lucas Sayıları ile ilgili Bazı Özdeşlikler

Özdeşlik 1. $n \in Z^+$ için $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

İspat: n üzerinde indüksiyon ile, $n = 1$ için;

$$\sum_{i=1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1.1 = F_1.F_2$$

olup doğrudur. Özdeşlik $n = k$ için, doğru olsun.

$$\sum_{i=1}^{k} F_i^2 = F_k.F_{k+1}$$

Şimdi $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{k=1}^{k+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2$$

$$= F_k.F_{k+1} + F_{k+1}^2$$

$$= F_{k+1}(F_k + F_{k+1})$$

$$= F_{k+1}.F_{k+2}$$

olup ispat tamamlanır.

Özdeşlik 2. $F_{n+1}.F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

İspat: $F_{n+1}.F_{n-1} - F_n^2 = (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} - F_n^2$

$$= F_{n-1}^2 + F_n(F_{n-1} - F_n)$$

$$= F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2}$$

$$=-(F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2)$$

$$= (-1)^2 (F_{n-1}F_{n-3} - F_{n-2}^2)$$

$$= (-1)^3 (F_{n-2}F_{n-4} - F_{n-3}^2)$$

$$\vdots$$

$$=(-1)^n(F_1F_{-1}-F_0^2)$$

$$=(-1)^n$$

Özdeşlik 3. $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

İspat:

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

olup, eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\sum_{i=1}^{n} F_n = F_{n+2} - F_n = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

Özdeşlik 4. $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$

İspat: n üzerinde indüksiyon ile , $n=1$ için;

$$F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_m F_2 = F_{m-1} + F_m$$

olup doğrudur. $n=k$ ve $n=k-1$ için özdeşlik doğru olsun.

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_m F_{k+1}$$

$$F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k+1} + F_m F_k$$

Eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$F_{m+k} + F_{m+(k-1)} = F_{m-1}(F_{k-1} + F_k) + F_m(F_k + F_{k+1})$$

$$F_{m+k+1} = F_m F_{k+1} + F_m F_{k+2}$$

olup $n=k+1$ için de özdeşliğin doğru olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Özdeşlik 5. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

İspat: n üzerinde indüksiyon ile , $n=1$ ve $n=2$ için;

$L_1 = F_0 + F_1$ ve $L_2 = F_1 + F_3$

olup doğrudur. $n=k$ ve $n=k+1$ için özdeşlik doğru olsun.

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$$

$$L_{k+1} = F_k + F_{k+2}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$L_{k+2} = F_{k+1} + F_{k+3}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Özdeşlik 6. $F_{2n} = F_n L_n$

İspat: Özdeşlik.4 ve Özdeşlik.5 kullanılarak;

$$F_{2n} = F_{n+n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_nL_n$$

elde edilir.

Özdeşlik 7. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

İspat: Özdeşlik.4 ile,

$$F_{2n+1} = F_{(n+1)+n} = F_nF_n + F_{n+1}F_{n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

elde edilir.

Özdeşlik 8. $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$

İspat: n üzerinde indüksiyon ile, $n = 1$ için;

$$L_2L_0 - L_1^2 = 3.2 - 1^2 = 5 = 5(-1)^0$$

olup doğrudur. $n = k$ için özdeşlik doğru olsun.

$$L_{k+1}L_{k-1} - L_k^2 = 5(-1)^{k-1}$$

Şimdi $n = k + 1$ için özdeşliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} L_{k+2}L_k - L_{k+1}^2 &= (L_{k+1} + L_k)(L_{k+1} - L_{k-1}) - L_{k+1}^2 \\ &= L_{k+1}^2 - L_{k+1}L_{k-1} + L_kL_{k+1} - L_kL_{k-1} - L_{k+1}^2 \\ &= L_kL_{k+1} - L_kL_{k-1} - L_k^2 - 5(-1)^{k-1} \\ &= L_kL_{k+1} - L_k(L_{k-1} + L_k) + 5(-1)^k \\ &= L_kL_{k+1} - L_kL_{k+1} + 5(-1)^k \qquad = 5(-1)^k \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Özdeşlik 9. $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$

İspat: n üzerinden indüksiyon ile,

$$L_1 = L_3 - L_2$$

$$L_2 = L_4 - L_3$$

.

.

.

$$L_{n-1} = L_{n+1} - L_n$$

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$$

olup eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3$$

elde edilir.

Özdeşlik 10. $F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{m+n+1}$

İspat: Özdeşlik.4 ile,

$F_{m+n+1} = F_{(n+1)+m} = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1}$

elde edilir.

Özdeşlik 11. $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$

İspat: Özdeşlik.5 ile,

$$L_{n-1} = F_{n-2} + F_n$$

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

elde edilir.

Özdeşlik 12. $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$

İspat: $F_{n+2} - F_{n-2} = F_n + F_{n+1} - F_{n-2} = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n+1} - F_{n-2} = L_n$

Özdeşlik 13: $F_n + L_n = 2F_{n+1}$

İspat: $F_n + L_n = F_n + F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n+1}$

Özdeşlik 14. $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2}F_{n-1}$

İspat: $F_{n+1}^2 - F_n^2 = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) = F_{n+2}F_{n-1}$

Özdeşlik 15. $F_{n+1}L_{n+1} - F_nL_n = F_{2n+1}$

İspat: Özdeşlik.6'dan

$$F_{n+1}L_{n+1} - F_nL_n = F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1}$$

elde edilir.

Özdeşlik 16. $n \geq m \geq 1$ için;

$$F_n = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}$$

dir.

İspat: Özdeşlik.4 ile,

$$F_n = F_{(n-m+1)+(m-1)} = F_{n-m+1}F_m + F_{n-m}F_{m-1}$$

elde edilir.

Özdeşlik 17. $n \in Z^{+}$ için, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

İspat: n üzerinden indüksiyon ile,

$n = 1$ için, $F_1 = 1$ olup doğrudur.

$n = k-1$ ve $n = k-2$ için eşitlik doğru olsun.

$$F_{k-1} + F_{k-2} = \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1} + \alpha^{k-2} - \beta^{k-2}}{2} = \frac{\alpha^k(\alpha^{-1} + \alpha^{-2}) - \beta^k(\beta^{-1} + \beta^{-2})}{2}$$

$$= \frac{\alpha^k - \beta^k}{2} = F_k$$

olup ispat tamamlanır. Aynı şekilde, n üzerinden indüksiyon ile;

$n = 1$ için, $L_1 = 1$ olup doğrudur.

$n = k-1$ ve $n = k-2$ için eşitlik doğru olsun.

$$L_{k-1} + L_{k-2} = \alpha^{k-1} + \beta^{k-2} + \alpha^{k-2} + \beta^{k-2} = \alpha^k(\alpha^{-1} + \alpha^{-2}) + \beta^k(\beta^{-1} + \beta^{-2})$$

$$= \alpha^k + \beta^k = L_k$$

olup ispat tamamlanır.

Özdeşlik 18. $F_{m+n} = L_n F_m + (-1)^{n+1} F_{m-n}$

İspat: $L_n F_m + (-1)^{n+1} F_{m-n} = (\alpha^n + \beta^n)(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{5}}) + (-1)^{n+1}(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\sqrt{5}})$

$$= \frac{\alpha^{n+m} - \alpha^n \beta^m + \alpha^m \beta^n - \beta^{n+m} + (-1)^{n+1}\alpha^{m-n} - (-1)^{n+1}\beta^{m-n}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n}(-1)^n \beta^{m-n} + (-1)^n \alpha^{m-n} - \beta^{m+n} - (-1)^n \alpha^{m-n} + (-1)^n \beta^{m-n}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{\sqrt{5}}$$

$$= F_{m+n}$$

Özdeşlik 19. $F_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \ldots\right]$

İspat: $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right] =$

$$\frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left\{\left[1 + \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 + \binom{n}{3}\sqrt{5}^3 + \ldots\right] - \left[1 - \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 - \binom{n}{3}\sqrt{5}^3 + \ldots\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{5}}\left[\binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{3}\sqrt{5}^3 + \binom{n}{5}\sqrt{5}^5 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \ldots\right]$$

elde edilir.

Özdeşlik 20. $L_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 + \binom{n}{2}5 + \binom{n}{4}5^2 + \ldots\right]$

İspat: $L_n = \alpha^n + \beta^n = \dfrac{1}{2^n}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]$

$$= \frac{1}{2^n}\left\{\left[1+\binom{n}{1}\sqrt{5}+\binom{n}{2}\sqrt{5}^2+\binom{n}{3}\sqrt{5}^3+\ldots\right]+\left[1-\binom{n}{1}\sqrt{5}+\binom{n}{2}\sqrt{5}^2-\binom{n}{3}\sqrt{5}^3+\ldots\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left[1+\binom{n}{2}5+\binom{n}{4}5^2+\ldots\right]$$

Özdeşlik 21. $\forall n$ için,

$$F_n = \left\lfloor \left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right] + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

dir.

İspat: $\left|F_n - \left[\dfrac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right]\right| = \left|\left[\dfrac{\beta^n}{\sqrt{5}}\right]\right| < \dfrac{1}{2}$

Özdeşlik 22. $\forall n \geq 2$ için,

$$F_{n+1} = \left\lfloor \alpha F_n + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

dir.

İspat: $\left|F_{n+1} - \alpha F_n\right| = \left|\left[\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right] - \left[\dfrac{\alpha^{n+1} - \alpha\beta^n}{\sqrt{5}}\right]\right|$

$$= \left|\left[\frac{\beta^n(\alpha-\beta)}{\sqrt{5}}\right]\right| = \left|\beta^n\right| < \frac{1}{2}$$

Özdeşlik 23. $L_{2n} + 2(-1)^n = L_n^2$

İspat: $L_{2n} + 2(-1)^n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n = (\alpha^n + \beta^n)^2 = L_n^2$

Özdeşlik 24. $m, n, r \in Z^{+}$ için,

$$F_{m+n-2}F_{m+r-1} - F_{m+n-1}F_{m+r-2} = (-1)^{m+r-2}F_{n-r}$$

dir.

İspat: $m+n-1=a$ ve $m+r-1=b$ alalım.

$$\begin{aligned}(-1)^{m+r-2}F_{n-r} = (-1)^{b-1}F_{a-b} &= (-1)^{b-1}\left[F_{a-1}F_{-b} + F_aF_{-(b-1)}\right] \\ &= (-1)^{b-1}\left[F_{a-1}(-1)^{b+1}F_b + F_a(-1)^bF_{b-1}\right] \\ &= F_{a-1}F_b(-1)^{2b} + F_aF_{b-1}(-1)^{2b-1} \\ &= F_{a-1}F_b - F_aF_{b-1} \\ &= F_{m+n-2}F_{m+r-1} - F_{m+n-1}F_{m+r-2}\end{aligned}$$

Özdeşlik 25. $F_{m+n} + F_{m-n} = \begin{cases} F_nL_m & n, tek \\ F_mL_n & n, çift \end{cases}$

ve

$$F_{m+n} - F_{m-n} = \begin{cases} F_mL_n & n, tek \\ F_nL_m & n, çift \end{cases}$$

dir.

İspat: $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$ ve $F_{m+(-n)} = F_{m-1}F_{-n} + F_mF_{-(n-1)}$

eşitliklerini taraf tarafa toplayarak ve çıkararak sonuca ulaşabiliriz.

$$F_{m+n} + F_{m-n} = F_{m-1}(F_n + (-1)^{n+1}F_n) + F_m(F_{n+1} + (-1)^nF_{n-1})$$

n, tek ise;

$$F_{m+n} + F_{m-n} = 2F_{m-1}F_n + F_mF_n = F_n(F_{m-1} + F_{m-1} + F_m) = F_nL_m$$

n, çift ise;

$$F_{m+n} + F_{m-n} = F_m(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_mL_n$$

elde edilir.

$$F_{m+n} - F_{m-n} = F_{m-1}(F_n - (-1)^{n+1} F_n) + F_m (F_{n+1} - (-1)^n F_{n-1})$$

n, tek ise;

$$F_{m+n} - F_{m-n} = F_m (F_{n+1} + F_{n-1}) = F_m L_n$$

n, çift ise;

$$F_{m+n} - F_{m-n} = 2F_{m-1}F_n + F_m F_n = F_n (F_{m-1} + F_{m-1} + F_m) = F_n L_m$$

elde edilir.

Özdeşlik 26. $L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_m L_n$

İspat: $L_{n+m} - L_m L_n = \alpha^{n+m} + \beta^{n+m} - (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n)$

$$= -(\alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m)$$

$$= -\alpha^m \beta^m (\alpha^{n-m} + \beta^{n-m})$$

$$= -(-1)^m L_{n-m}$$

elde edilir.

Özdeşlik 27. $5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}$

İspat: $5\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2 - (\alpha^n + \beta^n)^2 = (\alpha^n + \beta^n + \alpha^n - \beta^n)(\alpha^n - \beta^n - \alpha^n - \beta^n)$

$$= -4(\alpha\beta)^n$$

$$= 4(-1)^{n+1}$$

4. BÖLÜM

FIBONACCI VE LUCAS SAYILARININ BÖLÜNEBİLME ÖZELİKLERİ

Bu bölümde T.Koshy (2001) ve S.Vajda (1989) tarafından verilen Fibonacci ve Lucas sayılarının bölünebilme özelikleri ve bazı uygulamaları verilecektir.

4. 1. Bölünebilme Özelikleri

Fibonacci sayılarındaki Özdeşlik 6'dan $F_n \mid F_{2n}$'dir. Biz burada bunu genelleştirmeye çalışacağız. Diğer bir ifadeyle hangi şartlar altında $F_i \mid F_j$ olduğunu göstereceğiz.

Şimdi vereceğimiz teorem, $i \mid j$ ise $F_i \mid F_j$ olduğunu gösterir.

Teorem 4. 1. $F_m \mid F_{mn}$.

İspat. Tümevarım yöntemi ile, n =1 için doğruluğu açıktır. Varsayalım ki bütün k tam sayıları için de doğru olsun. O halde $k \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, $\forall i$, için $F_m \mid F_{mi}$ olduğunu varsayalım. Buradan, $F_m \mid F_{m(k+1)}$ olduğunu göstermeliyiz.

Fibonacci sayılarındaki, Özdeşlik 4'den;

$$F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1} F_m + F_{mk} F_{m+1}$$

yazarız. Tümevarım hipotezinden $F_m \mid F_{mk}$ olduğundan, $F_m \mid F_{m(k+1)}$ olduğu görülür. Böylece her $n \geq 1$ tam sayıları için teorem doğrulanır. (Koshy T. ,2001).

Örnek olarak; $F_6 = 8$ ve $F_{24} = 46368$ için $6 \mid 24$ ve $8 \mid 46368$ 'dir.

Sonuç 4. 1. Her *m*. Fibonacci sayısı F_m ile bölünebilir. (Koshy T. ,2001).

Örnek olarak; her 5. Fibonacci sayısı $F_5 = 5$ ile bölünebilir. Buradan $F_5, F_{10}, F_{15}, F_{20},...$ sayıları 5 ile bölünebilir. Aynı şekilde, $F_6, F_{12}, F_{18}, F_{24},...$ sayıları da $F_6 = 8$ ile bölünebilir.

Teorem 4. 2. $F_m \mid F_n$ ise $m \mid n$.

İspat: Bölme algoritması ile $n = qm+r$, $0 \le r < m$ 'dir. Varsayalım ki $F_m \mid F_n$ olsun. Bu taktirde tam sayılardaki bölünebilme özeliklerinden ve 1964'te L. Carlitz tarafından verilen Özdeşlik 16'dan;

$$F_m \mid F_{n-m} F_{m-1}$$

dir. Fakat $(F_m, F_{m-1}) = 1$ olduğundan $F_m \mid F_{n-m}$' dir. Benzer şekilde $F_m \mid F_{n-2m}$ 'dir. Bu şekilde devam edersek $F_m \mid F_{n-qm}$ ve $F_m \mid F_r$ dir. Bu ise r =0 ve n =qm olmadıkça olanaksızdır. Böylece $m \mid n$ 'dir. (Koshy T. ,2001).

Sonuç 4. 2. $F_m \mid F_n$ gerek ve yeter koşul $m \mid n$ olmasıdır.

Bu sonuç Teorem 4. 1 ve Teorem 4. 2'nin bir sonucudur. (Koshy T. ,2001).

Sonuç 4. 3. $(m,n) = 1$ ise bu taktirde,

$$F_m F_n \mid F_{mn}$$

dir.

İspat: Teorem 4. 1'den $F_m \mid F_{mn}$ ve $F_n \mid F_{mn}$ 'dir. Bu nedenle $[F_m, F_n] \mid F_{mn}$ 'dir. Fakat $(F_m, F_n) = F_{(m,n)} = F_1 = 1$ olduğundan $[F_m, F_n] = F_m F_n$ dır. Böylece $F_m F_n \mid F_{mn}$ dir. (Koshy T. ,2001).

Örnek olarak, $(4,7) = 1, F_4 = 3, F_7 = 13$ ve $F_{28} = 317811$ dir. Buradan $3.13 \mid 317811$ olup $F_4 F_7 \mid F_{28}$ dir.

Sonuç 4. 4. Her hangi iki ardışık Fibonacci sayısı aralarında asaldır.

İspat: Euclidan algoritması kullanılarak, F_n bölünen sayı, F_{n-1} bölen sayı olsun.

$$F_n = 1.F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_{n-1} = 1.F_{n-2} + F_{n-3}$$

$$F_{n-2} = 1.F_{n-3} + F_{n-4}$$

$$\vdots$$

$$F_4 = 1.F_3 + F_2$$

$$F_3 = 2F_2 + 0$$

Euclidan algoritması ile $\forall n \geq 3$ için $(F_n, F_{n-1}) = 1$ eşitliği elde edilir.

Şimdi vereceğimiz lemmada Sonuç 4.4'ü genelleştireceğiz.

Lemma 4. 1. $(F_{qn-1}, F_n) = 1$

dir.

İspat: $d = (F_{qn-1}, F_n)$ olsun. Bu taktirde $d \mid F_{qn-1}$ ve $d \mid F_n$ dir. Teorem 4. 1' den $F_n \mid F_{qn}$ olup $d \mid F_{qn}$ dir. Böylece $d \mid F_{qn-1}$ ve $d \mid F_{qn}$'dir. Sonuç 4. 4 'ten $(F_{qn-1}, F_{qn}) = 1$'dir. Bu nedenle $d \mid 1$ olduğundan, $d = 1$ ve böylece $(F_{qn-1}, F_n) = 1$ elde edilir. (Koshy T. ,2001).

Lemma 4. 2. $m = qn + r$ olsun. Bu taktirde,

$$(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$$

dir.

İspat: Özdeşlik. 4 ve Lemma 4.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}(F_m, F_n) &= (F_{qn+r}, F_n)\\ &= (F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n)\\ &= (F_{qn-1}F_r, F_n)\\ &= (F_r, F_n)\\ &= (F_n, F_r)\end{aligned}$$

elde edilir.

Yeni teoremde iki Fibonacci sayısının en büyük ortak böleninin daima bir Fibonacci sayısı olduğunu göstereceğiz. (Koshy T. ,2001).

Teorem 4. 3. $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

İspat: $m \geq n$ için Euclidan algoritması ile *m* bölünen sayı, *n* bölen sayı olsun.

$$m = q_0 n + r_1 \ , \qquad 0 \leq r_1 < n$$
$$n = q_1 r_1 + r_2 \, , \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$
$$r_1 = q_2 r_2 + r_3 \, , \qquad 0 \leq r_3 < r_2$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n \, , \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

Lemma 4. 2'den,

$$(F_m, F_n) = (F_n, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2}) = \ldots = (F_{r_{n-1}}, F_{r_n})$$

olur. $r_n \mid r_{n-1}$ olduğundan Teorem 4.1'den $F_{r_n} \mid F_{r_{n-1}}$ dir. Bu nedenle $(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}) = F_{r_n}$ olup, böylece $(F_m, F_n) = F_{r_n}$ olur. Euclidan algoritmasından, $r_n = (m,n)$ olup,

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

elde edilir.

Örnek verecek olursak, $(F_{12}, F_{18}) = F_{(12,18)} = F_6 = 8$ 'dir ve $(144, 2584) = 8$ elde edilir.

Bir alternatif ispat.

$d=(m,n)$ ve $d^{'}=(F_m,F_n)$ olsun. Teorem 4. 1'den $F_d \mid F_m$ ve $F_d \mid F_n$'dir. Böylece $F_d \mid d'$ olur. $d=(m,n)$ olduğundan, $d=am+bn$ olacak şekilde a ve b tam sayıları vardır. $d,m,n>0$ olduğundan, $a\leq 0$ ya da $b\leq 0$ olsun. Varsayalım ki $a\leq 0$ olsun. $k\geq 0$ olmak üzere $a=-k$ alalım. Bu taktirde $bn=d+km$ yazarız. Özdeşlik 4'den,

$$F_{bn}=F_{d+km}=F_{d-1}F_{km}+F_dF_{km+1} \tag{4.1}$$

elde edilir.

Teorem 4. 1'den $d^{'} \mid F_m$, $d' \mid F_{km}$'dir. $d' \mid F_n$ ve $F_n \mid F_{bn}$ böylece $d' \mid F_{bn}$ olur. Buradan $d' \mid F_{km}$ ve $d' \mid F_{bn}$, bu nedenle (4. 1) eşitliğinden, $d' \mid F_dF_{km+1}$ olur. Fakat $d' \mid F_{km}$ ve $(F_{km},F_{km+1})=1$ olduğundan $(d',F_{km+1})=1$ olur, bu nedenle $d' \mid F_d$, böylece $F_d \mid d'$ ve $d' \mid F_d$ olduğundan $d'=F_d$'dir. Diğer bir deyişle, $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$'dir.(Michael,G.,1964)

Bu teorem, en küçük ortak kat için sağlanmaz. Yani,

$$[F_m,F_n]\neq F_{[m,n]}$$

dir. Örnek verecek olursak;

$[F_4,F_{10}]=[3,55]=165$ ve $F_{[4,10]}=F_{20}=6765$ olup $[F_4,F_{10}]\neq F_{[4,10]}$ olduğu görülür.

Sonuç 4. 5. Eğer m ve n aralarında asal ise bu taktirde F_m ve F_n'de aralarında asaldır.

Örnek olarak, $(12,25)=1$ ve $(F_{12},F_{25})=(144,75025)=1$'dir.

.

Teorem 4. 4. $m\geq 2$ olmak üzere, $L_m \mid F_n$ olması için gerek ve yeter koşul $2m \mid n$ olmasıdır.(Carlitz,L.,1964)

Örnek olarak, $10 | 20$ için $L_5 | F_{20}$, yani $11 | 6765$ olur.

Teorem 4. 5. $m \geq 2$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, $L_m | L_n$ olması için gerek ve yeter koşul $n = (2k-1)m$ olmasıdır. .(Carlitz,L.,1964)

Örnek olarak, $m = 4$, $k = 2$ ve $n = 3.4 = 12$ .O halde $L_4 = 7, L_{12} = 322$ olup, $L_4 | L_{12}$ yani $7 | 322$ olur.

1965'te George C.Cross ve Helen G.Renzi, $a : b = 2 : 3$ ise $[a,b] - (a,b) = a + b$ olduğunu ispatladılar. Örnek olarak, $a = 12$ ve $b = 18$ için $[a,b] - (a,b) = 36 - 6 = 30 = 12 + 18$ olur. Cross ve Renzi ayrıca $a : b = 3 : 5$ iken $[a,b] + (a,b) = 2(a+b)$ olduğunu ispatladılar. Örnek olarak, $a = 45$ ve $b = 75$ için $[a,b] + (a,b) = 225 + 15 = 240 = 2(45 + 75)$ olur.

Daha genel olarak, varsayalım $a : b = F_n : F_{n+1}$ veya $a : b = L_n : L_{n+1}$ olsun. Bu durumda $[a,b], (a,b)$ ve $a + b$ arasındaki ilişkiyi araştıralım. Bu durum; G.F.Freeman tarafından, aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4. 6.

1. $a : b = F_n : F_{n+1}$ ise bu takdirde $n \geq 2$ olmak üzere, $(a+b)F_{n-1} = [a,b] + (-1)^n (a,b)$ dir.

2. $(c,d) = 1$, $a : b = c : d$ ise $n \geq 3$ için $(a+b)F_{n-1} = [a,b] + (-1)^n (a,b)$ 'dir. $c : d$ oranının çözümlerinin sayısı , $F_n F_{n-2}$ 'nin pozitif çarpanlarının sayısının yarısına eşittir. Bu pozitif çarpanlardan biri de $F_n . F_{n+1}$ 'dir.

İspat:

1. $a : b = F_n : F_{n+1}$ olsun. Bu takdirde bazı pozitif k tam sayıları için, $(F_n, F_{n+1}) = 1$,

$$a = F_n k\ ,\ b = F_{n+1} k\ ,\ (a,b) = k\ ,\ [a,b] = F_n F_{n+1} k$$

dir.

$$(a+b)F_{n-1} = F_{n-1}(F_n + F_{n+1})k = F_{n-1} F_{n+2} k$$
$$= (F_{n+1} - F_n) F_{n+2} k = F_{n+1}(F_n + F_{n+1})k - F_n F_{n+2} k$$

$$=F_nF_{n+1}k+(F_{n+1}^2-F_nF_{n+2})k$$
$$=[a,b]+(-1)^n(a,b)$$

elde edilir.

2. $(c,d)=1$ olmak üzere, $a:b=c:d$ olsun. Bu taktirde bazı k pozitif tam sayıları için, $a=ck$, $b=dk$, $(a,b)=k$ ve $[a,b]=cdk$'dır.

$$(a+b)F_{n-1}=[a,b]+(-1)^n(a,b)$$

eşitliğinden,

$$(c+d)F_{n-1}=cd+(-1)^n$$

dir.

$$c=\frac{dF_{n-1}-(-1)^n}{d-F_{n-1}}$$
$$=F_{n-1}+\frac{F_{n-1}^2-(-1)^n}{d-F_{n-1}}$$
$$=F_{n-1}+\frac{F_nF_{n-2}}{d-F_{n-1}} \tag{4.2}$$

Eğer $0<d<F_{n-1}$ ise bu taktirde $c<0$'dır. Böylece, $d>F_{n-1}$'dir. c bir tam sayı $d-F_{n-1}\mid F_nF_{n-2}$. Böylece, (4.2) eşitliğinden F_nF_{n-2}'nin her pozitif çarpanı için c'nin bir değeri bulunur. Fakat $c=a,d=b$; $c:d$ oranının bir çözümü ise $c=b,d=a$'dir. Böylece F_nF_{n-2}'nin pozitif çarpanlarının sayısı, $c:d$ oranının farklı değerlerinin sayısına eşittir.

Özel olarak, $d=F_{n+1}$ alalım. Bu taktirde,

$$c=F_{n-1}+\frac{F_nF_{n-2}}{F_{n+1}-F_{n-1}}$$
$$=F_{n-1}+\frac{F_nF_{n-2}}{F_n}=F_n$$

olur. Böylece bu değer $c:d=F_n:F_{n+1}$ oranının bir değeridir. (Freeman, G.F.,1967)

Örnek 4. 1.

1. $n=9$ için $a:b=F_9:F_{10}=34:55$'dir. $a=238$, $b=385$ için, $a:b=34:55$'dir.

$[a,b]+(-1)^n(a,b)=13090$- 7=13083=(238+385).21= $(a+b)F_8$

2. $(a+b)F_8=[a,b]+(-1)^9(a,b)$'den

$$c=F_8+\frac{F_9F_7}{d-F_8}$$

$$=21+\frac{34.13}{d-21}=21+\frac{442}{d-21}$$

dir.

442=2.13.17 olup, 442'nin pozitif çarpanları; 1, 2, 13, 17, 26, 34, 221 ve 442'dir. Böylece d sekiz değer alabilir. Bunlar; 22, 23, 34, 38, 47, 55, 242 v 463 olur. Sonuç olarak $c:d$'nin çeşitli değerleri; 463: 22, 242: 23, 55: 34, 47: 38, 38: 47, 34: 55, 23: 242 ve 22: 463'dir.Dikkat edersek pay ve paydalar yer değiştirmiştir. $c:d$'nin payı en küçük olan dört değeri; 38: 47, 34: 55, 23: 242 ve 22: 463'dür. Bu oranlardan, $34:55=F_9.F_{10}$'dir. (Koshy T. ,2001).

Teorem 4. 5, Lucas sayıları için de benzerdir.

Lemma 4. 3. $n\geq 2$ için,

$$F_{2n-1}=F_{n+1}L_{n+2}-L_nL_{n+1}$$

dir. (Koshy T. ,2001).

Teorem 4. 7.

1. $a:b=L_n:L_{n+1}$ ise $n\geq 2$ için, $(a+b)F_{n+1}=[a,b]+(a,b)F_{2n-1}$'dir.

2. $a:b=F_{n-2}:F_{n-1}$ ise $n\geq 3$ için, $(a+b)F_{n+1}=[a,b]+(a,b)F_{2n-1}$'dir.

3. $(c,d)=1$ için, $a:b=c:d$ .Eğer $n\geq 2$ için, $(a+b)F_{n+1}=[a,b]+(a,b)F_{2n-1}$ ise $c:d$ oranları, $F_{n+1}^2-F_{2n-1}$'in pozitif çarpanları ile belirlenir. Bunlardan biri $L_n:L_{n+1}$'dir.

İspat:

1. $a : b = L_n : L_{n+1}$**.** $(L_n, L_{n+1}) = 1$ olup bazı pozitif k tam sayıları için, $a = kL_n$, $b = kL_{n+1}$, $(a,b) = k$, $[a,b] = L_n L_{n+1} k$ 'dır. O zaman

$$\begin{aligned}(a+b)F_{n+1} &= (L_n + L_{n+1})kF_{n+1} = F_{n+1}L_{n+2}k \\ &= (F_{2n-1} + L_n L_{n+1})k \\ &= [a,b] + (a,b)F_{2n-1}\end{aligned}$$

elde edilir ki buda istenendir.

2. Varsayalım $a : b = F_{n-2}F_{n-1}$ olsun. O zaman bazı pozitif k tam sayıları için, $a = kF_{n-2}$, $b = kF_{n-1}$, $(a,b) = k$ ve $[a,b] = F_{n-1}F_{n-2}k$ 'dır. O zaman

$$\begin{aligned}(a+b)F_{n+1} &= (F_{n-2} + F_{n-1})kF_{n+1} = F_n F_{n+1} k \\ &= (F_{2n-1} + F_{n-1}F_{n-2})k\end{aligned}$$

$F_{2n-1} = F_{n+1}L_{n+2} - L_n L_{n+1}$

olduğundan,

$$= [a,b] + (a,b)F_{2n-1}$$

elde edilir.

3. $(c,d) = 1$ için $a : b = c : d$. Buradan bazı pozitif k tam sayıları için, $a = ck$, $b = dk$, $(a,b) = k$, $[a,b] = cdk$ 'dır.

$$(a+b)F_{n+1} = [a,b] + (a,b)F_{2n-1}$$

eşitliğinden,

$$(c+d)F_{n+1} = cd + F_{2n-1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}c &= \frac{dF_{n+1} - F_{2n-1}}{d - F_{n+1}} \\ &= F_{n+1} + \frac{F_{n+1}^2 - F_{2n-1}}{d - F_{n+1}}\end{aligned} \qquad \textbf{(4.3)}$$

c ve d pozitif tam sayılardır. $c : d$ oranı, $F_{n+1}^2 - F_{2n-1}$ 'in pozitif çarpanları ile belirlenir.

Özel olarak, $d = F_{n+1}$ alalım. Lemma 4. 3'ten,

$$c = F_{n+1} + \frac{F_{n+1}^2 - F_{n+1}L_{n+2} + L_n L_{n+1}}{L_{n+1} - F_{n+1}}$$

$$= \frac{F_{n+1}(L_{n+1} - L_{n+2}) + L_n L_{n+1}}{L_{n+1} - F_{n+1}}$$

$$= \frac{L_n L_{n+1} - L_n F_{n+1}}{L_{n+1} - F_{n+1}}$$

$$= L_n$$

olup, böylece $c:d$ oranının bir çözümü $L_n : L_{n+1}$'dir. (Bir çözümü de $L_{n+1} : L_n$'dir.)

Teorem 4. 6'nın aksine $d > F_{n+1}$ durumu göz önüne alınırsa bütün çözümleri elde edemeyiz. Örnek olarak; $d = F_{n-1}$ seçelim. (4.3) eşitliğinden,

$$c = \frac{F_{n-1}F_{n+1} - F_{2n-1}}{F_{n-1} - F_{n+1}}$$

$$= \frac{F_{n-1}F_{n+1} - (F_n F_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1})}{-F_n}$$

$$= -\frac{F_{n+1}(F_{n-1} - F_n) + F_{n-2}F_{n-1}}{F_n}$$

$$= -\frac{F_{n-2}F_{n+1} + F_{n-2}F_{n-1}}{F_n}$$

$$= \frac{F_{n-2}(F_{n-1} - F_{n+1})}{F_n}$$

$$= F_{n-2}$$

Böylece $c:d$ oranının bir çözümü de $F_{n-2} : F_{n-1}$'dir. (Freeman G.F., 1967)

Şimdi de bu Teorem için bir örnek verelim.

Örnek 4. 2. n=8 olsun. $F_{n+1}=F_9=34$ ve $F_{2n-1}=F_{15}=610$ olur.

1. $a:b=L_n:L_{n+1}=L_8:L_9=47:76$, $a=235$ ve $b=380$ alalım. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
[a,b]+(a,b)F_{2n-1} &= [235,380]+(235,380).610 \\
&= 17860+5.610 = 20910 \\
&= (235+380).34 \\
&= (a+b)F_{n+1}
\end{aligned}
$$

2. $a:b=F_{n-2}:F_{n-1}=F_6:F_7=8:13$. $a=96$ ve b=156 alalım. O zaman

$$
\begin{aligned}
[a,b]+(a,b)F_{2n-1} &= [96,156]+12.610 \\
&= 8568 = (96+156).34 \\
&= (a+b)F_{n+1}
\end{aligned}
$$

3. $c:d=15.17$ ve $(15,17)=1$ olduğundan, $a:b=180:204=15:17$ alalım. Teorem 4. 7'in üçüncü kısmından,

$$
\begin{aligned}
c &= F_{n+1}+\frac{F_{n+1}^2-F_{2n-1}}{d-F_{n+1}} \\
&= 34+\frac{34^2-610}{d-34} = 34+\frac{546}{d-34}
\end{aligned}
$$

Buradan 546=2. 3. 7. 13, 546'nın 16 tane pozitif çarpanı vardır. Bunlar;1, 2, 3, 6, 7, 13, 14, 21, 26, 39, 42, 78, 91, 182, 273 ve546'dır. Benzer oranlar; 35:580, 36:307, 37:216, 40:125, 41:112, 47:76, 48:73, 55:60, 60:55, 73:48, 76:47, 112:41, 125:40, 216:37, 307:36 ve 580:35'dir. $(c,d)=1$ ile sekiz farklı $c:d$ oranları vardır. Bunlar; 7:116, 8:25, 11:12, 36:307, 37:216, 41:112, 47:76 ve 48:73'tür. Dikkat edersek 8:13'de bir çözümdür. Buradan, $L_8:L_9=47:76$ ve $F_6:F_7=8:13$ oranları bu oranlar arasındadır. (Koshy T. ,2001).

Teorem 4. 8. Fibonacci dizisinin her hangi n ardışık teriminin çarpımı, ilk n terimin çarpımı ile bölünebilir.

İspat: Bu teorem Lucas(1878) ve Carmichael(1913/14) tarafından farklı yöntemler ile ispatlanmıştır.

Şimdi Özdeşlik 4' den,

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$$

$$\frac{F_{m+n}}{F_n} = F_{m-1} + \frac{F_mF_{n+1}}{F_n}$$

olup ardından,

$$\frac{F_{m+n}F_{m+n-1}...F_{m+1}}{F_nF_{n-1}...F_1} = \frac{F_{m+n-1}...F_{m+1}}{F_{n-1}...F_1}F_{m-1} + \frac{F_{m+n-1}...F_{m+1}F_m}{F_n...F_1}F_{n+1} \qquad (4.4)$$

yazarız. Burada,

$$\frac{F_tF_{t+1}...F_{t+k-1}}{F_1...F_k} = J(t,k)$$

ile gösterirsek, (4.4)'den,

$$J(m+1,n) = J(m+1,n-1)F_{m-1} + J(m,n)F_{n+1}$$

elde ederiz.

Açıkça,

$$J(1,t) = 1 \text{ ve } J(t,1) = F_t$$

dir.

Şimdi, Binom katsayılarının oluşturduğu Pascal üçgenine benzer bir üçgen düşünelim.

$$J(1,1)$$

$$J(1,2) \qquad J(2,1)$$

$$J(1,3) \quad J(2,2) \quad J(3,1)$$

$$J(1,4) \quad J(2,3) \quad J(3,2) \quad J(4,1)$$

……………………………………………..

$$J(1, m+n-1) \ldots\ J(m,n) \ldots J(m+1, n-1) \ldots J(m+n-1, 1)$$

$$J(1, m+n) \qquad \ldots \qquad J(m+1, n) \qquad \ldots \qquad J(m+n, 1)$$

Bu üçgenin sol kenarındaki bütün elemanlar 1'e eşit ve sağ kenarındaki elemanlar için *k*. sıradaki eleman F_k'ya eşittir ve bunlar birer tam sayıdır. Varsayalım, o zaman ilk önce *m*+*n*-1 sırasındaki bütün değerler tam sayıdır ve *m*+*n* sırasındaki değerleri düşünelim. İlk değer 1 ve son değer F_{m+n}'dir. Bu iki değer arasındaki herhangi bir değer $J(m+1, n)$ olsun. Bu değer, F_{m+1} ve F_{n-1} ve bunlara katılan tam sayılar tarafından sırasıyla bunların çarpımları ile tam üzerindeki iki değerden bulunur. Bu çarpımlar tekrar bir tam sayıdır ve biz bu ifademizi tümevarım ile ispatlarız. (Doğal sayılar dizisini Fibonacci sayılarının dizisi yerine koyalım. O zaman biz, "Binom katsayıları tam sayıdır" bilinen gerçeğini elde ederiz.)

Bir benzer açıklama da Lucas sayıları için yapılabilir.

Teorem 4. 9. İndisi tek sayı olan Lucas sayılarının oluşturduğu $L_1, L_3, L_5, \ldots$ dizisini dikkate alalım. Bu dizinin her hangi $2n-1$ ardışık teriminin çarpımı, ilk *n* ardışık teriminin çarpımı ile bölünebilir.

İspat:

$$P_{m,n} = L_{2m-1} L_{2m+1} \ldots L_{2m-1+2(2n-2)}$$

ve

$$Q_n = L_1 L_3 \ldots L_{2n-1}$$

alalım. $m=1$ ve bütün n'ler için, teoremin doğru olduğu görülür.

$$P_{m,n} / Q_n = (L_1 \ldots L_{4n-3}) / (L_1 \ldots L_{2n-1})$$

dir. Yine *n*=1 ve bütün *m*'ler için,

$$P_{m,n} / Q_n = L_{2m-1} / L_1$$

olur.

Varsayalım, $n = N$ -1 ve bütün m'ler, ve $n = N$ ve $m = M$ için teorem doğru olsun. M+1 ve N için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$P_{M+1,N} = P_{M,N} + P_{M+1,N-1}L_{2M+4N-5}(L_{2M+4N-3} - L_{2M-1})$$

Özdeşlik.26' da, $n = 2M + 2N - 2$ ve $m = 2N - 1$ alalım. Bu taktirde

$$L_{2M+4N-3} - L_{2M-1} = L_{2M+2N-2}L_{2N-1}$$

elde edilir. Buradan

$$P_{M+1,N} = P_{M,N} + P_{M+1,N-1}L_{2N-1}L_{2M+4N-5}L_{2M+2N-2}$$

elde edilir.

Şimdi varsayalım , $P_{M+1,N-1}$, Q_{N-1} ile bölünebilsin, bu nedenle $P_{M+1,N-1}L_{2N-1}$, Q_N ile bölünebilir. Böylece eşitliğin sağındaki her iki toplam Q_N ile bölünebilir. $P_{M+1,N}$ için teorem sağlanmış olur. (Vajda S., 1989)

Teorem 4. 10.

(a) $F_{kn-1} - F_{n-1}^k$, F_n^2 ile bölünebilir. ($n = 1,2,...; k = 1,2,...$)

(b) $F_{kn-2} - (-1)^{k+1}F_{n-2}^k$, F_n^2 ile bölünebilir. $(n = 1,2,...; k = 1,2,...)$

İspat:

(a) $k = 1$ için, (a) özdeşliği doğrudur. $k = 2$ için, Özdeşlik 7'yi kullanarak,

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$$

$k = 2$ için de doğru olduğu görülür. Şimdi (a) özdeşliği bazı k'lar için doğru olsun. Buradan k+1 için de doğru olduğunu gösterelim. Özdeşlik 4'den,

$$F_{(k+1)n-1} = F_{kn}F_n + F_{kn-1}F_{n-1}$$

olur.

Eşitliğin sağındaki ilk terim F_n^2 ile bölünebilir. Çünkü F_{kn}, F_n ile bölünebilir olduğunu Teorem 4. 1'de göstermiştik. Eşitliğin sağındaki ikinci terim, varsayımımız ile F_n^2 modülüne göre $F_{n-1}^k F_{n-1} = F_{n-1}^{k+1}$ eşittir. Buradan,

$F_{(k+1)n-1} - F_{n-1}^{k+1}$, F_n^2 ile bölünebilir ve ispat tamamlanır.

İspat :

(b) $k=1$ için (b) özdeşliği doğrudur. Eğer (b) bazı *k*'lar için doğru ise *k*+1 için de doğru olduğunu gösterelim.

Varsayalım (b) bazı k'lar için doğru olsun. F_{kn-2}, F_n^2 modülüne göre $(-1)^{k+1} F_{n-2}^k$'e denktir.

Şimdi Özdeşlik 4' den,

$$F_{(k+1)n-2} = F_{kn-1}F_n + F_{kn-2}F_{n-1}$$

yazarız. Bu, (a)'da az önce ispatlandı. Şimdi varsayım ile F_n^2 modülüne göre,

$$F_{n-1}^k F_n + (-1)^{k+1} F_{n-2}^k (F_n - F_{n-2})$$

$$=[F_{n-1}^k + (-1)^{k+1} F_{n-2}^k]F_n + (-1)^{k+2} F_{n-2}^{k+1} \tag{4.5}$$

eşitliğinin denk olduğu ifadeyi bulalım.

Biz bu noktada bir lemma verelim.

Lemma 4. 4.

$$\frac{m^k + (-1)^{k+1} n^k}{m+n} = \sum_{i=0}^{k} m^{k-i} n^{i-1} (-1)^{i-1}$$

Eşitliğinde, $m = F_{n-1}$ ve $n = F_{n-2}$ ise o zaman,

$$F_{n-1} + (-1)^{k+1} F_{n-2}$$

ifadesi F_n ile bölünebilir.

Bu lemma, (4.5) eşitliğinin F_n^2 modülüne göre $(-1)^{k+2}F_{n-2}^{k+1}$'e denk olduğunu gösterir. Böylece (b) ispatı tamamlanır. (Cavachi M., 1980)

Sonuç 4. 6. F_{nF_n}, F_n^2 ile bölünebilir.

İspat: F_n yerine *k* yazalım. Teorem 4. 10'daki (a) ve (b) özdeşliklerinden,

$$F_{nk} = F_{nk-1} + F_{nk-2} \equiv [F_{n-1}^k + (-1)^{k+1}F_{n-2}^k](\mathrm{mod}\, k^2)$$

olur. Aynı zamanda,

$$F_{n-1}^k = (F_n - F_{n-2})^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i F_n^{k-i}F_{n-2}^i$$

dir.

Şimdi $k = F_n$ olduğunu hatırlayalım. İlk $k-1$ terimi içeren toplam sonunda, sırasıyla $F_n^k, F_n^{k-1}, \ldots, F_n^2$ terimlerinin hepsi F_n^2 ile bölünebilir. Aynı zamanda *k*.terim $\binom{k}{k-1}F_n$'de F_n^2 ile bölünebilir. Son terim ise $(-1)^k F_{n-2}^k$'dir.

Böylece $F_{n-1}^k \equiv (-1)^k F_{n-2}^k (\mathrm{mod}\, F_n^2)$ ve bu nedenle F_{nk} yani F_{nF_n}, F_n^2 modülüne göre ;

$$(-1)^k F_{n-2}^k + (-1)^{k+1}F_{n-2}^k = 0$$

eşitliğine denktir. Diğer bir söyleyişle, F_{nF_n}, F_n^2 ile bölünebilir. (Vajda S., 1989)

Cavachi benzer bir iddiayı gösterdi. Bu iddia şu şekildedir; $n = 1,2,\ldots$; $m = 1,2,\ldots$ için, $k = n^m$ olmak üzere F_{nk}, F_n^{m+1} ile bölünebilir.

Şimdi bazı Fibonacci sayılarının bir çarpanının her hangi bilinen sayı olup olmadığı sorusunu ele alalım. Lucas sayıları için değil de, sıradan Fibonacci sayıları için bu durumu ispat edelim.

Düşünmeye asal sayılar ile başlayalım. 2'yi içeren Fibonacci sayıları vardır (örnek olarak F_3). Aynı şekilde 5'i içeren Fibonacci sayıları vardır (örnek olarak F_5).

Burada 2 ve 5'ten başka asalları düşüneceğiz.

Teorem 4. 11. Eğer p, $5t \pm 1$ biçiminde bir asal ise $F_p \equiv 1(\text{mod}\, p)$.

Eğer p, $5t \pm 2$ biçiminde bir asal ise $F_p \equiv -1(\text{mod}\, p)$.

İspat: Özdeşlik 19'dan,

$$2^{p-1}F_p = \binom{p}{1} + 5\binom{p}{3} + \ldots + 5^{(p-1)/2}\binom{p}{p}$$

yazarız. (2.1) ve (2.2)'den,

$$F_p \equiv 5^{(p-1)/2}(\text{mod}\, p)$$

elde edilir.

$5^{(p-1)/2} \equiv 1(\text{mod}\, p)$ olması için, gerek ve yeter koşul p'nin $5t \pm 1$ biçiminde olmasıdır.

ve

$5^{(p-1)/2} \equiv -1(\text{mod}\, p)$ olması için, gerek ve yeter koşul p'nin $5t \pm 2$ biçiminde olmasıdır. ($t = 0,1,2,\ldots$)

Teorem.4.11'in karşıtı doğru değildir. Örnek olarak,

$$F_{22} = 17711 = 85.22 + 1 \equiv 1(\text{mod}\, 22)$$

fakat 22 bir asal değildir. (Vajda S., 1989)

Teorem.4.12. Eğer p, $5t \pm 1$ biçiminde bir asal ise $F_{p-1} \equiv 0(\text{mod}\, p)$'dir, $(t = 0,1,2,\ldots)$'dir.

İspat: Özdeşlik.19'dan $n = p-1$ için,

$$2^{p-2}F_{p-1} = \binom{p-1}{1} + 5\binom{p-1}{3} + \ldots + 5^{(p-3)/2}\binom{p-1}{p-2}$$

dir. (2.3)' den

$$2^{p-2}F_{p-1} \equiv -(1+5+5^2+\ldots+5^{(p-3)/2}) \equiv -\frac{1}{4}(5^{(p-1)/2}-1)(\bmod p)$$

olur. Bu nedenle, eğer $5^{(p-1)/2} \equiv 1(\bmod p)$ ise o zaman $F_{p-1} \equiv 0(\bmod p)$ olur. (Vajda S., 1989)

Teorem 4. 13. Eğer p asalı $5t \pm 2(t = 0,1,2,\ldots)$ biçiminde ise $F_{p+1} \equiv 0(\bmod p)$ 'dir.

İspat: Özdeşlik.19'dan $n = p+1$ için,

$$2^{p}F_{p+1} = \binom{p+1}{1} + 5\binom{p+1}{3} + \ldots + 5^{(p-1)/2}\binom{p+1}{p+1}$$

(2.4)'den

$$2^{p}F_{P+1} \equiv 1 + 5^{(P-1)/2}(\bmod p)$$

dir. Eğer $5^{(p-1)/2} \equiv -1(\bmod p)$ ise $F_{p+1} \equiv 0(\bmod p)$ olur.

Bu üç teorem Fibonacci sayılarının Simpson formülüne uygundur. Gerçekten, p bir tek asal sayı ise, F_{p-1} veya F_{p+1}'den biri p modülüne göre 0'a denktir ve $F_p^2 \equiv 1(\bmod p)$'dir.

Açıkça, p+1 veya p-1, p ile bölünebilen bir Fibonacci sayısının en küçük indisi olması şart değildir. Örnek olarak,

$F_{18} = 2584 = 17.152$ sayısı 17 ile bölünebilir. Fakat, 17 ile bölünebilen daha küçük indisli Fibonacci sayısı $F_9 = 17.2$'dır.

Sonuç olarak; her asal sayı, bazı Fibonacci sayılarının çarpanıdır. Teorem 4.11, Teorem 4. 12 ve Teorem 4. 13'ten yararlanarak, Lucas sayıları için de benzer sonuçlar çıkaracağız. (Vajda S., 1989)

Teorem 4. 14. p bir asal ise $L_p \equiv 1(\bmod p)$ **'dir.**

İspat: Özdeşlik 20'den

$$2^{p-1} L_p = 1 + 5\binom{p}{2} + 5^2\binom{p}{4} + ... + 5^{(p-1)/2}\binom{p}{p-1}$$

olup, burada (2.1) ve (2.2) özdeşlikleri kullanılarak

$$L_p \equiv 1(\bmod p)$$

elde edilir.

Teorem.4.14'ün karşıtı doğru değildir. Örnek olarak, $L_{705} \equiv 1(\bmod 705)$ olduğu halde 705 bir asal sayı değildir. (Vajda S., 1989)

Teorem 4.15. Eğer p asalı $5t \pm 1$(t tam sayı) biçiminde ise o zaman $L_{p-1} \equiv 2(\bmod p)$ 'dir.

İspat: Özdeşlik 20'den ve (2.3)'den,

$$2^{p-2} L_{p-1} = 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{(p-1)/2} \equiv \frac{1}{4}(5^{(p+1)/2} - 1)(\bmod p)$$

elde ederiz. Eğer, $5^{(p-1)/2} \equiv 1(\bmod p)$ ise $5^{(p+1)/2} \equiv 5(\bmod p)$ olur. Buradan,

$$2^{p-2} L_{p-1} \equiv (5-1)/4 \equiv 1(\bmod p) \text{ ve } 2^{p-1} L_{P-1} \equiv 2(\bmod p)$$

bulunur. (2.1) eşitliğini kullanarak,

$$L_{p-1} \equiv 2(\bmod p)$$

elde edilir. (Vajda S., 1989)

Teorem 4.16. Eğer p asalı, $5t \pm 2$ (t tam sayı) biçiminde ise o zaman $L_{p+1} \equiv -2(\bmod p)$'dir.

İspat: Özdeşlik 20'den

$$2^p L_{p+1} = 1 + 5\binom{p+1}{2} + 5^2\binom{p+1}{4} + ... + 5^{(p+1)/2}\binom{p+1}{p+1}$$

olup, burada (2.4) özdeşliğinden yararlanıyoruz. Bu eşitliğin varlığı ile ,

$$2^p L_{p+1} \equiv (1 + 5^{(p+1)/2})(\bmod p)$$

elde edilir. Tekrar (2.1) eşitliğini kullanırsak , $5^{(p-1)/2} \equiv -1(\bmod p)$'den ,

$$2^p L_{p+1} \equiv (1 + 5.5^{(p-1)/2})(\bmod p)$$

elde edilir. Buradan,

$$2^{p-1} L_{p+1} \equiv -2(\bmod p)$$

bulunur. (2.1) kullanılarak,

$$L_{p+1} \equiv -2(\bmod p)$$

elde edilir. (Vajda S., 1989)

Teorem 4. 14 ve

$$L_{kt} = L_t^k + \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k}{i}(-1)^{i(t+1)} L_t^{k-2i}\binom{k-i-1}{i-1} \tag{4.6}$$

eşitliğine uyan daha başka ifadeler üreteceğiz.

t bir tek asal sayı ise (4.6)'dan,

$$L_{kt} = L_t^k + \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k}{i}\binom{k-i-1}{i-1} L_t^{k-2i}$$

yazarız. Buradan $t=1$ için,

$$L_k = L_1^k + \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k}{i}\binom{k-i-1}{i-1} L_1^{k-2i}$$

elde ederiz. Çünkü, $L_1 = 1$ ve $L_p \equiv 1 (\bmod p)$'dir. Buradan t tek asal sayı ise $L_{kt} \equiv L_k (\bmod t)$'dir. Bir önemli gerçek de $L_{2k} \equiv L_k (\bmod 2)$ olup, doğrudur. k eğer 3 ile bölünebiliyorsa L_k'nın çift olduğunu biliyoruz. O zaman $2k$, 3 ile bölünebilir ve L_{2k} çifttir. Diğer taraftan L_k tek ise ya $k \equiv 1 (\bmod 3)$ ya da $k \equiv 2 (\bmod 3)$ olur. Buradan ya $2k \equiv 2 (\bmod 3)$ ya da $2k \equiv 1 (\bmod 3)$ olup L_{2k} tektir.

Şimdi L_{kt}/L_t'nin bir tam sayı olma durumunu düşünelim. Biz önceki bilgilerimizle *k*'nın tek sayı olacağını biliyoruz. Şimdi aşağıdaki teoreme bakalım.

Teorem 4. 17. Eğer L_k tek sayı ise L_{kt}/L_t'de bir tek sayıdır.

İspat: Burada iki ayrı durumu ele alalım. L_t bölenini ilk olarak tek, sonra ise çift alalım.

(a) L_t tek olsun. Burada *t* kesinlikle 3'ün bir katı değildir. Çünkü, eğer L_k'yı tek farz edersek, hem *k* hem de *kt*'de 3'ün bir katı değildir. O halde L_{kt} 'de tek sayı olur. İki tek sayının oranı yine tek sayı olacağından, L_{kt}/L_t oranı bir tek sayıdır.

(b) L_t çift olsun. Burada *t* indisi 3'ün bir katı olmalıdır ve buradan *kt*'de 3'ün bir katı olup L_{kt} bir çift sayı olur. Biz *k* tek sayısı için L_t ve L_{kt}'nin 2'nin aynı en yüksek kuvvetini kapsadığını göstereceğiz. Biz biliyoruz ki ,bir en yüksek kuvvet 2 veya 4'ten farklı olmayabilir. Şimdi L_t'de en yüksek kuvvet 4 ise L_{kt}, aynı zamanda 4'ü içerecektir ve hiç bir Lucas sayısı 2'nin daha büyük kuvvetini içermeyecektir. . Bu nedenle bölünmede 2'nin kuvvetleri dışarıda bırakılarak iptal edilir. Eğer L_t'de en yüksek kuvvet 2 ise o zaman (4.6)'dan bu L_{kt}'de de içerilen en yüksek kuvvet olacaktır. Buradan L_{kt}/L_t oranı her iki durumda da tektir. (Vajda S., 1989)

Teorem 4. 17'nin tersi doğru değildir. Yani, L_k çift iken, L_{kt}/L_t oranı tek veya çift olabilir.

Örnek olarak,

$L_3 = 4$

$L_{15}/L_5 = 1364/11 = 124$

$L_{18}/L_6 = 5778/18 = 321$

Teorem 4. 18. $(s,t) = d$ ise s/d ve t/d oranlarının her ikisi de tek sayı olmak şartıyla $(L_s, L_t) = L_d$ 'dir.

İspat: Biz hangi şartlarda L_s ve L_t'nin ortak böleninin L_d olacağını biliyoruz ((4.6) ile.) . Şimdi L_d 'nin en büyük ortak bölen olduğunu ispatlayalım.

Özdeşlik. 6'dan $F_{2s} = F_s L_s$ ve $F_{2t} = F_t L_t$'dir. $(2s,2t) = 2d$ varsayımı ile (L_s, L_t), F_{2d} 'nin bir ortak bölenidir.

$(F_{2s}, F_{2t}) = F_{2d}$ olduğundan; F_{2d} , (L_s, L_t)'nin bir katıdır ve böylece $L_d F_d$, (L_s, L_t)'nin bir katıdır.

Biz Özdeşlik 27'den biliyoruz ki L_s ve F_s'nin 2'den büyük ortak çarpanı yoktur ve bu aynı zamanda L_t ve F_s'nin ve F_t'nin bir çarpanı olan $F_t F_d$ için de geçerlidir. Böylece biz L_s ve F_d 'nin (aynı zamanda L_t ve F_d 'nin) 2'den büyük ortak çarpanı yoktur diye söyleriz.

İki durumda da ortak çarpan 2 idi. O zaman $(L_s, L_t) = 2L_d$ olacaktı. Biz bu nedenle L_s/L_d ve L_t/L_d 'nin her ikisinin de çift olamayacağını göstermeliyiz.

Şimdi, s/d ve t/d oranlarının her ikisi de 3 ile bölünmeyebilir. Eğer onlar bölünseydi; 3*d, s* ve *t'*nin *d*'den daha büyük ortak çarpanı olacaktı. Bu nedenle $L_{s/d}$ ve $L_{t/d}$'nin en az biri tek olmalıdır. Burada Teorem 4. 17'den L_s/L_d veya L_t/L_d (veya her ikisi de) tek olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır. (Vajda S., 1989)

Bir Diğer Fibonacci Dizisi

1971 yılında Underwood Dudley ve Bessie Tucker, Fibonacci dizisini biraz değiştirerek, $n \geq 1$ olmak üzere ,

$$S_n = F_n + (-1)^n$$

Şeklinde tanımlamışlardır. Onların yaptığı ilginç gözlem Tablo 3. 1'de görülüyor. (S_n, S_{n+1}) satırında 1., 3., 5., …elemanlar, 2., 4., 6., … Fibonacci sayılarıdır. Yine bu satırdaki 2., 4., 6., … elemanlar ise 3., 5., 7., …Lucas sayılarıdır.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_n	0	2	1	4	4	9	12	22	33	56	88	145	232	378	609
(S_n, S_{n+1})		1		4		3		11		8		29		21	

Tablo 3. 1

Teorem 4. 19. (Dudley ve Tucker, 1971)

1. $F_{4n} + 1 = F_{2n-1} L_{2n+1}$

2. $F_{4n} - 1 = F_{2n+1} L_{2n-1}$

3. $F_{4n+1} + 1 = F_{2n+1} L_{2n}$

4. $F_{4n+1} - 1 = F_{2n} L_{2n+1}$

5. $F_{4n+2} + 1 = F_{2n+2} L_{2n}$

6. $F_{4n+2} - 1 = F_{2n} L_{2n+2}$

7. $F_{4n+3} + 1 = F_{2n+1} L_{2n+2}$

8. $F_{4n+3} - 1 = F_{2n+2} L_{2n+1}$

İspat: İspatı yaparken Fibonacci sayılarının Özdeşlik 25'i kullanacağız.
Buradan,

1. $F_{4n}+1=F_{4n}+F_2$

$$=F_{(2n+1)+(2n-1)}+F_{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$=F_{2n-1}L_{2n+1}$$

ve

3. $F_{4n+1}+1=F_{4n+1}+F_1$

$$=F_{(2n+1)+2n}+F_{(2n+1)-2n}$$

$$=F_{2n+1}L_{2n}$$

ve

6. $F_{4n+2}-1=F_{4n+2}-F_2$

$$=F_{(2n+2)+2n}-F_{(2n+2)-2n}$$

$$=F_{2n}L_{2n+2}$$

olur.

Hoggatt tarafından 1971'de incelenen sonucun ardından, bu teoremin kolay olduğu görülür.

Sonuç 4. 7. (Hoggatt,1971)

1. $(F_{4n+1}+1,F_{4n+2}+1)=L_{2n}$

2. $(F_{4n+1}+1,F_{4n+3}+1)=F_{2n+1}$

3. $(F_{4n+1}-1,F_{4n+2}-1)=F_{2n}$

4. $(F_{4n+1}-1,F_{4n+3}-1)=L_{2n+1}$

5. $(F_{4n-1}-1,F_{4n+1}-1)=F_{2n}$

6. $(F_{4n-1}+1,F_{4n+1}+1)=L_{2n}$

7. $(F_{4n+3}+1,F_{4n}-1)=F_{2n+1}$

8. $(F_{4n+3}+1,F_{4n+2}-1)=F_{2n}$

9. $(F_{4n+4}-1,F_{4n+3}-1)=L_{2n+1}$

İspat: İspatı yaparken Teorem 4.19'dan yararlanacağız.

7. $(F_{4n+3}+1, F_{4n}-1) = (F_{2n+1}L_{2n+2}, F_{2n+1}L_{2n-1})$

$$= F_{2n+1}(L_{2n+2}, L_{2n-1})$$

$$= F_{2n+1}.1$$

$$= F_{2n+1}$$

ve

4. $(F_{4n+1}-1, F_{4n+3}-1) = (F_{2n}L_{2n+1}, F_{2n+2}L_{2n+1})$

$$= L_{2n+1}(F_{2n}, F_{2n+2})$$

$$= L_{2n+1}.1$$

$$= L_{2n+1}$$

bulunur.

Sonsuz çokluktaki asalları kapsayan Fibonacci dizisi olup olmadığı henüz bilinmemesine rağmen, bu teorem $\{F_n+1\}$ ve $\{F_n-1\}$ dizilerinde onları sonlu yapar. Aşağıdaki sonuçta bunu göstereceğiz.

Sonuç 4. 8. $n \geq 4$ ise F_n+1 bileşik**,** $n \geq 7$ ise F_n-1 bileşik sayıdır.

İspat: $n=1$ için, bileşik $F_{4n+1}+1=4$'dür. $n \geq 2$ için, Teorem 4. 20'den $F_{4n+1}+1, F_{4n+2}+1, F_{4n+3}+1$ aşikar olmayan çarpanlardır. Böylece $n \geq 4$ için F_n+1 bir bileşiktir. Aynı şekilde, $n \geq 7$ için F_n-1 bir bileşiktir.

Dikkat edersek, $n<4$ için F_n+1 bir asaldır ve $n<7$ için de F_n-1 bir asaldır. (Koshy T. ,2001).

Daha önce yaptığımız gözlem sonucunu yeni sonuç ile doğrulayacağız.

Sonuç 4.9. $n \geq 1$ olmak üzere, $(S_{4n}, S_{4n+1}) = L_{2n+1}$, $(S_{4n+1}, S_{4n+3}) = L_{2n+1}$ ve $(S_{4n+2}, S_{4n+3}) = F_{2n+2}$'dir. (Koshy T. ,2001).

İspat: Teorem 4. 19'dan,

$$(S_{4n}, S_{4n+1}) = (F_{4n}+1, F_{4n+1}-1)$$

$$= (F_{2n-1}L_{2n+1}, F_{2n}L_{2n+1})$$

$$= L_{2n+1}(F_{2n-1}, F_{2n})$$
$$= L_{2n+1}$$

Sonuç 4.10. $H_n = F_n - (-1)^n$ olsun. $n \geq 1$ için, $(H_{4n}, H_{4n+1}) = F_{2n+1}$, $(H_{4n+1}, H_{4n+3}) = F_{2n+1}$ ve $(H_{4n+2}, H_{4n+3}) = L_{2n+2}$ 'dir. (Koshy T. ,2001).

5.BÖLÜM

FIBONACCI DİZİLERİNİN MODÜLER TEMSİLİ

Bazı modüller altında Fibonacci sayılarının negatif olmayan en küçük kalanlarının dizisi düşünülerek, Fibonacci dizilerinin bazı büyüleyici özeliklerini öğrenebiliriz. Bu alanda ilk modern araştırma 1960 yılında D.D.Wall tarafından yapıldı. Bununla beraber J.L.Lagrange 18.asırda bu tür diziler üzerinde bazı incelemeler yaptı. m değişkenini kullanarak bir modül tanımladı. Bu bölümde Renault M. (1996) tarafından verilen, "Fibonacci dizilerinin modüler temsili" ve Falcon S. , Plaza A. (2008) tarafından verilen "m modülüne göre k-Fibonacci dizileri" çalışmaları incelenmiştir.

5.1. Periyod

Fibonacci dizilerini m modülüne göre küçülterek periyodu elde ederiz.

$$F(\text{mod}\,4) = 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3$$

$$F(\text{mod}\,5) = 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 0\ 3\ 3\ 1\ 4\ 0\ 4\ 4\ 3\ 2\ 0\ 2\ 2\ 4\ 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3$$

Her hangi (genelleştirilmiş) Fibonacci dizisi m modülüne göre tekrar eder. Her hangi bir çift ileri ve geriye doğru her ikisi de tamamen bir dizi belirtecek ve kalanların çiftleri olarak sadece m^2 tane vardır. 0,0 çifti aşikar olup, biz peryodu, m modülüne göre her hangi Fibonacci dizisinde $m^2 - 1$'i maksimum uzunluk olarak alabiliriz.

Daima ilk çift yinelenmek üzere, başladığımız çifte geri döneceğiz. Varsayalım bu böyle olmasın. $x, y, ..., x, y$ bloklarında a, b çiftini içermeyen $a, b, ..., x, y, ..., x, y, ...$ dizisini alalım. Bununla beraber biz bu blokların ileri ve geriye doğru tekrarladığını biliyoruz ve böylece a, b çifti dizide olmayabilir. Bu ise bir çelişkidir.

Fibonacci dizilerini temsil eden modüllerde meydana çıkacak sıfırlar hakkında bazı şeyler söyleyebiliriz.

$$F_{s+t} = F_{s-1}F_t + F_s F_{t+1}$$

$$F_{s-t} = (-1)^t (F_s F_{t+1} - F_{s+1} F_t)$$

Özdeşliklerinden, $F_s \equiv F_t \equiv 0$ ise $F_{s+t} \equiv 0$ ve $F_{s-t} \equiv 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle $F(\bmod m)$ 'in bütün sıfırları, tam olarak dizide baştanbaşa yer alır. $F(\bmod m)$, her hangi m ve $F_0 = 0$ için periyodik olup biz, her hangi bir tam sayının sonsuz çokluktaki Fibonacci sayısı ile bölünebileceğini söyleyebiliriz. bütün Fibonacci sayıları tam olarak dizide baştanbaşa yer alan, verilen bir tam sayı tarafından bölünebilir.

$F(\bmod m)$ 'in periyodik olduğunu biliyoruz. Şimdi periyod ile bir dizinin modülü arasındaki ilişki üzerinde duracağız. Bu alanda Wall tarafından verilen tanımlar aşağıda verilmiştir.

m modülüne göre Fibonacci dizilerinin periyodunu *k(m)* ile tanımlayalım. *m* modülüne göre her hangi genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin periyodunu ise *h(m)* ile tanımlayalım. $m = 4$ için, $k(4) = 6$ ve $m = 5$ için, $k(5) = 20$ olur. Tanımdan elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

$$F_n \equiv F_{n+r.k(m)} (\bmod m)$$

$$G_n \equiv G_{n+r.h(m)} (\bmod m)$$

$$F_{k(m)} \equiv 0 (\bmod m)$$

$$F_{k(m)-1} \equiv F_{k(m)+1} \equiv F_{k(m)+2} \equiv 1 (\bmod m)$$

Eğer $F_n \equiv 0 (\bmod m)$ ve $F_{n+1} \equiv 1 (\bmod m)$ ise $k(m) \mid n$ olduğunu sık sık kullanacağız. Bu ise $F(\bmod m)$ 'in periyodik olmasının bir sonucudur.

Biz şimdi bazı notasyonlar kullanarak $F(\bmod m)$ 'in genel özeliklerinden bazılarını ispat edeceğiz. (Renault M., 1996)

Teorem 5.1.1. $m \geq 3$ için, $k(m)$ çifttir.

İspat: $k = k(m)$ olarak alalım ve bütün uygun m modüllerini düşünelim. (3.2) eşitliğinden *t* tek ise, $F_t = F_{-t}$ ve *t* çift ise, $F_t = -F_{-t}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi varsayalım *k* tek olsun. *m*'nin 2'ye eşit olduğunu gösterelim.

$F_1 = F_{-1} \equiv F_{k-1}$ olduğunu biliyoruz. *k* tek ise *k*-1 çift olup, $F_{k-1} = -F_{1-k} \equiv -F_1$ olur. Böylece $F_1 = F_{-1}$ olup $m = 2$ olduğu görülür. (Renault M., 1996)

Diğer taraftan $F(\bmod m)$'in bazı özeliklerinden $n \mid m$ olduğunda $k(n) \mid k(m)$'dir. Bu şaşırtıcı özelik genelleştirilmiş Fibonacci dizileri için de doğrudur.

Teorem 5.1.2. $n \mid m$ ise verilmiş bir Fibonacci dizisi için $h(n) \mid h(m)$'dir.

İspat: $h = h(m)$ olsun. h uzunluğunun bloklarındaki tekrarı $G(\bmod m)$ ile gösterelim. Seçilen i için $G_i \equiv G_{i+h} (\bmod n)$ ile göstereceğiz. $0 \le a < m$ olmak üzere,

$$G_i = a + mx \text{ ve } G_{i+h} = a + my$$

olduğu zaman,

$$G_i = G_{i+h} (\bmod m)$$

olduğunu biliyoruz. $m = n.r$ alalırsak,

$$G_i = a + nrx \text{ ve } G_{i+h} = a + nry$$

elde edilir. $a = a' + nw$, $(0 \le a' < n)$ alalım. Bu taktirde,

$$G_i = a' + n(w + rx) \text{ ve } G_{i+h} = a' + n(w + ry)$$

elde edilir. Elbette bu,

$$G_i \equiv G_{i+h} (\bmod n)$$

olduğunu gösterir. (Renault M., 1996)

Teorem 5.1.3. m'nin asal çarpanları $m = \prod p_i^{e_i}$ şeklinde ise,

$$h(m) = lcm[h(p_i^{e_i})]$$

dir.

İspat: Teorem 5.1.2.'den her i için, $h(p_i^{e_i}) \mid h(m)$ olduğundan, $lcm[h(p_i^{e_i})] \mid h(m)$ dir. $h(p_i^{e_i}) \mid lcm[h(p_i^{e_i})]$ olduğundan $lcm[h(p_i^{e_i})]$ uzunluğunun bloklarındaki tekrarı $G(\bmod p_i^{e_i})$ ile gösterelim. Burada her i için,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{lcm}\left[\mathrm{h}\left(\mathrm{p_i}^{e_i}\right)\right]} \equiv G_0 \text{ ve } \mathrm{G}_{\mathrm{lcm}\left[\mathrm{h}\left(\mathrm{p_i}^{e_i}\right)\right]+1} \equiv G_1 (\bmod p_i^{e_i})$$

dir. Bütün $p_i^{e_i}$'ler aralarında asal olduğundan, (2.5)'den,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{lcm}\left[\mathrm{h}\left(\mathrm{p_i}^{e_i}\right)\right]} \equiv G_0 \text{ ve } \mathrm{G}_{\mathrm{lcm}\left[\mathrm{h}\left(\mathrm{p_i}^{e_i}\right)\right]+1} \equiv G_1 (\bmod m)$$

elde edilir. Böylece $lcm[h(p_i^{e_i})]$ uzunluğunun bloklarındaki tekrar $G(\bmod m)$ olup $h(m) \mid lcm[h(p_i^{e_i})]$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır. (Renault M., 1996)

Teorem 5.1.4. $h([m,n]) = [h(m), h(n)]$
dir.
İspat: $m \mid [m,n]$ ve $n \mid [m,n]$ olup, Teorem 5.1.2.'den $h(m) \mid h([m,n])$ ve $h(n) \mid h([m,n])$'dir.

m ve *n*'nin en küçük ortak katının asal çarpanları,

$$[m,n] = p_1^{e_1}.p_2^{e_2}...p_t^{e_t}$$

alalım. Bu taktirde, Teorem 5.1.3.'den

$$h([m,n]) = h(p_1^{e_1}.p_2^{e_2}...p_t^{e_t}) = [h(p_1^{e_1})...h(p_t^{e_t})]$$

elde edilir. $p_i^{e_i}$, her *i* için *m* veya *n*'yi böler, buradan her $h(p_i^{e_i})$'de $h(m)$ veya $h(n)$'yi böler. Böylece,

$$[h(p_1^{e_1})...h(p_t^{e_t})] \mid [h(m), h(n)]$$

elde edilir. Başka bir deyişle,

$$h([m,n]) \mid [h(m), h(n)]$$

olup,

$$h([m,n]) = [h(m), h(n)]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. (Renault M., 1996)

5.2. *m* Modülüne Göre *k*-Fibonacci Dizileri

Burada *m* modülünden yararlanarak k- Fibonacci dizilerinin periyod uzunluğunu çalışacağız. Bu periyod, Pisano periyodu olarak bilinen devirli diziler gibidir. Periyot uzunluğunu $\pi_k(m)$ ile tanımlayalım. Burada, her *k* tek sayısı için;

$$\pi_k(k^2+4) = 4(k^2+4)$$

olduğu ispatlandı.

Bu çalışmada *m* modülünden faydalanarak *k*- Fibonacci dizilerinin indirgenmesi ile bulunan dizilerin periyod uzunluğunu göstereceğiz. Bu problem, klasik mod$m$ Fibonacci dizilerinin bir genelleştirmesidir. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Tanım 5.2.1. Her hangi $k \geq 1$ tam sayısı için k. Fibonacci dizisini $\{F_{k,n}\}_{n\in N}$ ile tanımlayalım. $n \geq 1$ için

$$F_{k,0} = 0 \;, F_{k,1} = 1 \text{ ve } F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1} \tag{5.1}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Eğer *k, x* gibi bir reel değişken ise,

$$F_{k,n} = F_{x,n}$$

olur ve (5.1) eşitliği;

$$F_{n+1}(x) = \left\{\begin{array}{cc} 1 & ,n=o \\ x & ,n=1 \\ xF_n(x)+F_{n-1}(x) & ,n>1 \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

ile tanımlanan Fibonacci polinomlarını verir. Tanımdan;

* Eğer $k = 1$ ise, klasik Fibonacci dizileri bulunur.
* Eğer $k = 2$ ise, Pell dizileri oluşur.

k- Fibonacci sayılarının tanımından, ilk 8 terim Tablo-1'de verilmiştir. *k*=1,2,3,… alınarak ayrı ayrı *k*-Fibonacci dizileri bulunur. Bunlar;

$\{F_{1,n}\}_{n\in N} = \{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...\}$

$\{F_{2,n}\}_{n\in N} = \{0,1,2,5,12,29,70,169,408,985,2378,...\}$

$\{F_{3,n}\}_{n\in N} = \{0,1,3,10,33,109,360,1189,3927,12970,42837,...\}$

$\{F_{4,n}\}_{n\in N} = \{0,1,4,17,72,305,1292,5473,23184,98209,416020,...\}$

şeklindedir. Örnek olarak, $\{F_{4,n}\}_{n\in N}$, 4-Fibonacci dizilerinin yedinci elemanı,

$F_{4,7} = 4^6 + 5.4^4 + 6.4^2 + 1 = 5473$

olduğu görülür

İlk sekiz *k*- Fibonacci sayısı

$F_{k,1} = 1$
$F_{k,2} = k$
$F_{k,3} = k^2 + 1$
$F_{k,4} = k^3 + 2k$
$F_{k,5} = k^4 + 3k^2 + 1$
$F_{k,6} = k^5 + 4k^3 + 3k$
$F_{k,7} = k^6 + 5k^4 + 6k^2 + 1$
$F_{k,8} = k^7 + 6k^5 + 10k^3 + 4k$

Tablo-1

Şimdi k-Fibonacci dizilerinin bazı özeliklerini verelim. $\alpha = \dfrac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$, $r^2 - kr - 1 = 0$ karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere;

$$F_{k,n} = \frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha + \alpha^{-1}}$$

olur.

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} \left(k^2 + 4\right)^i \tag{5.3}$$

$$F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i} \tag{5.4}$$

$$F_{k,n-r} F_{k,n+r} - F_{k,n}^2 = (-1)^{n+1-r} F_{k,r}^2 \tag{5.5}$$

$$F_{k,n-1} F_{k,n+1} - F_{k,n}^2 = (-1)^n \tag{5.6}$$

$$F_{k,m} F_{k,n+1} - F_{k,m+1} F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n} \tag{5.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,i} = \frac{1}{k}\left(F_{k,n+1} + F_{k,n} - 1\right) \tag{5.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,2i} = \frac{1}{k}\left(F_{k,2n+1} - 1\right) \tag{5.9}$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,2i+1} = \frac{1}{k} F_{k,2n+2} \tag{5.10}$$

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx-x^2} \tag{5.11}$$

şeklindedir. (Falcon S. , Plaza A. 2007-2009)

5.2.1. *k*-Fibonacci Dizileri İçin Pisano Periyotları

Bu kısımda diziler, m bir tam sayı olmak üzere k-Fibonacci mod m dizilerinin kalanları düşünerek bulundu. Her hangi bir m sabit tam sayısı ve $k = 1,2,...$ parametrelerinin değişken değerleri için m modüllerinin kalanları ile yeni bir dizi elde edildi. mod n tekrarlı, k-Fibonacci sayı dizisinin n. Pisano periyodu $\pi(n)$ ile gösterilir.

Her Pisano periyodu sıfır ile başlar ve 1 ile sona erer. Periyod uzunluğu, m modülüne göre bir periyod içindeki kalanların sayısıdır ve $\pi_k(m)$ ile gösterilir. Her hangi bir periyod bir veya daha çok sıfırı içerdiği için, ilk sıfır dahil ikinci sıfır arasındaki kalanların kümesi zincir olarak tanımlanır. Her bir zincirdeki elemanların sayısı aynı olmak Pisano periyodu 1,2 veya 4 zincir içerir.

m modülüne göre k-Fibonacci dizisinin kalanlarının dizisini $\{F_{k,n} \bmod m\}_{n\in N}$ ile gösterelim. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Teorem 5.2.1. $\{F_{k,n} \bmod m\}_{n\in N}$ dizisi, m^2'den daha küçük periyotlu, basit bir periyodik dizidir.

$\{F_{k,n} \bmod m\}_{n\in N}$ kalanlarının dizisini $\{r_1, r_2, ...\}$ ile gösterelim. İfademizin anlaşılması için $(r_1, r_2), (r_2, r_3), ..., (r_{p^2}, r_{p^2+1})$ kalanlarının m^2 çiftlerini düşüneceğiz. Eğer çiftlerin her hangi biri bir diğerinden farklı ise, mod$m$ sayılarının sadece m^2 çifti var olduğu için içlerinden biri $(0,1)$ şeklinde olacaktır.

Eğer $(r_p, r_{p+1}) = (0,1)$ ise aşikar olarak $(r_{p+1}, r_{p+2}) = (1, k)$ ve bu nedenle kalanların dizisi p periyodu ile periyodiktir.

Diğer taraftan, eğer bu çiftlerin ikisi aynı ise, örnek olarak; eğer $i < j$ için $(r_i, r_{i+1}) = (r_j, r_{j+1})$ ise bu taktirde, $(r_{i-1}, r_i) = (r_{j-1}, r_j)$ ve bu şekilde devam edersek,

$$(r_1, r_2) = (r_{j-i}, r_{j-i+1}) = (1, k)$$

elde edilir ve böylece dizi, *j-i* periyodu ile periyodiktir. (Wall DD.,1960, Wuderlich M., 1963).

Sonuç 5.2.1. Eğer $m > 1$ ise, her Pisano periyodu $0,1,...$ ile başlar.

Sonuç 5.2.2. Eğer m'nin asal çarpanları,

$$m = \prod p_i^{e_i}$$

şeklinde ise o zaman,

$$\pi_k(lcm(p_i^{e_i})) = lcm(\pi_k(p_i^{e_i}))$$

olur. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Sonuç 5.2.3. Eğer $r \mid m$ ise $\pi_k(r) \mid \pi_k(m)$'dir.

Uyarı 5.2.1. $r = 1,2,3,...$ için,

$$\pi_{2r+1}(2) = 3 \text{ ve } \pi_{2r}(2) = 2$$

şeklindedir. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Teorem 5.2.2. Eğer $\{F_{k,m} \bmod m\}$ Pisano dizisinin ilk iki zinciri

$$0, a_1, a_2, ..., a_{r-2}, a_{r-1} \text{ ve } 0, b_1, b_2, ..., b_{r-1}$$

ise bu taktirde,

$$b_{2i+1} = a_{r-(2i+1)} \text{ ve } b_{2i} = m - a_{r-2i}$$

olur.

İspat: $F_{k,r+1} = kF_{k,r} + F_{k,r-1}$ ve $0 = F_{k,r} (\bmod m)$ düşünerek,

$$b_1 \equiv F_{k,r+1} (\bmod m) \equiv F_{k,r-1} (\bmod m) \equiv a_{r-1}$$

elde ederiz. Şimdi,

$$F_{k,r+2} = (k^2 + 2)F_{k,r} - F_{k,r-2}$$

eşitliğinden,

$$b_2 = kalan\left(\frac{F_{k,r+2}}{m}\right) = -kalan\left(\frac{F_{k,r-2}}{m}\right) = m - a_{r-2}$$

elde edilir. Son olarak önceki nedenler tekrarlanarak ispat yapılır. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Sonuç 5.2.1'den k-Fibonacci mod$m$ dizilerinin kalanlarının bir dizisinde Pisano periyodunun son elemanı 1 ve takip eden periyodun ilk elemanı 0 olduğundan, 1ve 0 ardışıktır.

$m > 2$ olmak üzere, her Pisano periyodunun eleman sayısı çifttir.

Sonuç 5.2.4. Eğer bir zincir elemanlarının sayısı çift ise, bu taktirde Pisano periyodu bir veya iki zincir gösterir.

İspat: Eğer zincirin en son elemanı 1 ise o zaman takip eden zincirin ilk elemanı 0'dır ve bu nedenle ilk zincir Pisano periyodudur. Diğer durumda, eğer son eleman 1 değil ise o zaman birinci zincirin son elemanı ile takip eden zincirin ikinci elemanı aynıdır ve böyle devam edilerek ikinci zincirin son elemanı ilk zincirin ikinci elemanı ile aynıdır ve bu 1'dir. Böylece periyot sona erer. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Sonuç 5.2.5. Eğer bir zincir elemanlarının sayısı tek ise, o zaman Pisano periyodu 4 zincirdir.

İspat: Eğer ilk zincir elemanlarının sayısı tek ise o zaman ikinci zincirin son elemanı $m-1$'dir ve buda üçüncü zincirin ikinci elemanı ile aynıdır ve böylece dördüncü zincirin son elemanı m-(m-1)=1'dir vePisano periyodu sona erer. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Sonuç 5.2.6. Her Pisano periyodu 1,2 veya 4 zincirdir.

Teorem 5.2.3. Eğer k tek sayı ise bu taktirde,

$$\pi_k(k^2+4) = 4(k^2+4)$$

olur.

İspat: k- Fibonacci dizilerinin genel terimi için (5.3)'de $n = k^2 + 4$ ise,

$$F_{k,k^2+4} = \left(\frac{k}{2}\right)^{k^2+3} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{k^2+3}{2} \right\rfloor} \binom{k^2+4}{2i+1} k^{-2i} \left(k^2+4\right)^i$$

olup F_{k,k^2+4}, ($k^2 + 4$)'ün katı olduğundan;

$$F_{k,k^2+4} \equiv 0 \operatorname{mod}(k^2+4)$$

elde edilir. Böylece bu elemanlar gelecek zincirin ilk terimidir. Ayrıca k tek olduğundan ($k^2 + 4$)'de tek olup Sonuç 5.2.5'ten Pisano periyodunun uzunluğu $4(k^2+4)$ olur. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Uyarı 5.2.2. $\pi(m)$ **;** her m için, $6m$'e eşit veya daha küçüktür. (Fredy P, Brown KS, 1992).

Teorem.5.2.2'den $\pi_k(2) = 3$ olması için gerek ve yeter şart k'nın tek olmasıdır. Buna bağlı olarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 5.2.7. Her hangi k tek sayısı için,

$$\pi_k(2(k^2+4)) = 6(2(k^2+4)) \tag{5.12}$$

olur. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

(k^2+4)'ün her kuvveti için,

$$\pi_k((k^2+4)^r) = 4(k^2+4)^r$$

olup bu nedenle her hangi k- Fibonacci dizilerinde (5.12) eşitliğini elde etmek için m modülünün sonsuz değerleri vardır.

$$\pi_k(2(k^2+4)^r) = \pi_k(2).\pi_k(k^2+4)^r = \pi_k(2).(\pi_k(k^2+4))^r = 3.4(k^2+4)^r = 6(2(k^2+4)^r)$$

Uyarı 5.2.3. Eğer k tek sayı ve $k^2 + 4$ asal olmayan bir sayı ise o zaman $k^2 + 4$, 5 ile bölünür ve karşılık gelen k-Fibonacci dizisinde,

$$\pi_k(5) = 4.5 \text{ ve } \pi_k\left(\frac{k^2+4}{5}\right) = 4\left(\frac{k^2+4}{5}\right)$$

olup aynı zamanda çarpanların bir kombinasyonudur. Eğer k tek sayı ve k^2+4 asal olmayan bir sayı ise $k=10r\pm 1$ biçimindedir. O zaman $k=10r\pm 1$ ise $k^2+4=5a$ olup ve $n_1, n_2 \in \mathrm{N}$ için $m=5^{n_1}a^{n_2}$ biçimindeki her m sayısı için $\pi_k(m)=4m$ bağıntısı vardır.

Örnek olarak, $k=9$ için, $k^2+4=85=5.17$ ve $5,17,85,25,125,289,425,\ldots$ gibi $m=5^{n_1}17^{n_2}$ her hangi kombinasyonu için $\pi_9(m)=4m$ doğrudur.

Teorem 5.2.4. Eğer $k\geq 2$ ve çift sayı ise, $\pi_k(2k)=4$ olur. Eğer $k\geq 3$ ve tek sayı ise, $\pi_k(2k)=6$ olur.

İspat: Eğer $r\geq 1$, $k=2r$ ise polinomların k-Fibonacci dizisi,

$$\{0,1,2r,(2r)^2+1,(2r)^3+2(2r),...\}$$

şeklindedir. Dikkat edersek, $(2r)^3+2(2r)=4r(2r^2+1)$ elde ederiz, $\{0,1,2r,1\}$ zinciri aynı zamanda bir Pisano periyodunu belirtirken $\{0,1,2r,1,0,...\}$, mod $(4r)$ kalanlarının dizisidir ve $\pi_k(2k)=4$ olur.

Eğer $r\geq 1$, $k=2r+1$ ise ilk k-Fibonacci polinomları aşağıdaki gibidir;

$F_{k,0}=0$

$F_{k,1}=1$

$F_{k,2}=2r+1$

$F_{k,3}=(2r+1)^2+1=4r^2+4r+2$

$F_{k,4}=(2r+1)^3+2(2r+1)=8r^3+12r^2+10r+3$

$F_{k,5}=(2r+1)^4+3(2r+1)^2++=16r^4+32r^3+36r^2+20r+5$

$F_{k,6}=(2r+1)^5+4(2r+1)^3+3(2r+1)=32r^5+80r^4+112r^3+88r^2+40r+8$

$2k=4r+2$ modülünün kalanlarının dizisi,

$$\{0,1,2r+1,2r+2,2r+1,1,0,...\}$$

olup, böylece $\{0,1,2r+1,2r+2,2r+1,1\}$ zinciri bir Pisano periyodudur ve $\pi_k(2k)=6$ elde edilir. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Teorem 5.2.5. $r\geq 1$ ve her hangi k tam sayısı için,

$$\pi_{r.k}(k)=2$$

şeklindedir.

İspat: ($r.k$)- Fibonacci dizisi $\{0,1,rk,(rk)^2+1,...\}$ olur ve k modülünün kalanlarının dizisi $\{0,1,0,1,...\}$ şeklindedir. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Modülün 6 katı olan Pisano periyodunun uzunluğu için k-Fibonacci dizilerinin bazı örnekleri aşağıda verilmiştir.

- $k=1$ için, $\pi(5)=20$ ve aynı zamanda $\pi(10)=\pi(2)\pi(5)=3(4.5)=60$,

$\pi(50)=\pi(2.5^2)=\pi(2).\pi(5^2)=3(4.5^2)=300$,

$\pi(250)=\pi(2.5^3)=\pi(2).\pi(5^3)=3(4.5^3)=1500$, vb.

- $k=3$ için, $\pi_3(13)=4.13=52$ ve aynı zamanda

$\pi_3(26)=\pi_3(2)\pi_3(13)=3(4.13)=156$,

$\pi_3(2.13^2)=\pi_3(2)\pi_3(13^2)=3(4.13^2)=2028$,vb.

- $k=5$ için, $\pi_5(29)=4.29=116$ ve aynı zamanda

$\pi_5(2.29)=\pi_5(2).\pi_5(29)=3(4.29)=348$,

$\pi_5(2.29^2)=\pi_5(2).\pi_5(29^2)=3(4.29^2)=10092$, vb.

- $k=7$ için, $\pi_7(53)=2124.53$
- $k=9$ için, $k^2+4=85=5.17$ olup,

$\pi_9(5)=4.5, \pi_9(17)=4.17, \pi_9(85)=4.85, \pi_9(25)=4.25$, vb.'dir.

5.2.2. *k*-Fibonacci Dizileri İçin Pisano Periyot Uzunluğu Dizileri

$m=1$ için kalan sadece 0'dır ve bu nedenle her hangi k-Fibonacci dizisinin Pisano periyotlarının uzunluklarının dizisi 1 ile başlamalıdır. İlk beş k-Fibonacci dizisi için Pisano periyot uzunluğunun dizisini gösterelim;

$\{F_{1,n}(\bmod m)\}=\{1,3,8,6,20,24,16,12,24,60,10,24,28,48,40,24,36,24,...\}$,

$\{F_{2,n}(\bmod m)\}=\{1,2,8,4,12,8,6,8,24,12,12,8,28,6,24,16,16,24,40,12,...\}$,

$\{F_{3,n}(\bmod m)\} = \{1,3,2,6,12,6,16,12,6,12,8,6,52,48,12,24,16,6,40,12,...\}$,

$\{F_{4,n}(\bmod m)\} = \{1,2,8,2,20,8,16,4,8,20,10,8,28,16,40,8,12,8,6,20,...\}$,

$\{F_{5,n}(\bmod m)\} = \{1,3,8,6,2,24,6,12,8,6,24,24,12,6,8,24,36,24,40,6,...\}$.

$\{F_{1,n}(\bmod m)\}$ dizisi, klasik Fibonacci dizileridir. $\{F_{2,n}(\bmod m)\}$ dizisi ise Pell dizilerinin yerini tutar. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

5.2.3 Sabit Modüllü Pisano Periyot Uzunluğunun Periyodik Dizileri

Tablo2 , $m = 1,2,...,20$ için ilk 10, *k*-Fibonacci dizilerinden elde edilen dizileri gösterir. *k*-Fibonacci dizisindeki her çift eleman *k*'nın bir fonksiyonu olmasına karşılık her tek eleman da $f(k)+1$ şeklinde yazılır. Bu nedenle her hangi *k*-Fibonacci dizileri için,

$$\pi_k(k) = \pi_k\{0,1\} = 2$$

elde edilir.

Diğer taraftan, her $r \geq 1$ için düşünürsek, $\pi_r(m) = \pi_{k+r}(m)$ eşitliği doğrulanır. O zaman $\{\pi_k(m)\}_{k\in N}$ dizisi *k* periyodu ile periyodiktir. Aynı zamanda her $r \geq 1$ için, $\pi_r(m) = \pi_{k-r}(m)$ eşitliğinden, bu dizide Tablo-3'e karşılık gelen diziyi elde etmek için ilk $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ uzunluğundaki periyotları bulmak gereklidir. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

k/m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	3	8	6	20	24	16	12	24	60	10	24	28	48	40	24	36	24	18	60

2	1	2	8	4	12	8	6	8	24	12	12	8	28	6	24	16	16	24	40	12
3	1	3	2	6	12	6	16	12	6	12	8	6	52	48	12	24	16	6	40	12
4	1	2	8	2	20	8	16	4	8	20	10	8	28	16	40	8	12	8	6	20
5	1	3	8	6	2	24	6	12	8	6	24	24	12	6	8	24	36	24	40	6
6	1	2	2	4	20	2	16	8	6	20	24	4	6	16	20	16	36	6	8	20
7	1	3	8	6	12	24	2	12	24	12	10	24	6	6	24	24	8	24	40	12
8	1	2	8	2	12	8	16	2	24	12	8	8	12	16	24	4	68	24	18	12
9	1	3	2	6	20	6	6	12	2	60	24	6	28	6	20	24	68	6	18	60
10	1	2	8	4	2	8	16	8	24	2	10	8	52	16	8	16	8	24	18	4

Tablo-2

Örnek 5.2.1. Eğer $k=17$ ise $\pi_{17}(17)=2$'dir. Şimdi ilk 8 Pisano periyodunun uzunluğunu bulalım. Bu durumda $k=1$ için, Pisano periyod dizisinin sonuçları olan klasik Fibonacci dizileri bulunur,

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,4,0,4,4,8,12,3,15,1,16,0,16,16,15,14,12,9,4,13,0,13,9,5,14,2,16,1\}$$

ve buradan $\pi(17)=36$ elde edilir. $k=2$ için, mod17'ye göre Pisano periyodundan elde edilen Pell dizisi,

$$\{0,1,2,5,12,12,2,16,0,16,15,12,5,5,15,1\}$$

olur ve $\pi_2(17)=16$'dır. $k=3,...,8$ için aynı yolla devam edersek $36,16,16,12,36,36,8,68,68,8,36,36,12,16,16,36,2$ periyod dizisini buluruz.

5.2.4. $F_{k,n}$ Modülü İçin Pisano Periyotları

Bu kısımda, modülü *k*-Fibonacci sayısı olmak üzere, *k*-Fibonacci dizilerinin kalanlarından elde edilen diziler çalışıldı. $\{F_{k,m} \bmod F_{k,r}\}$ dizisinin ilk iki zincirinin kalanlarını ele alalım.

$$\{F_{k,m} \bmod F_{k,r}\}: 0, F_{k,1}, F_{k,2}, ..., F_{k,r-3}, F_{k,r-2}, F_{k,r-1}, 0, a_1, a_2, a_3, ..., a_{F_{k,r-1}} \qquad (5.13)$$

Teorem 5.2.6. (5.13) eşitliğinde verilen dizide, $i=0,1,2,3,...$ için;

$$a_{2i+1} = F_{k,r-(2i+1)} \text{ ve } a_{2i} = F_{k,r} - F_{k,r-2i}$$

dir.

İspat: İspatı indüksiyon ile yapacağız.

$$a_1 = kalan\left(\frac{F_{k,r+1}}{F_{k,r}}\right) = kalan\left(\frac{kF_{k,r} + F_{k,r-1}}{F_{k,r}}\right) = kalan\left(\frac{F_{k,r-1}}{F_{k,r}}\right) = F_{k,r-1} \ ,$$

$$a_2 = kalan\left(\frac{F_{k,r+2}}{F_{k,r}}\right) = kalan\left(\frac{kF_{k,r+1} + F_{k,r}}{F_{k,r}}\right) = kalan\left(\frac{kF_{k,r+1}}{F_{k,r}}\right) = kF_{k,r-1} = F_{k,r} - F_{k,r-2}$$

$$a_3 = kalan\left(\frac{F_{k,r+3}}{F_{k,r}}\right) = kalan\left(\frac{kF_{k,r+2} + F_{k,r}}{F_{k,r+1}}\right) = kalan\left(\frac{kF_{k,r} - kF_{k,r-2} + F_{k,r-1}}{F_{k,r}}\right)$$

$$= kalan\left(\frac{kF_{k,r} + F_{k,r-3}}{F_{k,r}}\right) = F_{k,r-3}$$

$$a_4 = kalan\left(\frac{F_{k,r+4}}{F_{k,r}}\right) = kalan\left(\frac{kF_{k,r+3} + F_{k,r+2}}{F_{k,r+1}}\right) = kF_{k,r-3} + F_{k,r} - F_{k,r-2} = F_{k,r} - F_{k,r-4}$$

Şeklinde devam eder ve ispat tamamlanır. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Teorem 5.2.7. Her $k \geq 1$ tam sayısı ve $F_{k,r}$, $r = 1,2,3,4,...$ değerleri için Pisano periyotlarının zincirlerinin sayısı $\{1,1,4,2,4,2,4,2,...\}$ olup, her zincir *r* elemanlıdır.

İspat: $r = 1$ için, $F_{k,1} = 1$ ve açık olarak, $\{F_{k,1} \bmod F_{k,1}\} = \{0,0,0,...\}$, böylece 0 periyodunda sadece bir zincir vardır.

Tanım5.2.1'de verilen *k*-Fibonacci polinomlarının tanımından, $\{F_{k,n} \bmod F_{k,2}\}$ kalanların dizisi; $\{F_{k,n} \bmod F_{k,2}\} = \{0,1,0,1,0,1,...\}$ olup böylece periyod $\{0,1\}$ şeklinde tek bir zincirdir.

Sonuç olarak, eğer *r* tek ise, $a_{r-1} = F_{k,r} - F_{k,1} = F_{k,r} - 1$ olup böylece aynı yolla elde edilen ikinci bir zincir bulunacaktır. Buradan son terimi 1 olan dördüncü bir zincir elde edilecektir. Bu noktada kalanların dizisi tekrar eder ve böylece Pisano periyodu dört zinciridir, sonuç olarak; $\pi(F_{k,r}) = 4r$. Diğer taraftan, eğer *r* çift ise, $a_{r-1} = 1$ ve bu noktada kalanların dizisi tekrar eder ve böylece; $\pi(F_{k,r}) = 2r$ elde edilir. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

Sonuç 5.2.8. Modülü ardışık *k*-Fibonacci sayıları olan, bir *k*-Fibonacci dizisinin zincirlerinin uzunluğu bir aritmetik dizi biçimindedir. Eğer $r \geq 2$ ve çift sayı ise, dizi aralığı 4 olur. (Falcon S. , Plaza A., 2008)

$$\{2(2n)\}_{n\geq 2} = \{4n\}_{n\geq 2} = \{8,12,16,...\}$$

elde edilir. Eğer $r \geq 1$ ve tek sayı ise, dizi aralığı 8'dir.

$$\{4(2n+1)\}_{n\geq 1} = \{12,20,28,...\}$$

elde edilir.

Klasik Fibonacci dizileri için, ardışık zincirlerin uzunluğu $\{8,12,16,...\}$'dır ve her $r \geq 3$ tek sayısı için, uzunluk $\{12,20,28,...\}$'dir. Çünkü klasik Fibonacci dizisi, sadece *k*-Fibonacci dizisi olarak $F_1 = F_2 = 1$ gibi eşit iki eleman vardır ve böylece ardışık Pisano periyotlarında zincirlerin sayısının dizisi, $\{1,1,1,2,4,2,4,...\}$ olup bu nedenle Pisano periyotlarının uzunluklarının dizisi, $\{1,1,3,8,20,12,28,...\}$ olur.

m/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**																			
2	**3**	**2**																		
3	8	8	**2**																	
4	6	**4**	6	**2**																
5	20	12	12	20	**2**															
6	24	8	**6**	8	24	**2**														
7	16	6	16	16	6	16	**2**													
8	12	8	12	**4**	12	8	12	**2**												
9	24	24	6	8	8	6	24	24	**2**											
10	60	12	12	20	**6**	20	12	12	60	**2**										
11	10	12	8	10	24	24	10	8	12	10	**2**									
12	24	8	6	8	24	**4**	24	8	6	8	24	**2**								
13	28	28	52	28	12	6	6	12	28	52	28	28	**2**							
14	48	6	48	16	6	16	**6**	16	6	16	48	6	48	**2**						
15	40	24	12	40	8	20	24	24	20	8	40	12	24	40	**2**					
16	24	16	24	8	24	16	24	**4**	24	16	24	8	24	16	24	**2**				
17	36	16	16	12	36	36	8	68	68	8	36	36	12	16	16	36	**2**			
18	24	24	6	8	24	6	24	24	**6**	24	24	6	24	8	6	24	24	**2**		
19	18	40	40	6	40	8	40	18	18	18	18	40	8	40	6	40	40	18	**2**	
20	60	12	12	20	6	20	12	12	60	**4**	60	12	12	20	6	20	12	12	20	**2**

Tablo-3

3-Fibonacci dizilerinin Pisano periyotları ve onların uzunlukları

r	$F_{3,r}$	$\{F_{3,n}\} \bmod F_{3,r}$	$\pi(r)$
2	3	0,1	1×2
3	10	0,1,3,0,3,9,0,9,7,0,7,1	4×3
4	33	0,1,3,10,0,10,30,1	2×4
5	109	0,1,3,10,33,0,33,99,3,108,0,108,106,99,76,0,76,10,106,1	4×5
6	360	0,1,3,10,33,109,0,109,327,10,357,1	2×6
7	1189	0,1,3,10,33,109,360,0,360,1080,33,1179,3,1188,0,1188,1186,1179, 1156,1080,829,0,829,109,1156,10,1186,	4×7
8	3297	0,1,3,10,33,109,360,1189,0,1189,3567,109,3894,10,3924,1	2×8

Tablo-4

Örnek 5.2.2. $\{F_{3,n}\}_{n\in\mathrm{N}} = \{0,1,3,10,33,109,360,1189,...\}$ olmak üzere, modülü $F_{3,n}$ alarak, $n = 2,3,4,...$ için 3-Fibonacci dizisinin kalanlarını düşünelim

Tablo-4'te ardışık Pisano periyotları ve onların uzunlukları gösterilmiştir.

$r = 1,2,3,...$ için, modül $F_{3,r}$'ye göre 3-Fibonacci dizisinden Pisano periyodunun uzunluğunun dizisi, $\{1,2,12,8,20,12,28,16,...\}$ olur. Üçüncü elemandan sonra, tek terimlerin dizisi, $4\{3,5,7,9,...\}$ şeklinde 8 aralıklı bir aritmetik dizidir ve çift terimlerin dizisi, $4\{2,3,4,5,...\}$ şeklinde 4 aralıklı bir aritmetik dizidir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Fibonacci, Lucas, k-Fibonacci dizileri ile ilgili bazı çalışmalar ve Fibonacci dizilerinin bölünebilme özelikleri, m modülüne göre k-Fibonacci dizilerinin periyodu, periyod uzunluğu ile ilgili yapılan çalışmalar verilmiştir. Yeni reqürans bağıntıları tanımlanarak m modülüne göre periyod, periyod uzunluğu çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Bollinger (1990), "*Lucas's theorem and some related results for extended Pascal triangles*" American Mathematical Monthly, 198- 204.

Carmichael (1913/14), "*On the numerical factors of the arithmetic forms* $\alpha^n \pm \beta^n$ " Ann.of Math.15 (2), 30-70.

Cavachi (1980), "*Unele proprietati de termenilor şirului lui Fibonacci*" ,Gazeta Matem.85, 290- 293.

Carlitz (1964), "*A Note on Fibonacci Numbers*", The Fibonacci Quartly,1:2, 15-28.

Dudley, Tucker (1971), "Greatest Common Divisors in Altered Fibonacci Sequences" The Fibonacci Quartly,9.1 , 89-91.

Ehrlich (1989), "*On the periods of the Fibonacci sequence modulo m"* The Fibonacci Quartly, 27:11- 13.

Falcon, Plaza (2007), "*On the Fibonacci k-numbers",*Chaos , Solitions and Fractals, 32(5): 1615- 24.

Falcon, Plaza (2007), "*The Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle*", Chaos, Solitions and Fractals, 33: 38- 49.

Falcon, Plaza (2008), "*k-Fibonacci sequences modulo m*", Chaos, Solitions and Fractals, doi:10. 1016/j.chaos.2008.02.014.

Falcon, Plaza (2009), "*On k-Fibonacci sequence and polynomials and their derivatives*", Chaos,Solitions and Fractals, 39: 1005-1019.

Florican (1999), "*Arithmetic functions of Fibonacci numbers*" The Fibonacci Quartly, 37: no, 3, 265-268.

Florican (2000), "*Equations involving arithmetic functions of Fibonacci and Lucas numbers*", The Fibonacci Quartly,38: 49-55.

Fredy, Brown (1992), *"The period of Fibonacci sequences modulo m"* Am Math Mon 99(3): 278- 9.

Freeman (1967), "*On Ratios of Fibonacci and Lucas Numbers*", The Fibonacci Quartly,5: 1, 99-106.

Hoggatt (1971), "*Problem H-183*", The Fibonacci Quartly,9: 4, 389, 288- 289.

Hoggatt, Bergum (1974), "*Divisibility and Congruence Relations*", The Fibonacci Quartly,12: 2, 189-195.

Hoggatt, Bicknell (1974) ,"*Some congruences of the Fibonacci numbers modulo a prime*", p.Math.Mag.47, 210- 214.

Koshy (2001), "*Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*", John Wiley & Sons, Inc.

Lucas (1878), "*Theorie des fonctions numeriques simplement periodiques*", Amer , J. Math.I,184-240,289-321.

McDaniel (1991), "*The g.c.d in Lucas sequences and Lehmer number sequences*", The Fibonacci Quartly, 29: 24- 29.

M.Farrokhi (2007), *"Some Remarks On the Equation $F_n = kF_m$ In Fibonacci Numbers",Journal of Integer Sequences.*

Morton (1995), "*Fibonacci –like sequences and greatest common divisors*" The American Mathematical Monthly, 102:88, 731- 734.

Parker (1964), "*Problem H -21*", The Fibonacci Quarterly,2:2,133.

Renault (1996), "Master tesis" Wake Forest University.

Sloane (2006), *"The on line Encyclopedia of integer sequences".*

Sun Zhi (2006), "Expansions and Identities Concerning Lucas Sequences", The Fibonacci Quartly 44, no. 2, 145-153.

Vajda (1989), "*Fibonacci&Lucas Numbers and Golden Section*", John Wiley & Sons, Inc.

Wall (1960), "*Fibonacci series modulo m"* Am Math Mon, 67(6): 525- 32.

Weinstein (1966), "*A Divisibility Property of Fibonacci Numbers*", The Fibonacci Quarterly,4: 1, 83- 84.

Wunderlich (1963), *"On the non –existence of Fibonacci squares"* Math Comp 17(84): 455- 7.