SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİNİN ALANLARININ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

E. Gökçen ALPTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANA BİLİM DALI
KONYA, 2001

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİNİN
ALANLARININ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE**

E. Gökçen ALPTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

Bu tez 04.09.2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

....	....	....
Yrd.Doç.Dr.Ahmet Cihangir	Doç.Dr.Halil Ardahan	Doç.Dr.Eşref Hatır
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

10612

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİNİN ALANLARININ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

E. Gökçen ALPTEKİN

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İlköğretim Ana Bilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

2001, 46 Sayfa

Jüri : Doç.Dr.Halil ARDAHAN

Doç.Dr.Eşref HATIR

Yrd.Doç.Dr.Ahmet CİHANGİR

Bu çalışmada; Pythagorean üçgenleri hakkında bilgi verilerek eşit alanlı Pythagorean üçgenleri ile bir yada daha fazla kenarı kare olan Pythagorean üçgenleri incelendi. Daha sonra Pythagorean üçgenlerinin alanlarına karşılık gelen Pythagorean sayıları tanıtılarak bu sayıların özellikleri verildi. Ayrıca Pythagorean sayılarının diğer sayılar ile ilişkileri kurularak ikiz, üçüz, dördüz ve beşiz Pythagorean sayıları tanımlandı.

Anahtar Kelimeler: Pythagorean Üçlüsü, Diophantine Denklemi, Pythagorean Sayısı

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON PROPERTIES OF THE AREAS OF THE PYTHAGOREAN TRIANGLES

E. GÖKÇEN ALPTEKİN

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Primary Education

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

2001 , 46 Page

Jury : Assoc. Prof. Dr. Halil ARDAHAN

Assoc. Prof. Dr. Eşref HATIR

Assist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

In this study, Pythagorean triangles which have the same area and Pythagorean triangles which have one ore more edges have been searched by informing about Pythagorean triangles. Afterwards the features of Pythagorean numbers which are equal to the areas of Pythagorean triangles have been explained by introducing these numbers. In addition, twins, triplets, quadruplet, quintuplets of Pythagorean numbers have been told by getting the relations between Pythagorean numbers and the other number systems.

Key Words : Pythagorean Triplets, Diophantine Equations, Pythagorean Number.

ÖN SÖZ

Bazı özel tamsayı kümelerinin (mükemmel sayı, üçgensel sayı) özellikleri ilk çağlardan beri insanoğlunun ilgisini çekmiştir. Matematiğin diğer alanları ile uğraşan *Fermat*, *Gauss* ve *Jacobi* gibi ünlü matematikçiler tamsayıların bu özelliklerinin cazibesine kapılmışlardır.

Yine "x, y, z ve n tamsayıları, $x.y.z \neq 0$, $n \geq 3$ şartlarını sağlamak üzere $x^n + y^n = z^n$ *Diophantine* denkleminin hiçbir tamsayı çözümü yoktur." Biçiminde ifade edilen *Fermat*'ın son teoreminin ispatlanması için yapılan çalışmalar Kompleks Analiz ve Cebirsel Sayılar Teorisi gibi bütün matematik disiplinlerinin en aktif sahalarının ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Sayılar teorisinin en eski konularından birisi de *Fermat*' ın son teoreminin $n = 2$ için özel durumu olan $x^2 + y^2 = z^2$ *Diophantine* denkleminin tamsayı çözümlerinin ve bu çözümlerin cebirsel özelliklerinin araştırılması problemidir. Son denklemin bütün tamsayı çözümlerinin ; $u, v \in Z$, $u > v$, $u + v \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ ve $(u,v) = 1$ olmak üzere $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$ biçiminde olduğu *Euclid*' den beri bilinmektedir. Gerçekte bu denklemin çözümleri ; geometrik olarak dik kenarları x, y ve hipotenüsü z olan bütün dik üçgenlerin bulunması şeklinde yorumlanabilir.

$x^2 + y^2 = z^2$ *Diophantine* denkleminin çözümlerinin geometrik ifadesi olan x, y dik kenarlı ve z hipotenüslü dik üçgenin alanına *Pythagorean* sayısı denildiğini biliyoruz. *Pythagorean* sayıları üzerindeki çalışmalar halen devam etmektedir.

"*Pythagorean* Üçgenlerinin Alanlarının Özellikleri Üzerine" adlı tez konumun tespitinde ve tezin hazırlanması sırasında bana yardımlarını esirgemeyen danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR' e ve hocam Prof. Dr. Hasan ŞENAY'a teşekkürü zevkli bir görev olarak kabul ediyorum.

Ağustos - 2001 E.Gökçen ALPTEKİN

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Fermat' ın son teoremi olarak bilinen "$n \geq 3$ ve n tamsayı olmak üzere $x^n+y^n = z^n$ denklemini sağlayan hiçbir (x, y, z) tamsayı çözümü yoktur" biçimindeki ifadenin $n = 2$ için özel hali $x^2+y^2 = z^2$ *Pythagorean* denklemidir. *Pythagorean* denkleminin çözümleri olan (x, y, z) *Pythagorean* üçlüleri ve bu üçgenlerden her hangi ikisi arasındaki ilişkiler üzerindeki çalışmalar halen devam etmektedir.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; konu ile ilgili tanım ve teoremler asıl kaynaklarından alınarak verilmiş ve teoremlerin ispatına girilmemiştir. İkinci bölümde; *Pythagorean* üçgenleri hakkında bilgi verilmiş ve özel olarak eşit alanlı *Pythagorean* üçgenleri ve bir yada daha fazla kenarı kare olan *Pythagorean* üçgenleri tanıtılmıştır. Son bölüm de ise (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninin alanı olan *Pythagorean* sayılarına ait özellikler verildi. *Pythagorean* sayılarının *Fibonacci, Lucas* ve Mükemmel sayılar ile ilişkileri incelendi. Ayrıca ikiz, üçüz, dördüz, beşiz, bağımsız *Pythagorean* sayılarının tanımlarını verdik ve bu sayıların özelliklerini inceledik.

1.1. Kaynak Araştırması

İlk çağlardan beri üçgenler üzerinde yapılan çalışmalarda kenarları tamsayılar olan dik üçgenlerin bulunması problemi bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. $z > 0$ olmak üzere x, y, z tamsayıları için $x^2+y^2 = z^2$ oluyorsa kenarları x, y, z olan üçgene *Pythagorean* üçgeni (x, y, z) sıralı üçlüsüne de *Pythagorean* üçlüsü denir.

Milattan önce 1800 lü yıllarda Mezapotamyalı matematikçilerin bu tip üçgenler üzerinde çalıştıklarını, Kolombiya üniversitesi müzesindeki *Plimpton* Kolleksiyonunda bulunan 322 numaralı tablet üzerindeki 17 *Pythagorean* üçgeninden anlıyoruz. Helenik çağlarda *Pythagoreas* (M.Ö.569-500), *Euclid* (M.Ö.350 li yıllar) ve *Eratosthenes* (M.Ö.276-196) gibi bilim adamları tarafından yapılan çalışmalar sonucunda $u, v \in Z$, $(u, v) = 1$ ve $u > v$ olmak üzere

$$x = u^2-v^2 , y = 2uv , z = u^2+v^2$$

formülleri ile bütün (x, y, z) *Pythagorean* üçlülerinin bulunabileceği gösterildi [19].

Waclaw Sierpinski (1962) "*Pythagorean Triangles*" isimli kitabında primitif veya her hangi bir *Pythagorean* üçgeninin bulunması, x, y, z tamsayılarının oluşturduğu *Pythagorean* üçgeninin parametrelere bağlı temsillerini vermiştir. Farklı hipotenüslü eşit alanlı *Pythagorean* üçgenleri hakkında özellikler verilmiş, bir yada daha fazla kenarı kare olan *Pythagorean* üçgenleri tanıtılmıştır. Ayrıca *Pythagorean* üçgenlerinin kenarlarından en az birinin 3, 4 veya 5 ile bölünebileceğini göstermiştir. Bunlara ek olarak iki kenarı ardışık olan Pythagorean üçgenlerinden, eşit çevreli ve eşit alanlı Pythagorean üçgenlerinden bahsetmiştir [15].

Fermat her n doğal sayısı için, eşit alanlı n *Pythagorean* üçgeni kümesi olduğunu ifade etmiştir. Eşit alanlara sahip iki *Pythagorean* üçgenin üretilmesi ve bu *Pythagorean* üçgenlerin primitif olması için gerek şartları vermiştir. Ayrıca bu tip üçgenlerin kümesinin geometrik özelliklerinden bahsedilmiştir [20].

1.2. Ön Bilgiler

Tanım 1.2.1 a ve b tamsayılar olmak üzere $a=b.c$ olacak şekilde bir c tamsayısı varsa b, a yı böler denir ve $b\,|\,a$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.2.2 a ve b tamsayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü d ise d ye a ve b nin en büyük ortak böleni denir ve (a, b) = d şeklinde ifade edilir [17].

Tanım 1.2.3 Eğer p ve q, $p<q$ şartını sağlayan tek asallar ise o zaman $q - p \geq 2$ dir. Eğer $q - p = 2$ ise o zaman p ile q ya ikiz asallar denir. Yani ardışık iki tek sayı asal ise bu sayılara ikiz asallar denir [14].

Tanım 1.2.4 Bir n doğal sayısı kendisinden küçük bütün pozitif bölenlerinin toplamına eşitse bu n doğal sayısına mükemmel sayı denir [16].

Teorem 1.2.1 Bir çift sayının mükemmel sayı olması için gerek ve yeter şart n bir doğal sayı ve 2^n-1 de bir asal sayı olmak üzere bu çift sayının $2^{n-1}(2^n-1)$ şeklinde olmasıdır [2].

Teorem 1.2.2 Bir n çift mükemmel sayısının birler basamağında 6 veya 8 bulunur. Yani $n \equiv 6 (mod 10)$ veya $n \equiv 8 (mod 10)$ dur [2].

Tanım 1.2.5 $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ eşitliği ile tanımlanan sayılara *Fibonacci* sayıları denir. *Fibonacci* sayılarından oluşan ve 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... biçiminde verilen diziye de *Fibonacci* dizisi denir [8].

Teorem 1.2.3 Pozitif bir n tamsayısı için *Fibonacci* dizisinden alınan F_n ve F_{n+1} biçimindeki iki ardışık *Fibonacci* sayısı aralarında asaldır [8].

Teorem 1.2.4 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ dir. n bir tek sayı ise $F_{n+1} F_{n-1} = F_n^2 - 1$ şeklinde yazılabilir [18].

Tanım 1.2.6 $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ ve $n \geq 3$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ eşitlikleri ile tanımlanan sayılara *Lucas* sayıları denir. *Lucas* sayılarının oluşturduğu 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322,... biçimindeki diziye *Lucas* dizisi denir [8].

Teorem 1.2.5 Her $n \geq 1$ için iki ardışık Lucas sayısı aralarında asaldır [8].

Teorem 1.2.6 (Bertrand Postulatı) n bir pozitif tamsayı olmak üzere $n < p \leq 2n$ eşitliğini gerçekleyen en az bir p asalı vardır. Yani p_r, r inci asal ise her r için $p_{r+1} < 2p_r$ dir [8].

Teorem 1.2.7(Küçük Fermat Teoremi) Her hangi bir a tamsayısı ve p asalı için $a^p \equiv a(modp)$ dir [17].

Tanım 1.2.7 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitif reel sayıları ile negatif olmayan bir a_0 reel sayısı verilsin. O zaman $[a_0] = a_0$ ve $n \geq 1$ için

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]}$$

ifadesine sonlu sürekli kesir denir [14].

Tanım 1.2.8 a_0 hariç a_i –lerin tümü($i = 1, 2, 3, \ldots$, n için) pozitif ve reel olmak üzere $A = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ olarak verilsin. Eğer $0 \leq k \leq n$ için $C_k = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ olarak verilen C_k ifadesine A nın k –ıncı yakınsaması denir [14].

Teorem 1.2.8 a_0 tamsayısı hariç a_i tamsayılarının tümü pozitif olmak üzere bir $A=[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$sonlu sürekli kesri verildiğinde $k \geq 0$ için $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$dizileri,

$$p_{-2} = 0,\ p_{-1} = 1,\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$
$$p_{-2} = 1,\ q_{-1} = 0,\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

biçiminde verilir [14].

Tanım 1.2.9 C ve D, 0 < C < D ve $\frac{D}{C}$ de bir kareye eşit olmayacak şekilde tamsayılar olmak üzere t ≥ 1 için $\sqrt{\frac{D}{C}} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_t}\right]$ olarak verilsin O zaman bu eşitliği sağlayacak şekildeki en küçük pozitif t tamsayısına sürekli kesrin periyot uzunluğu denir [14].

1.2.1 Pell Denklemleri

Leonard Euler 10 Ağustos 1732 tarihinde *Christian Goldbach'* a yazdığı mektupta, x, y, D tamsayılar ve D bir tamsayının karesi olmamak üzere;

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{1.2.1}$$

denkleminden *Pell* denklemi olarak söz etti. Ancak matematikçilerin çoğu bu isimlendirmenin yapılan bir hatadan kaynaklandığını düşünür.

(1.2.1) denklemi D parametresine bağlı olduğundan bu denklem bir parametreye bağlı bir denklem ailesidir. Yine (1.2.1) denkleminde x ve y nin her ikisinin de negatif olmadığının kabul edilmesi genelliği bozmaz. Herhangi bir D parametresi için (1.2.1) denkleminin $x = \pm 1$, $y = 0$ ın bir çözüm olduğu kolayca görülür ki bu çözüme aşikâr çözüm denir. Ayrıca eğer D, a gibi bir tamsayının karesi (yani $D = a^2$) ise o zaman,

$$1 = x^2 - Dy^2 = x^2 - a^2y^2 = (x - ay)(x + ay)$$

olması ancak ve ancak, $x - ay = \mp 1$, $x + ay = \pm 1$ olması ile mümkündür. Bu ise $x = \pm 1$, $y = 0$ olması demektir. Yani $D = a^2$ olması durumunda aşikâr çözüm tek çözüm olur. O halde bundan sonra (1.2.1) denkleminde D yi pozitif ve bir tamsayının karesine eşit olmayan bir tamsayı olarak kabul edeceğiz. Şüphesiz *Pell* denkleminin $(1, 0)$ dan farklı bir çözümünün bulunması konunun en zor kısmını teşkil eder.

$x^2 - Dy^2 = -1$ denklemine ise $x^2 - Dy^2 = 1$ *Pell* denkleminin ilgilisi veya negatif *Pell* denklemi denir.

Bütün çağlarda (1.2.1) denklemi ile bir çok matematikçi ilgilenmiştir. *Boudhayana*(M.Ö.4.yy. Hindistan) $\sqrt{2}$ nin 17/12 ve 577/408 gibi iki rasyonel yaklaşımını buldu. Bu oranlar $D = 2$ için *Pell* denkleminin çözümlerine karşılık gelir.

Archimedes(M.Ö.3.yy.) $\sqrt{3}$ ün 1351/780 rasyonel sayısına yaklaştığını gösterdi ki bu oranda $D = 3$ için *Pell* denkleminin bir çözümüdür.

(1.2.1) biçiminde ifade edilen *Pell* denkleminin çözümünün varlığını göstermenin en iyi bilinen yolu sürekli kesirler ile $\sqrt{D}$ nin yaklaşımını bulmaktır.

Teorem 1.2.1.1 D tam kare olmayan pozitif bir tamsayı ve t de $\sqrt{D}$ nin sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu olarak verilsin. Ayrıca p_n ve q_n de Teorem 1.2.8 deki gibi tanımlansın. O zaman $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminin sonsuz sayıda ki bütün çözümleri aşağıdaki gibi verilir.

1.Eğer t çift ise $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ için $x_n = p_{nt-1}$, $y_n = q_{nt-1}$ olur.

2.Eğer t tek ise $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ için $x_n = p_{2nt-1}$, $y_n = q_{2nt-1}$ olur [14].

2. PYTHAGOREAN ÜÇGENLERİ

Bu bölümde *Pythagorean* denkleminin çözümleri ile bu denklemlerin çözümlerine karşılık gelen *Pythagorean* üçgenleri incelenecektir. Ayrıca bu üçgenlerin kenarları olan x, y, z tamsayılarının özellikleri ayrıntılı olarak verilecektir.

Fermat' ın son teoremi olarak bilinen "$n \geq 3$ ve n tamsayı olmak üzere $x^n+y^n = z^n$ denklemini sağlayan hiçbir (x, y, z) tamsayı üçlüsü yoktur" biçimindeki ifadenin $n=2$ için özel hali olan

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2.1}$$

ifadesine *Pythagorean* denklemi adı verilir. *Pythagorean* üçgeni üzerindeki çalışmalar (2.1) denkleminin tamsayı çözümlerinin bulunmasına eşdeğerdir. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan x ve y kenarlı, z hipotenüslü dik üçgene *Pythagorean* üçgeni denir. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan x, y ve z doğal sayılarının oluşturduğu (x, y, z) üçlüsüne *Pythagorean* üçlüsü denir.

Eğer bu üçgenin x, y dik kenarları $x > y > 0$, $x+y \equiv 1 (mod2)$ ve x ile y aralarında asal olma şartlarını sağlıyorsa o zaman üçgene primitif *Pythagorean* üçgeni, (x, y, z) üçlüsüne de primitif *Pythagorean* üçlüsü denir.

Pythagorean üçgeninin bütün kenarları bir doğal sayı ile çarpılırsa, o zaman yine kenarları doğal sayılar olan benzer bir dik üçgen elde edilir ki bu üçgende *Pythagorean* üçgenidir. Bundan dolayı $k = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere verilen bir (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninden sonsuz çoklukta daha büyük benzer (kx, ky, kz) *Pythagorean* üçgenleri elde edilir. Yani her bir *Pythagorean* üçgeninden sonsuz çoklukta benzer *Pythagorean* üçgeni elde edilebilir.

Teorem 2.1 Tüm benzer *Pythagorean* üçgenleri arasında bir en küçüğü vardır ki bu en küçük (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninin x , y, z kenarları aralarında asaldır.

İspat. Eğer x ile y aralarında asal değil ise, o zaman $(x, y) = d > 1$ olacak şekilde pozitif bir d doğal sayısı vardır. Bu durumda, en büyük ortak bölen tanımından x_1 ve y_1 doğal sayılar olmak üzere $x = dx_1$ ve $y = dy_1$ olarak yazılabilir. Buradan

$$z^2 = x^2+y^2 = (dx_1)^2+(dy_1)^2 = d^2(x_1{}^2+y_1{}^2)$$

olur. Böylece d^2, z^2 yi böler ise d, z nin bir bölenidir. Yani $z = dz_1$ olacak şekilde z_1 doğal sayısı vardır. O halde $x = dx_1$, $y = dy_1$ ve $z = dz_1$ ise (2.1) denkleminden

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$$

dir. Böylece *(x_1, y_1, z_1) Pythagorean* üçgeni, *(x, y, z) Pythagorean* üçgeninden daha küçüktür ve *(x, y, z)* üçgenine benzerdir. Dolayısıyla benzer üçgenlerin en küçüğünün kenarları aralarında asal olmalıdır. *(x, y, z) Pythagorean* üçgeninin x ve y kenarları aralarında asal iken daha küçük olmayan benzer *Pythagorean* üçgenleri vardır.Eğer *(a, b, c)* bir benzer Pythagorean üçgeni ise; üçgenlerin benzerliğinden $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$ olur. Ancak x ile y aralarında asal olduğundan $\dfrac{x}{y}$ kesri indirgenemez. Buradan da kabulümüzün aksine $a \geq x$ ve $b \geq y$ elde edilir. Böylece *(a, b, c) Pythagorean* üçgeni *(x, y, z) Pythagorean* üçgeninden daha küçük olur ki bu mümkün değildir. Yani *(x, y, z)* Pythagorean üçgeni en küçüktür.

(x, y, z) Pythagorean üçlüsü, kenarları x, y, z olan bir *Pythagorean* üçgeni olduğundan *(x, y, z)* ye *Pythagorean* üçgeni de denir. Eğer *(x, y, z) Pythagorean* üçgeninde x ile y aralarında asal ise *(x, y, z)* ye primitif *Pythagorean* üçgeni denir. Bu tespitlerden dolayı tüm *Pythagorean* üçgenlerini bulmak yerine, sadece primitif *Pythagorean* üçgenlerini bulmak yeterlidir. Çünkü diğer *Pythagorean* üçgenleri, primitif *Pythagorean* üçgenlerinin *2, 3, 4, . . .* tam katlarının alınmasıyla elde edilir. Tüm benzer *Pythagorean* üçgenlerinin en küçüğü primitifdir. Fakat iki primitif *Pythagorean* üçgeni asla benzer olamaz.

Şimdi de bir primitif *Pythagorean* üçgeninin kenarlarının hangi özellikleri sağlaması gerektiği araştırılacaktır.

Bir primitif (x, y, z) *Pythagorean* üçgeni verilsin. O zaman x ile y aralarında asal olacağından x ile y nin ikisi de çift olamaz. Acaba x ile y nin ikisi de tek olabilir mi? Bu durumu inceleyelim.

Her hangi k tamsayısı için bir tek sayıyı, $2k+1$ biçiminde gösterirsek, $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4k(k+1)+1$ olur. Burada k ile $k+1$ ardışık olduğundan biri tek iken diğeri çift olur. Dolayısıyla k ile $k+1$ den birisi 2 ile bölünür ki bu ise $4k(k+1)$ in 8 ile bölünmesi demektir. O zaman $(2k+1)^2$, 8 ile bölündüğünde 1 kalanını verir. Bu durumda iki tek sayının karelerinin toplamı 8 ile bölündüğünde 2 kalanını vereceğinden bu toplam çifttir ama 4 ile bölünemez. Ancak bir çift sayının karesi 4 ile bölünebilirdir. O halde iki tek sayının kareleri toplamı, bir çift doğal sayının karesine eşit olamaz. Yani (2.1) denklemi, x ile y nin her ikisi de tek iken sağlanmaz. Bu durumda (x, y, z) *Pythagorean* üçgeni primitif ise, x ve y nin biri tek iken, diğeri çift olmalıdır.

Şimdi y nin çift olduğunu varsayalım. O zaman x ve z tekdir. (2.1) denklemini

$$y^2 = (z+x)(z-x) \tag{2.2}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $z + x$ ve $z - x$ sayıları iki farklı tek sayının toplamı ve farkı olacağından dolayı $z - x$ ve $z + x$ sayılarının her ikisi de çifttir. Bu durumda a ve b doğal sayılar olmak üzere, $z + x$ ve $z - x$ ifadeleri

$$z + x = 2a\,,\; z - x = 2b \tag{2.3}$$

biçiminde temsil edilebilirler. O halde

$$z = a + b\,,\; x = a - b \tag{2.4}$$

olur. Bu eşitliklerde a ve b nin aralarında asal olması gerekir. Eğer a ile b nin ortak böleni olan d, birden büyük ise o zaman d, z ile x in dolayısıyla $z + x$ ile $z - x$ in de ortak bölenidir. Öte yandan (2.2) den d^2, y^2 nin de bir bölenidir. Buradan $d \mid y$ olacağından d, x ve y nin de bir ortak böleni olur. Bu durum x ve y nin aralarında asal olmasıyla çeliştiğinden a ve b aralarında asal olmalıdır. Yani $d = 1$ dir.

Eğer y çift ise o zaman c bir doğal sayı olmak üzere, $y = 2c$ olarak yazılır. Buradan ve (2.2) den $4c^2 = 4ab$ olacağından

$$c^2 = ab \tag{2.5}$$

bulunur. Aralarında asal iki sayının çarpımı bir doğal sayının karesine eşitse o zaman onların her biri bir doğal sayının karesine eşit olacağından, (2.5) ifadesinde $a = m^2$ ve $b = n^2$ alabiliriz. Burada m ile n aralarında asal doğal sayılardır. Böylece a ve b aralarında asal olduğundan ve (2.4) ifadesinden $z = m^2 + n^2$, $x = m^2 - n^2$ bulunur. (2.5) ifadesinde $a = m^2$, $b = n^2$ alırsak, $c = mn$ olur. Öte yandan $y = 2c$ olduğundan $y = 2mn$ dir. Böylece m ile n sayıları aralarında asal ve y çift olmak üzere (x, y, z) primitif *Pythagorean* üçgeninin

$$x = m^2 - n^2\,,\; y = 2mn\,,\; z = m^2 + n^2 \tag{2.6}$$

biçiminde verilebileceğini göstermiş olduk. Burada m ve n aralarında asal olduğundan, her ikisi de çift olamaz. Eğer her ikisi tek ise o zaman $x = m^2 - n^2$ çift olacağından bu da imkânsızdır. Yani m ile n nin her ikisi tek de olamaz. Bundan dolayı m ve n nin biri tek iken diğeri çift olmalıdır. Yukarıda $y = 2mn$ olduğundan y, 4 ile bölünür. Buradan her primitif *Pythagorean* üçgeninin ve dolayısıyla her *Pythagorean* üçgeninin kenarlarından en az birinin 4 ile bölünebileceği sonucu çıkar. Bu tespitten dolayı kenarlarının hepsi asal olan hiçbir *Pythagorean* üçgeni yoktur. Ancak hipotenüsü ve bir kenarı asal olan *Pythagorean* üçgenleri vardır.

Örneğin ; (3, 4, 5), (19, 180, 181), (79, 3120, 3121) dir. Asal sayıların sayısı sonsuz olduğundan dolayı bu tip üçgenlerin sonsuz çoklukta olacağı açıktır.

Şimdi de m ile n nin biri tek iken diğeri çift , aralarında asal ve $m > n$ olmak üzere ve (2.6) ile verilen x, y ve z sayılarından oluşan (x, y, z) üçgeninin primitif *Pythagorean* üçgeni olduğunu gösterelim.

$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$ olduğundan (x, y, z) üçgeninin *Pythagorean* üçgeni olacağı açıktır. Primitif olduğunu göstermek için x ve y nin aralarında asal olduğunu göstermeliyiz. Bunun için d bir den büyük bir tamsayı olmak üzere $(x, y) = d$ olsun. x tek olduğundan d tek olabilir. (2.1) den d, z nin bir bölenidir. O halde (2.6) dan dolayı d, $m^2 + n^2$ ve $m^2 - n^2$ nin de bir böleni olur. Aynı zamanda d, $2m^2$ toplamı ve $2n^2$ farkının da bir böleni olur. Ancak d tek sayı olduğundan d, m^2 ve n^2 nin ortak böleni olmalıdır. Burada m ile n aralarında asal olduğundan m^2 ve n^2 de aralarında asal olur. O zaman bunların ortak böleni olan d, 1 den büyük olamaz. Yani x ve y aralarında asaldır.

Şimdi farklı (x, y, z) *Pythagorean* üçgenleri ile ilişkili olarak m ve n nin durumunu inceleyelim. (2.6) dan $2m^2 = z + x$, $2n^2 = z - x$ olur ki burada m ve n doğal sayıları tamamen x ve z sayıları tarafından belirlenerek $\frac{m}{n}$ nin $\frac{x+z}{y}$ e eş, indirgenemez bir kesir olduğu sonucuna varılır. Böylece aşağıdaki teoreme ulaşırız.

Teorem 2.2 m ile n aralarında asal, $m > n$ ve m ile n tamsayıları biri tek iken diğeri çift olmak üzere, y si çift olan tüm primitif (x, y, z) *Pythagorean* üçgenleri $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ formüllerinden elde edilir ki y si çift olan bir (x, y, z) primitif Pythagorean üçgeni yalnız bu yolla bulunur.

Şimdide $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini

$$x^2 = (z + y)(z - y) \tag{2.7}$$

biçiminde yazalım. Her zaman y çift olduğundan dolayı x ve z tek olacaktır. O zaman $z + y = u$, $z - y = v$ dersek, u ile v tek ve aralarında asal olur. Gerçekten x ile y

aralarında asal, dolayısıyla y ile z de aralarında asal ve z tek olduğundan (2.7) den $x^2 = uv$, $u = z + y$, $v = z - y$ olup u ile v nin her ikisinin de tek olduğu görülür. O zaman $u = k^2$, $v = l^2$ olacak şekilde aralarında asal k ve l tek doğal sayıları vardır. Böylece

$$x = kl,\ z = \frac{1}{2}(u + v) = \frac{1}{2}(k^2 + l^2),\ y = \frac{1}{2}(u - v) = \frac{1}{2}(k^2 - l^2)$$

elde edilir ve Teorem 2.2 nin ispat mantığından şu teorem ispatlamış olur.

Teorem 2.3 k ile l aralarında asal ve tek doğal sayılar olmak üzere, y si çift olan tüm (x, y, z) primitif *Pythagorean* üçgenleri

$$x = kl,\quad y = \frac{k^2 - l^2}{2},\quad z = \frac{k^2 + l^2}{2},\quad k > l \text{ için} \tag{2.8}$$

formülleri ile verilir ve y bileşeni çift olan her bir primitif *Pythagorean* üçgeni sadece bu yolla elde edilir.

Her bir (x, y, z) primitif *Pythagorean* üçgeninden sonsuz sayıda primitif *Pythagorean* üçgeni üretilebilir [5]. Aksine $(x, y) = t$ için (x, y, z) bir *Pythagorean* üçgeni ise o zaman $(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t})$ de bir primitif *Pythagorean* üçgenidir.

Her hangi bir *Pythagorean* üçgeninin kenarlarının (2.6) ile verilen elde ediliş formüllerinden ve önceki tespitlerimizden bir *Pythagorean* üçgeninin en az bir kenarının 4 ile bölünebileceğini biliyoruz. Şimdi de kenarlarından en az birinin 3 ile bölünebileceğini ispatlayalım.

İspatımıza (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninin kenarlarından x ile y nin 3 ile bölünemediğini farz ederek başlayalım. (2.8) formüllerini göz önüne alırsak; k ve l tamsayılar olmak üzere, x ile y yi $x = 3k \pm 1$, $y = 3l \pm 1$ biçiminde alalım. Buradan

$$x^2 + y^2 = 3(3k^2 + 3l^2 \pm 2k \pm 2l) + 2$$

olur ki bu bir doğal sayının karesi olamaz. Çünkü 3 ile bölünebilen bir sayının karesi de 3 ile bölünebileceğinden 3 ile bölünemeyen $3t \pm 1$ biçiminde ki bir doğal sayının karesi de $(3t \pm 1)^2 = 3(3t^2 \pm 2t) + 1$ eşitliği sebebiyle 3 ile bölündüğünde 1 kalanını verir. Böylece $x^2 + y^2 = z^2$ ifadesinden asla 2 kalanı elde edilmez. Bu ise x ve y nin her ikisinin de 3 ile bölünememesi kabulüyle çelişir. Yani x ve y sayılarından en az biri 3 ile bölünebilirdir.

Pythagorean üçgenlerini göz önüne alırsak kenarlarından biri 3 ile bölünebilen *Pythagorean* üçgenlerinin aynı zamanda bir kenarı da 4 ile bölünebilirdir. Örneğin; (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) ve (7, 24, 25) primitif *Pythagorean* üçgenlerinin kenarları 3 ve 4 ile bölünür.

Şimdi de her bir *Pythagorean* üçgeninin kenarlarından en az birinin 5 ile bölünebildiğini gösterelim.

İlk olarak bir n doğal sayısının 5 ile bölünemediğini farz edelim. O zaman n, $n = 5k \pm 1$ veya $n = 5k \pm 2$ şeklinde olacaktır. Eğer $n = 5k \pm 1$ ise $n^2 = 5(5k^2 \pm 2k)+1$, $n = 5k \pm 2$ ise o zaman $n^2 = 5(5k^2 \pm 4k)+4$ dir. 5 ile bölünemeyen bir doğal sayının karesi 5 ile bölündüğünde 1 veya 4 kalanını verir. Eğer (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninde x ve y kenarları 5 ile bölünemez ise o zaman x^2 ve y^2 sayıları 5 ile bölündüğünde 1 yada 4 kalanını verir. Bu yüzden x^2+y^2, 5 ile bölündüğünde 2 yada 3 veya 0 kalanını verir. Eğer x^2+y^2 nin değeri 5 ile bölündüğünde 2 veya 3 kalanını veriyor ise o zaman bu toplam bir sayının karesine eşit olamaz. Çünkü hiçbir sayının karesi 5 ile bölündüğünde 2 veya 3 kalanını vermez. Eğer x^2+y^2 nin değeri 5 ile bölündüğünde 0 kalanını veriyor ise o zaman z^2 5 ile bölünebilirdir. Buradan z de 5 ile bölünebilirdir. Eğer *Pythagorean* üçgeninin x ile y kollarından hiçbiri 5 ile bölünemiyorsa o zaman hipotenüsü 5 ile bölünmelidir.

Bir primitif *Pythagorean* üçgeninin sadece kenarlarından biri 5 ile bölünebilirdir. (5, 12, 13), (21, 20, 29) ve (3, 4, 5) üçgenlerinin 5 ile bölünebilen kenarı, hipotenüsü veya kollarından birisi olur ki bu kollar çift veya tek olabilir.

(3,4,5) üçgeninin kenarları ardışık doğal sayılardır. Bu özelliği sağlayan sadece bir tek primitif *Pythagorean* üçgeni vardır. $n>1$ doğal sayı iken *Pythagorean* üçgeni $n-1$, n ve $n+1$ kenarlarına sahipse $(n-1)^2+n^2 = (n+1)^2$ olmalıdır, buradan $n^2=4n$ ise $n = 4$ olur ve böylece (3, 4, 5) üçgeni elde edilir.

Öte yandan kenarları aritmetik olarak artan tüm *Pythagorean* üçgenlerini bulmak kolaydır. $n > k$ ve k ile n doğal sayıları için, bir *Pythagorean* üçgeninin kenarlarını $n-k$, n, $n+k$ ile temsil edelim. Buradan $(n-k)^2+n^2 = (n+k)^2$ dir. Buda $n^2 = 4nk$ olması demektir. Yani $n = 4k$ olur. Bu yüzden $k = 1, 2, 3, \ldots$ değerleri için $(3k, 4k, 5k)$ üçgenini elde ederiz. Tüm bu üçgenler (3, 4, 5) *Pythagorean* üçgenine benzerdir.

Şimdi de iki kenarı ardışık doğal sayılar olan *Pythagorean* üçgenlerini inceleyelim. İki ardışık doğal sayı her zaman aralarında asal olduğundan böyle bir üçgen primitif olmalıdır.

$z - x = 1$ olması imkânsızdır, çünkü z ve x tek sayılardır. $z - y = 1$ olduğunu varsayalım. Teorem 2.3 den $l^2=1$ olur .$k>1$ bir tek sayı iken

$$x = k, \quad y = \frac{k^2-1}{2}, \quad z = \frac{k^2+1}{2} \tag{2.9}$$

olduğundan $l = 1$ dir.

(2.9) formülü $z - y = 1$ olan tüm *Pythagorean* üçgenlerini verir. Bu şekilde olan ilk on *Pythagorean* üçgeni; (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), (15, 112, 113), (17, 144, 145), (19, 180, 181), (21, 220, 221) dir.

Böyle üçgenler *Moessner* ' *in*

$$(10n-5)^2+[50n(n-1)+12]^2=[50n(n-1)+13]^2$$

eşitliğinden de elde edilebilir. Bu eşitlikte $n = 1, 2, \ldots, 10$ için; (5, 12, 13), (15, 112, 113), (25, 312, 313), (35, 612, 613), (45, 1012, 1013), (55, 1512, 1513), (65, 2112, 2113), (75, 2812, 2813), (85, 3612, 3613), (95, 4512, 4513) üçgenleri elde ederiz.

Hipotenüsü ile bir kenarı ardışık olan yani $z = y+1$ olan *Pythagorean* üçgenlerini elde etmenin diğer bir metodu da, n bir doğal sayı olmak üzere $k>1$ tek sayı iken (2.9) formüllerinde $k=2n+1$ koymaktır. Bu durumda x ,y, z

$$x = 2n+1, \quad y = 2n(n+1), \quad z = 2n(n+1)+1 \tag{2.10}$$

olarak elde edilir. Gerçekten burada n yerine değerler verirsek; (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), (15, 112, 113), (17, 144, 145), (19, 180, 181), (21, 220, 221), . . . olur [15].

2.1 Eşit Alanlı Pythagorean Üçgenleri

Kenarları farklı olan (21, 20, 29) ve (35, 12, 37) primitif *Pythagorean* üçgenlerinin alanları eşit ve değeri 210 dur. Bunlardan daha küçük farklı hipotenüslü ve aynı alanlı farklı primitif *Pythagorean* üçgenleri yoktur.

Gerçekten eğer hipotenüsü 37 den küçük olan *Pythagorean* üçgenlerini incelemek istersek o zaman (3, 4, 5), (5, 12, 13), (15, 8, 17) primitif *Pythagorean* üçgenlerinin katları olan aşağıdaki üçgenleri göz önüne almamız gereklidir.

x	Y	z	Alan	x	y	z	Alan
3	4	5	6	18	24	30	216
6	8	10	24	21	28	35	294
9	12	15	54	5	12	13	30
12	16	20	96	10	24	26	120
15	20	25	150	15	8	17	60

Bu üçgenleri göz önüne alırsak; hipotenüsü 37 den ve alanı 210 dan küçük olup ta alanları eşit olan farklı *Pythagorean* üçgenleri yoktur. Bundan dolayı; farklı hipotenüslü ve eşit alanlı primitif *Pythagorean* üçgenlerinin en küçük çifti (21, 20, 29) ve (35, 12, 37) üçgen çiftleridir.

Öte yandan eşit alanlı ve aynı hipotenüslü dik üçgenler kongrüent olmalıdır. Gerçekten eğer (a_1, b_1, c_1) ve (a_2, b_2, c_2) böyle üçgenler ve $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2$ ise hipotezden $a_1 b_1 = a_2 b_2$ ve $c_1 = c_2$ olur. Burada $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ dir ve böylece

$$(a_1 - b_1)^2 = (a_2 - b_2)^2 \text{ ve } (a_1 + b_1)^2 = (a_2 + b_2)^2$$

elde edilir. Buradan

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \quad \text{ve } a_1 + b_1 = a_2 + b_2$$

dir. Bu ise $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ olması demektir.

(15, 112, 113) primitif *Pythagorean* üçgeninin alanı 840 olup, 840 = 4.210 olduğundan bu, (21, 20, 29) ve (35, 12, 37) üçgenlerinin alanlarının dört katıdır. Böylece (15, 112, 113) üçgeninin alanı sırası ile (21, 20, 29), (35, 12, 37) üçgenlerinin 2 ile çarpılmasıyla elde edilen (42, 40, 58) ve (70, 24, 74) üçgenlerinin her birinin alanına eşit olduğundan farklı hipotenüslü ve eşit alanlı (15, 112, 113), (42, 40, 58), (70, 24, 74) *Pythagorean* üçgenleri elde edilir. Bu üçgenlerden sadece birisi primitiftir. Ancak aynı alana sahip üç farklı primitif *Pythagorean* üçgeni (4485, 5852, 7373), (19019, 1380, 19069) ve (3059, 8580, 9109) dur ki bunların alanı 13123110 olup, bu alan en küçüktür.

Şimdi farklı hipotenüslü ve aynı alanlı keyfi çoklukta *Pythagorean* üçgeni elde edilip edilemeyeceğini araştıracağız. Bu sorunun cevabı *Fermat' ın* aşağıdaki teoremi ile verilir.

Teorem 2.1.1 Her bir n doğal sayısı için farklı hipotenüslü ve aynı alanlı n tane *Pythagorean* üçgeni vardır.

Lemma 2.1.1 Verilen bir n doğal sayısı için farklı hipotenüslü ve aynı alanlı n *Pythagorean* üçgeni var ve onların birinin hipotenüsü tek sayı ise, o zaman onlardan birinin hipotenüsü tek olacak şekilde, aynı alanlı ve farklı hipotenüslü, $n+1$ tane *Pythagorean* üçgeni elde edilir.

İspat. n bir doğal sayı, $k=1, 2, \ldots, n$ ve $a_k < b_k < c_k$ olmak üzere n *Pythagorean* üçgeni (a_k, b_k, c_k) olsun. Bu *Pythagorean* üçgenlerinin hipotenüsleri farklı, alanları eşit ve c_1 tek sayı olsun. Ayrıca $k=1, 2, \ldots, n$ için

$$a'_k = 2(b_1^2 - a_1^2)c_1 a_k,\ b'_k = 2(b_1^2 - a_1^2)c_1 b_k,\ c'_k = 2(b_1^2 - a_1^2)c_1 c_k \qquad (2.11)$$

ve

$$a'_{n+1} = (b_1^2 - a_1^2)^2,\ b'_{n+1} = 4a_1 b_1 c_1{}^2,\ c'_{n+1} = 4a_1^2 b_1^2 + c_1{}^4 \qquad (2.12)$$

olarak alalım. Dikkat edilirse

$k = 1, 2, \ldots, n$ için (a'_k, b'_k, c'_k) üçgenleri *Pythagorean* üçgenleridir. Çünkü onların kenarları doğal sayılardır ve bu üçgenler (a_k, b_k, c_k) *Pythagorean* üçgenlerine benzerdir. $(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$ üçgeni (2.12) formülünden dolayı bir *Pythagorean* üçgenidir. Çünkü $c^2 = a^2+b^2$ olmak üzere

$$(b^2 - a^2)^4 + 16a^2b^2(a^2 + b^2)^2 = [4a^2b^2 + (a^2 + b^2)^2]$$

eşitliği gerçeklendiğinden dolayı (a_1, b_1, c_1) *Pythagorean* üçgeni olur. Dolayısıyla $a_1{}^2 + b_1{}^2 = c_1{}^2$ dir. Şimdi $k = 1, 2, \ldots, n+1$ için (a_k, b_k, c_k) üçgenlerinin şartlarımızı sağladığını göstermeliyiz. Bunun için $k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere (a_k, b_k, c_k) üçgenlerinin her birinin alanını Δ ile gösterelim. Böylece $a_k b_k = 2\Delta$ olur ve (2.11) den $k = 1, 2, \ldots, n$ iken (a'_k, b'_k, c'_k) üçgeninin alanı

$$\frac{1}{2} a'_k b'_k = 2(b_1^2 - a_1^2)^2 c_1{}^2 a_k b_k = 4(b_1^2 - a_1^2)^2 c_1{}^2 \Delta$$

olur. Öte yandan (2.12) ifadesiyle verilen $(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$ *Pythagorean* üçgeninin alanı, $k = 1,2,\ldots, n+1$ için

$$\frac{1}{2}\, a'_{n+1}\, b'_{n+1} = 2(b_1^2 - a_1^2)^2\, a_1 b_1 c_1{}^2 = 4(b_1^2 - a_1^2)^2\, c_1{}^2 \Delta$$

olarak bulunur. Böylece (a'_k, b'_k, c'_k) üçgenlerinin aynı alanlara sahip olduğu görülür.

$k=1, 2, \ldots, n$ iken (a'_k, b'_k, c'_k) *Pythagorean* üçgenlerinin hipotenüsleri farklıdır. Gerçekten verilen $k = 1, 2, \ldots, n$ sayıları için birbirinden farklı (a_k, b_k, c_k) üçgenlerinin hipotenüsleri olan c_k lar (2.11) den hepsi çift olduğundan dolayı (a'_k, b'_k, c'_k) üçgenlerinin hipotenüsleri farklıdır. Bununla beraber (2.12) den ve hipotezde c_1 tek olarak verildiğinden c'_{n+1} tektir. Böylece $k = 1, 2, \ldots, n+1$ için bütün c'_k sayıları birbirinden farklı olur ki ispat biter.

Lemmamızı; $n = 1$ için en basit durumunu göz önüne alarak $a_1 = 3$, $b_1 = 4$ ve $c_1 = 5$ olmak üzere bilinen (3, 4, 5) *Pythagorean* üçgenine uygulayalım. (2.11) formülünden aynı alanlı (a'_1, b'_1, c'_1) ve (a'_2, b'_2, c'_2) *Pythagorean* üçgenlerini elde ederiz.

$$2(b_1^2 - a_1^2)c_1 = 2.7.5 = 70$$

olduğundan

$a'_1 = 70.3 = 210$, $b'_1 = 70.4 = 280$, $c'_1 = 70.5 = 350$ buluruz. Formül (2.12) nin kullanılmasıyla

$$a'_2 = (4^2 - 3^2)^2 = 49,\quad b'_2 = 4.3.4.5^2 = 1200,\quad c'_2 = 4.3^2.4^2 + 5^4 = 1201$$

bulunur. Buradan farklı hipotenüslü ve alanları 29400 e eşit olan (210, 280, 350) ve (49, 1200, 1201) *Pythagorean* üçgenleri elde edilir ki bunlardan (49, 1200, 1201) *Pythagorean* üçgeni primitiftir.

Lemmamızı bu üçgenlere uygularsak farklı hipotenüslü ve eşit alanlı üç *Pythagorean* üçgeni buluruz. Bu üçgenlerinde kenarlarının her birinde on basamaklıdan daha büyük sayılar bulunur. Bununla beraber böyle üç üçgeni elde etmenin diğer bir metodunu bulduk. Şöyle ki üç basamaktan daha büyük olmayan sayılardan bu tip üçgenlerin kenarları elde edilir. Benzer şekilde farklı hipotenüslü ve aynı alanlı dört *Pythagorean* üçgeni de bulunur. Bunların kenarları da dört basamaklıdan büyük olmayan sayılardan elde edilir . Yani (518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458), (231, 2960, 2969), (111, 6160, 6161) üçgenlerinin alanları eşit olup 341880 dir. Aynı zamanda kenarları beş basamaklıdan büyük olmayan sayılardan elde edilen böyle beş üçgende bulunur ki bu üçgenler (2805, 52416, 52491), (3168, 46410, 46518), (5236, 28080, 28564), (6006, 24480, 252206), (8580, 17136, 19164) dir. Alanları da 73513440 a eşittir.

Alanı Δ ile verilen *Pythagorean* üçgenlerinin sayısının sonlu olacağı açıktır. Çünkü *Pythagorean* üçgeninin kolları 2Δ nın çarpanı olmalıdır. Bununla beraber lemmamızın ispatından kolayca görülebilir ki örneğin, alanları 6 ya eşit olan rasyonel kenarlı sonsuz çoklukta farklı dik üçgen vardır.

Gerçekten; $n \geq 1$ için lemmamızın ispatından hipotenüslerden birisi tek olan farklı hipotenüslü ve Δ alanlı n *Pythagorean* üçgenine sahipsek, d bir doğal sayı olmak üzere Δd^2 alanlı hipotenüslerden birisi tek olan farklı hipotenüslü $n+1$ tane *Pythagorean* üçgeni vardır.(3, 4, 5) üçgeninden başlayarak lemmamızı n-1 kez uygularsak, m, n ye bağlı bir doğal sayı olmak üzere farklı hipotenüslü ve $6m^2$ alanlı n *Pythagorean* üçgeni elde ederiz. Bu üçgenlerin her birinin kenarlarını m ile kısaltarak rasyonel kenarlı ve alanı 6 olan n farklı dik üçgen elde ederiz. n doğal sayısının keyfiliği sayesinde alanı 6 olan rasyonel kenarlı farklı üçgenlerin sayısı sonlu olmaz. Bundan dolayı böyle üçgenler sonsuz çokluktadır.

2.2 Bir Yada Daha Fazla Kenarı Kare Olan Pythagorean Üçgenleri

Hipotenüsü bir doğal sayının karesi olan sonsuz çoklukta primitif *Pythagorean* üçgeninin varlığını ispatlayabiliriz.

Her $n < m < p$ şartını sağlayan n, m, p pozitif tamsayıları için (n, m, p) herhangi bir primitif *Pythagorean* üçgeni olsun. Bu şekilde ki farklı hipotenüslü üçgenlerin sonsuz çoklukta olduğunu biliyoruz. Burada (n, m, p) primitif *Pythagorean* üçgeni olduğundan m ile n sayılarının biri tek iken, diğerinin çift ve m ile n nin aralarında asal olması gerektiği açıktır. Teorem 2.2 de ki gibi x, y ve z sayıları (2.6) formülleri ile verildiğinde (x, y, z) primitif *Pythagorean* üçgenini elde ederiz. O zaman $z = m^2 + n^2 = p^2$ olur ki böylece hipotenüs bir kareye eşittir.

Örneğin; (3, 4, 5) = (n, m, p) primitif *Pythagorean* üçgenini alırsak hipotenüsü kare olan (x, y, z) = (7, 24, 25) primitif *Pythagorean* üçgenini elde ederiz. Benzer şekilde (n, m, p) = (5, 12, 13) primitif *Pythagorean* üçgeninden (x, y, z) = (119, 120, 169) primitif *Pythagorean* üçgeni elde ederiz ki burada $169 = 13^2$ dir. Aynı düşünceden hareketle hipotenüsü bir doğal sayının küpüne eşit olan primitif *Pythagorean* üçgenleri de bulunabilir. Örneğin; (117, 44, 125) primitif *Pythagorean* üçgeninde $125 = 5^3$ dür. Benzer şekilde her s doğal sayısı için hipotenüsü doğal sayıların s inci kuvveti olan primitif *Pythagorean* üçgeninin olduğunu ispatlayabiliriz ve özel olarak 5 sayının s inci kuvvetidir[5].

Kollarının biri bir doğal sayının karesi olan sonsuz çoklukta primitif *Pythagorean* üçgeninin olduğunu göstermek de kolaydır.

q ile m tek sayı, m ile n aralarında asal ve n çift sayı olmak üzere (q, n, m) primitif *Pythagorean* üçgeni verilsin. Teorem 2.2 deki gibi x, y ve z değerleri (2.6) da verilen formüller ile hesaplanırsa, o zaman $x = m^2 - n^2 = q^2$ olan (x, y, z) *Pythagorean* üçgenini elde ederiz ki burada üçgenin x kenarı q tek sayısının karesidir.

Örneğin; (q, n, m) = (3, 4, 5) primitif *Pythagorean* üçgeninden (x, y, z) = (9, 40, 41) primitif *Pythagorean* üçgenini elde ederiz ki burada $9 = 3^2$ dir. Yine (q, n, m) = (5, 12, 13) primitif *Pythagorean* üçgeninden de (x, y, z) = (25, 312, 313) primitif *Pythagorean* üçgenini elde ederiz ki $25 = 5^2$ dir [5].

Benzer şekilde çift sayı olan kenarı bir sayının karesine eşit olan sonsuz çoklukta primitif *Pythagorean* üçgeninin varlığını göstermek de zor değildir. k bir tek doğal sayı ve $k^4 - 4$ ile $4k^2$ aralarında asal olmak üzere

$$(k^4 - 4)^2 + (4k^2)^2 = (k^4 + 4)^2$$

eşitliğini alalım. $k = 1$ için $(3, 2^2, 5)$, $k = 3$ için $(77, 6^2, 85)$, $k = 5$ için $(621, 10^2, 629)$ üçgenlerini elde ederiz.

Şimdi iki kenarı da bir doğal sayının karesi olan *Pythagorean* üçgenlerinin var olup olmadığını araştıracağız. Bu sorunun cevabı *Fermat' ın* şu teoremiyle verilir.

Teorem 2.2.1 İki kenarı da kare olan hiç bir *Pythagorean* üçgeni yoktur.

İspat. Verilen bir Pythagorean üçgeninin bir kolu ile hipotenüsünün veya iki kolunun da aynı zaman da bir doğal sayının karesi olamayacağını ayrı ayrı gösterelim.

a) İlk olarak kollarının her ikisi de kare olan *Pythagorean* üçgenlerinin varlığını kabul edelim. Bunların arasında hipotenüsü, kolları kare olan diğer keyfi *Pythagorean* üçgenlerinin hipotenüslerinden daha küçük olan (x, y, z) ile temsil edilen en az birinin olacağı açıktır. Bu kabulümüzden dolayı verilen (x, y, z) *Pythagorean* üçgeni için a ile b doğal sayılar olmak üzere $x=a^2$ ve $y=b^2$ olur. a ile b nin aralarında asal olduğunu göstermeliyiz. Eğer a ile b birden büyük bir d doğal sayısı ile bölünebiliyorsa o zaman a_1 , b_1 doğal sayıları için $a = da_1$ ve $b = db_1$ dir. Burada $z^2 = d^4 (a_1^4 + b_1^4)$ olacağından z^2, d^4 ile bölünebilirdir. Böylece z, d^2 ile bölünebilirdir. Yani $z = d^2 z_1$ olacak şekilde bir z_1 doğal sayısı vardır. Eğer $z^2 = d^4 (a_1^4 + b_1^4)$ eşitliği d^4 ile bölünürse $z_1^2 = (a_1^4 + b_1^4)$ bulunur ki bu ise $z_1 < d^2 z_1 = z$ olması demektir. Böylece hipotenüsü (x, y, z) üçgeninin hipotenüsünden daha küçük ve kollarının her ikisi de kare olan bir (a_1^2, b_1^2, z_1) *Pythagorean* üçgeni buluruz. Bu bir çelişkidir. Çünkü (x, y, z) *Pythagorean* üçgeni hipotenüsü en küçük olacak şekilde seçilmişti. O halde a ile b dolayısıyla a^2 ile b^2 aralarında asaldır. Buradan da $(x, y, z) = (a^2, b^2, z)$ üçgeni bir primitif *Pythagorean* üçgeni olur. Teorem 2.2 den dolayı da a^2, b^2 sayılarından biri çift olmalıdır. Öte yandan (2.6) formüllerinde m ile n aralarında asal ve biri tek iken diğeri çift olan doğal sayılar olmak üzere

$$a^2 = m^2 - n^2, \ b^2 = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \tag{2.13}$$

olmalıdır. Burada m çift ve n tek olduğundan $a^2 + n^2 = m^2$ eşitliğinde a ve n nin her ikisi de tek olmalıdır. Ancak (a, m, n) *Pythagorean* üçgeninde a ve n nin birisi çift olması gerektiğinden bu imkânsızdır. Bu yüzden m tek ise bir k doğal sayısı için $n = 2k$ ve m ile n aralarında asal olması gerektiğinden dolayı m ile k da aralarında asaldır. Ayrıca (2.13) deki ikinci eşitlikte $b^2 = 2^2 mk$ olduğundan b çifttir. Bir l doğal sayısı için $b = 2l$ alalım. $l^2 = mk$ ve m ile k aralarında asal olduğundan, m ile k nın her ikisi de bir sayının karesi olmalıdır. Böylece r ile s doğal sayıları için $m = r^2$, $k = s^2$ olur. Buradan $n = 2k = 2s^2$ dir. Öte yandan (2.13) de $a^2 + n^2 = m^2$ ve m ile

n aralarında asal olduğundan, a ile n de aralarında asal olmalıdır. Böylece (a, n, m) bir primitif *Pythagorean* üçgeni olur. Teorem 2.2 den dolayı n çift olarak alınırsa

$$n = 2m_1 n_1,\ m = m_1^2 + n_1^2 \tag{2.14}$$

olacak şekilde birisi çift diğeri tek ve aralarında asal olan m_1, n_1 doğal sayılarının varlığını göstereceğiz. Yukarıda $n = 2s^2$ olduğundan dolayı $s^2 = m_1 n_1$ olur. m_1 ile n_1 aralarında asal olduğundan m_1 ve n_1 in her ikisi de bir sayının karesi olur. Yani $m_1 = a_1^2$, $n_1 = b_1^2$ olacak şekilde a_1 ve b_1 doğal sayıları vardır. Ayrıca $m = r^2$ olduğundan ve (2.14) den dolayı $a_1^4 + b_1^4 = r^2$ bulunur ve böylece $r \le r^2 = m < m^2 + n^2 = z$ elde ederiz. Buradan hipotenüsü, (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninin hipotenüsünden daha küçük olan (a_1^2, b_1^2, r) *Pythagorean* üçgenini buluruz. Bu ise (x, y, z) nin en küçük *Pythagorean* üçgeni seçilişiyle çelişir.

Böylece kollarının her ikisi de kare olan hiçbir *Pythagorean* üçgeninin olmadığı gösterilmiş olur.

b) Şimdi de bir kolu ve hipotenüsü kare olan *Pythagorean* üçgenlerinin var olduğunu kabul edelim. (x, y, z) bir kolu ve hipotenüsü kare olan en küçük hipotenüslü *Pythagorean* üçgeni olsun. Örneğin a ve c doğal sayılar olmak üzere $x = a^2$, $z = c^2$ olarak kabul edelim. Şimdi (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninin primitif olduğunu gösterelim. Bunun için x ile z nin aralarında asal olduğunu göstermemiz yeterlidir.

İlk olarak x ile z nin aralarında asal olmadığını kabul edelim. Yani a ile c aralarında asal olmasın. O zaman $(x, z) = d$ olacak şekilde birden büyük bir d doğal sayısı vardır. Bu taktirde $a = da_1$ ve $c = dc_1$ olacak şekilde a_1, c_1 doğal sayıları mevcut olduğundan $x = a^2 = d^2 a_1^2$ ve $z = c^2 = d^2 c_1^2$ olur. Böylece

$$y^2 = z^2 - x^2 = d^4 (c_1^4 - a_1^4)$$

bulunur ki bunun anlamı d^4 ün , y^2 yi bölmesi demektir. O halde d^2, y yi böler, yani $y = d^2 y_1$ olacak şekilde bir y_1 doğal sayısı vardır. Yukarıda $z = d^2 c_1^2$ ve $d > 1$ olduğundan $c_1^2 < z$ bulunur. $x^2 + y^2 = z^2$ ifadesini d^4 ile bölersek, $a_1^4 + y_1^2 = c_1^4$ olur. Böylece hipotenüsü ve kollarından birisi kare olan (a_1^2, y_1, c_1^2) *Pythagorean* üçgeni elde edilmiş olur. Ancak bu yeni üçgen de hipotenüs z den, a_1^2 de a^2 den küçüktür. Bu ise bir çelişkidir, yani (x, y, z) *Pythagorean* üçgeni primitiftir.

Öte yandan eğer y çift ise Teorem 2.2 den dolayı

$$a^2 = x = m^2 - n^2, \; y = 2mn, \; c^2 = z = m^2 + n^2$$

olacak şekilde aralarında asal olan ve $m > n$ şartını sağlayan m ile n doğal sayıları vardır. Burada $c^2 > m^2$ ve $(ac)^2 = m^4 - n^4$ olduğundan $n^4 + (ac)^2 = m^4$ bulunur.

Ancak (n^2, ac, m^2) *Pythagorean* üçgeninin m^2 hipotenüsü z den küçük, kollarından birisi de kare olur ki bu ise (x, y, z) nin en küçük olma varsayımı ile çelişir. Ayrıca y nin tek olması gerektiğinden $x = a^2$ çift olmalıdır. Eğer a çift ve y tek ise, $a^4 + y^2 = c^4$ olduğundan, c tekdir. Buradan

$$y^2 = c^4 - a^4 = (c^2 - a^2)(c^2 + a^2)$$

olur ki y tek olduğundan $(c^2 - a^2)$ ve $(c^2 + a^2)$ tek sayıları aralarında asaldır ve onların ortak çarpanı, $2c^2$ ile $2a^2$ nin de bir çarpanı olduğundan aynı zamanda $z = c^2$ ve $x = a^2$ sayılarının da bir çarpanı olur ki bunlar aralarında asaldır. Son eşitlikten dolayı $c^2 - a^2 = r^2$ ve $c^2 + a^2 = s^2$ olacak şekilde $s > r$ şartını sağlayan aralarında asal r ve s doğal sayılarını bulabiliriz. Böylece $2c^2 = r^2 + s^2$ olur ki

$(\frac{s+r}{2})^2 + (\frac{s-r}{2})^2 = c^2$ dir. $\frac{s+r}{2}$ ve $\frac{s-r}{2}$ sayıları doğal sayılar ve s ile r tek ve aralarında asal olduğundan toplamları olan s ile farkları olan r de aralarında asaldır. Teorem 2.2 den dolayı

$$\frac{s+r}{2} = m^2 - n^2, \; \frac{s-r}{2} = 2mn, \; c = m^2 + n^2$$

yada

$$\frac{s-r}{2} = m^2 - n^2, \; \frac{s+r}{2} = 2mn, \; c = m^2 + n^2$$

olacak şekilde birisi çift diğeri tek ve aralarında asal olan m ile n doğal sayıları vardır. Her iki durumda da

$$2a^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m^2 - n^2)$$

ve a nın çift olmasından, a_1 bir doğal sayı olmak üzere

$$a_1^2 = mn(m-n)(m+n) \tag{2.15}$$

buluruz. Burada m ile n aralarında asal ve birisi çifttir. Ayrıca $m - n$ ve $m+ n$ nin aralarında asal olduğunu göstermek kolaydır. Çünkü m ile n nin her biri aralarında asal olduğundan $m - n$, $m+n$ sayıları da aralarında asal olur. (2.15) denkleminin sağında dört çarpanın her bir çifti aralarında asaldır. Bundan dolayı onların hepsi bir doğal sayının karesi olmalıdır. Böylece

$$m = k^2, n = l^2, \ m-n = p^2, \ m+n = q^2 \tag{2.16}$$

olacak şekilde k, l, p ve q doğal sayıları vardır. Burada $k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = c < c^2 = z$ olduğundan $k^4 - l^4 = (pq)^2$ olur ki böylece $k^2 < z$ bulunur. Burada (l^2, pq, k^2) *Pythagorean* üçgeninin k^2 hipotenüsü, z den küçük olur ki bu (x, y, z) *Pythagorean* üçgeninin en küçük hipotenüslü seçilişi ile çelişir.

O halde kollarının biri ve hipotenüsü kare olan hiçbir *Pythagorean* üçgeni yoktur.

Böylece her hangi iki kenarı bir doğal sayının karesine eşit olan hiç bir *Pythagorean* üçgeninin olmadığı gösterilmiş olur.

Bu teoremin sonucu olarak özellikle tüm kenarları kare olan hiçbir *Pythagorean* üçgeni bulunamaz. Bu durumun cebirsel ifadesi $x^4 + y^4 = z^4$ denklemini sağlayan üçü de sıfırdan farklı olan x, y, z tamsayıları bulunamaz. Bu ise aşağıda verilen Fermat'ın son teoreminin n = 4 için gerçeklenmesi demektir.

Teorem 2.2.3 n, 2 den büyük bir doğal sayı olmak üzere $x^n + y^n = z^n$ denklemini sağlayan üçü de sıfırdan farklı x, y, z tamsayıları yoktur.

Bu teorem *Wiles* tarafından 1994 yılında ispatlanmıştır [21].

Teorem 2.2.4 Alanı bir doğal sayının karesi olan hiçbir *Pythagorean* üçgeni yoktur.

İspat. Bir (a, b, c) *Pythagorean* üçgeninin alanı bir sayının karesine eşit olsun. Bir dik üçgenin alanı formülünden $ab = 2s$ dir. Eğer s bir doğal sayının karesiyse $s = n^2$ olmalıdır ki burada $ab = 2n^2$ ise $2ab = 4n^2 = (2n)^2$ olur. Ayrıca $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = (a + b)^2 - 2ab$ ve $c^2 = (a - b)^2 + 2ab$ olduğundan

$$c^2 + (2n)^2 = (a+b)^2, \quad c^2 - (2n)^2 = (a-b)^2$$

bulunur ki bu son eşitlikleri sağlayan hiçbir tamsayı bulunamaz. Bu ise bir çelişkidir.O halde alanı bir doğal sayının karesine eşit olan hiçbir *Pythagorean* üçgeni yoktur.

3.PYTHAGOREAN SAYILARI

Bu bölümde ise, tezimizin esas konusunu teşkil eden Pythagorean sayıları tanıtılacak, bu sayıların özellikleri verilecek, bu sayıların diğer sayı sistemleri (*Fibonacci* , *Lucas*) ile ilişkileri incelenecektir.

Tanım 3.1 Bir *Pythagorean* üçgeninin alanına *Pythagorean* sayısı denir. Primitif *Pythagorean* üçgeninin alanına ise primitif *Pythagorean* sayısı denir.

Bir primitif *Pythagorean* üçgeninden sonsuz sayıda primitif *Pythagorean* üçgeni üretilebildiğinden dolayı n bir *Pythagorean* sayısı iken her bir t doğal sayısı için t^2n de bir *Pythagorean* sayısı belirtir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir, yani t^2n bir *Pythagorean* sayısı iken n nin her zaman bir *Pythagorean* sayısı olması gerekmez. Gerçekten 54 ve 3000 *Pythagorean* sayılarını göz önüne alırsak; $54 = 3^2.6$ ve $3000 = 10^2.30$ olduğundan 6 ve 30 sayılarının her ikisi de *Pythagorean* sayılarıdır. Ancak 84 ile 990 *Pythagorean* sayılarına bakacak olursak; $84 = 2^2.21$ ve $990 = 3^2.110$ olduğundan ne 21 nede 110 sayısı bir *Pythagorean* sayısıdır.

Tablo 1. 10 000 den küçük *Pythagorean* sayıları. (Primitif *Pythagorean* sayılarının altları çizilerek belirtilmiştir.)

6	24	30	54	60	84	96	120	150	180	210	216	240	270
294	330	336	384	480	486	504	540	546	600	630	720	726	750
756	840	864	924	960	990	1014	1080	1176	1224	1320	1344	1350	1386
1470	1500	1536	1560	1620	1710	1716	1734	1890	1920	1944	2016	2100	2160
2166	2184	2310	2340	2400	2430	2520	2574	2646	2730	2880	2904	2940	2970
3000	3024	3036	3174	3360	3456	3570	3630	3696	3750	3840	3900	3960	4056
4080	4116	4290	4320	4374	4500	4536	4620	4704	4860	4896	4914	5016	5046
5070	5250	5280	5376	5400	5544	5610	5670	5766	5814	5880	6000	6090	6144
6240	6480	6534	6630	6750	6804	6840	6864	6936	7140	7260	7350	7440	7560
7680	7776	7854	7956	7980	8064	8214	8250	8316	8400	8640	8664	8670	8736
8820	8910	8970	8976	9126	9240	9360	9600	9690	9720				

Eğer i inci bindeki primitif *Pythagorean* sayılarını PP_i ile ve i inci bindeki *Pythagorean* sayılarını da P_i ile gösterirsek; sırasıyla $i = 1, 2, \ldots, 10$ olmak üzere $(PP_i, P_i) = (13, 34), (6, 19), (4, 17), (3, 13), (4, 13), (3, 13), (2, 12), (5, 10), (2, 13)$ ve $(1, 6)$ dır.

Bu ise *Pythagorean* sayılarının dağılımının oldukça düzensiz olduğunu gösterir.

Yukarıdaki tablodan şu tespitler hemen yapılabilir.

i. Her *Pythagorean* sayısı 6 ile bölünebilirdir.

ii. Bir *Pythagorean* sayısının birler basamağında 0, 4 veya 6 sayılarından birisi bulunur.

iii. İlk 150 *Pythagorean* sayısından; birler basamağında 0 olanların sayısı 86, birler basamağında 4 olanların sayısı 31, birler basamağında 6 olanların sayısı 33 dür. Böylece birler basamağında 0 bulunduran *Pythagorean* sayıları, 4 ve 6 bulunduranlardan daha fazla olduğu görülür. Verilen bir sayıya kadar olan bütün *Pythagorean* sayılarını düşündüğümüzde birler basamağında 4 ve 6 bulunduran *Pythagorean* sayıları hemen hemen aynıdır.

Bu tespitler tesadüfi değildir.

Bu şekilde daha bir çok *Pythagorean* sayısı ve primitif *Pythagorean* sayısı tespit edilebilir. Ancak tüm bunlar verilen bir *Pythagorean* sayısından daha sonra gelen yeni bir *Pythagorean* sayısının, verilen bu *Pythagorean* sayısından hareketle nasıl bulunabileceğini belirtmez. Burada verilen bir n doğal sayısının *Pythagorean* yada primitif *Pythagorean* sayısı olması için gerek ve yeter şartları vereceğiz. Ancak yapılacak tüm bu tespitler çok büyük n değerleri için pek kullanışlı değildir.

Teorem 3.1 Verilen bir n doğal sayısının *Pythagorean* sayısı olması için gerek ve yeter şart $ab = cd = n$ ve $a + b = c - d$ olacak şekilde en az dört farklı a, b, c, d pozitif çarpanına sahip olmasıdır.

İspat. n bir *Pythagorean* sayısı olsun. O zaman u ile v aralarında asal, $u > v$ ve $u + v \equiv 1 (mod 2)$ olmak üzere

$$n = m^2uv(u^2 - v^2)$$

olur. Buradan n in

$$a = mv(u + v),\ b = mu(u - v),\ c = mu(u + v) \text{ ve } d = mv(u - v)$$

şeklinde dört farklı çarpanının olduğu ve a, b, c, d nin $ab = cd = n$ ve $a + b = m(u^2 + v^2) = c - d$ şartlarını sağladığı açıktır. O halde gerek şart ispatlanmış olur.

Tersine olarak bir n doğal sayısı, $ab = cd = n$ ve $a + b = c - d$ olacak şekilde a, b, c ve d biçiminde dört farklı pozitif çarpana sahip olsun . Burada $ab = cd = n$ ve $a + b = c - d$ ifadelerinden d yi yok edersek,

$$c^2 - c(a + b) - ab = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin diskırminantı

$\Delta = (a + b)^2 + 4ab > (a + b)^2 > 0$ olduğundan c nin iki reel kökü vardır. Buradan

$$c = \frac{1}{2}\{a + b + \sqrt{(a+b)^2 + 4ab}\}$$

olarak buluruz. c bir tamsayı olarak verildiğinden kök içerisi bir pozitif tamsayının karesi olmalıdır, yani bir t pozitif tamsayısı için

$$(a + b)^2 + 4ab = t^2$$

olur. Burada

$$(a + b)^2 + 4ab = t^2 \text{ ve } 4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

olduğundan

$$2(a + b)^2 = t^2 + (a - b)^2$$

ifadelerini

$$4(a + b)^2 = (t + a - b)^2 + (t - a + b)^2 = [t + (a - b)]^2 + [t - (a - b)]^2$$

biçiminde yeniden yazarsak $t + a - b$ ve $t - a + b$ ifadelerinin her ikisi de çift tamsayı olarak bulunur. Buradan

$$(a + b)^2 = \left(\frac{t+a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{t-a+b}{2}\right)^2$$

olur. Eğer

$$\left(\frac{t+a-b}{2}, \frac{t-a+b}{2}\right) = m$$

ise o zaman m , $a + b$ yi böler. Böylece

$$\left(\frac{a+b}{m}\right)^2 = \left(\frac{t+a-b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{t-a+b}{2m}\right)^2$$

elde edilir ki burada

$$\left(\frac{t+a-b}{2m}, \frac{t-a+b}{2m}, \frac{a+b}{m}\right)$$

üçlüsü bir primitif *Pythagorean* üçlüsüdür. Ayrıca burada $u > v$, u ile v aralarında asal ve $u + v \equiv 1 (mod2)$ olmak üzere eğer

$$\frac{t+a-b}{2m} = 2uv, \quad \frac{t-a+b}{2m} = u^2 - v^2, \quad \frac{a+b}{m} = u^2 + v^2$$

alınırsa

$$a = m(u^2 - uv), \; b = m(v^2 + uv), \; c = m(u^2 + uv), \; d = m(uv - v^2)$$

bulunur. Şayet

$$\frac{t+a-b}{2m} = u^2 - v^2, \quad \frac{t-a+b}{2m} = 2uv \text{ ve } \frac{a+b}{m} = u^2 - v^2$$

olarak alınırsa , o zaman

$$a = m(u^2 - uv), \; b = m(v^2 + uv), \; c = m(u^2 + uv), \; d = m(uv - v^2)$$

olur ve buradan

$$n = ab = m^2uv(u^2 - v^2)$$

elde edilir ki buda n in

$$(2muv, \; m(u^2 - v^2), \; m(u^2 + v^2))$$

Pythagorean üçgeninin alanı olması demektir. Böylece n bir *Pythagorean* sayısı olur. Burada $a + b = c - d = m(u^2 + v^2)$ ifadesi de n alanlı bir *Pythagorean* üçgeninin hipotenüsüdür. Böylece teoremimiz ispatlanmış olur.

Örneğin; 1560 = 65.24 = 104.15 ve 65+24 = 104-15 şartları sağlandığından dolayı 1560 *Pythagorean* sayısıdır.

Tanım 3.2 Eğer pozitif bir n tamsayısı $ab = cd = n$ ve $a + b = c - d$ şartlarını sağlayan dört farklı a, b, c, d çarpanına sahip ise o zaman n sayısına istenmeyen sayı (nasty number) denir [9].

Örnek 3.1. 30 = 15.2 = 10.3, 10+3 = 15 – 2; 24 = 2.12 = 4.6 ve 12-2 = 4+6 olduğundan 24 ve 30 istenmeyen (nasty) sayıdır.

Sonuç 3.1 n in istenmeyen sayı olması için gerek ve yeter şart *Pythagorean* sayısı olmasıdır. Her istenmeyen sayı bir *Pythagorean* sayısı olduğundan dolayı biz bu tip sayılara *Pythagorean* sayısı diyoruz.

Teorem 3.2 Eğer $r, \ s, \ t, \ m$ ortak farkları m olan bir aritmetik diziden alınan pozitif tamsayılar ve $n = rstm$ ise, o zaman n bir *Pythagorean* sayısıdır. Ayrıca s ile m aralarında asal ve $s + m \equiv 1 (mod2)$ ise, n bir primitif *Pythagorean* sayısıdır.

İspat. $r, \ s, \ t$ ve m ortak farkları m olan bir aritmetik diziden alındığından

$$n = rstm = r(r + m)(r + 2m)m$$

olur. Burada

$$a = r(r + m), \ b = (r + 2m)m, \ c = (r + m)(r + 2m), \ d = rm$$

olarak alınırsa,

$$ab = cd = n \text{ ve } a + b = r^2 + 2rm + 2m^2 = c - d$$

olacak şekilde dört farklı a, b, c, d pozitif çarpanları elde edilmiş olur. Böylece Teorem 3.1 den dolayı n bir *Pythagorean* sayısı olur.

Ayrıca s ile m yani $r + m$ ile m aralarında asal ve biri tek iken diğeri çift ise o zaman $s = r + m = u, \ m = v$ alırsak

$$n = uv(u^2 - v^2)$$

buluruz. Burada yine $u > v$, $u + v \equiv 1(mod2)$ ve u ile v aralarında asal olma şartları sağlandığından n bir primitif *Pythagorean* sayısı olur.

Örnek 3.2. $m = 1$ ve $r = 2$ olmak üzere 24=2.(2+1).(2+2) olup buradan 24=1.2.3.4 olur.

Sonuç 3.2 $n, \ (n + 1), \ (n + 2)$ biçiminde ardışık üç tamsayının çarpımı olan $n(n + 1)(n + 2)$ sayısı da bir *Pythagorean* sayısıdır. Eğer n tek sayı ise o zaman $n(n + 1)(n + 2)$ *Pythagorean* sayısı bir primitif *Pythagorean* sayısıdır.

İspat. $n, \ (n + 1), \ (n + 2)$ tamsayıları 1 ortak farklı bir aritmetik diziden alındığından

ve

$$n(n + 1)(n + 2) = n(n + 1)(n + 2).1$$

olduğundan dolayı, ardışık üç tamsayının çarpımı bir *Pythagorean* sayısıdır. *Pythagorean* üçgeni de

$$(2n + 2 \, , \, n^2 + 2n \, , \, n^2 + 2n + 2)$$

olur. Primitif *Pythagorean* sayısı olması için $(n + 1, \ 1) = 1$ ve $n + 1$ ile 1 in farklı çift olması için gerek ve yeter şart n in tek olmasıdır. Dolayısıyla $n(n + 1)(n + 2)$ in primitif *Pythagorean* sayısı olması için gerek ve yeter şart n in tek sayı olmasıdır.

Sonuç 3.3 Bu tip *Pythagorean* sayıları; bir kenarı ile hipotenüsü arasındaki fark 2 olan üçgenlerin alanlarına karşılık gelir.

Örnek 3.3. 3.4.5 = 60 , 8.9.10 = 720, 9.10.11 = 990 olup; 60, 720 ve 990 *Pythagorean* sayılarıdır. Ayrıca 3 ve 9 tek olduğu için 60 ve 990 *Pythagorean* sayıları primitiftir.

Sonuç 3.4 $6\sum_{k=1}^{n} k^2$ sayısı bir primitif *Pythagorean* sayısıdır.

İspat. $6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)$ olur. $n+1$ ve n sayıları aralarında asal ve biri tek iken diğeri çift olduğundan teorem 3.2 den dolayı $1(n+1)(2n+1)n$ bir primitif *Pythagorean* sayısıdır.

Sonuç 3.5 Bu tip *Pythagorean* sayıları da hipotenüsü ile bir kenarı ardışık olan *Pythagorean* üçgenlerinin alanlarına karşılık gelir.

Örnek 3.4. 330 = 5.6.11, 546 = 6.7.13 olup 330 ve 546 *Pythagorean* sayıları Tablo1 den primitiftir.

Sonuç 3.6 F_n n inci *Fibonacci* sayısı olmak üzere $F_{2n}F_{2n+2}F_{2n+4}$ sayısı da bir *Pythagorean* sayısıdır. Bu sayının primitif olması için gerek ve yeter şart F_{2n+2} çift olmasıdır.

İspat. *Fibonacci* sayıları

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1 \text{ ve } n \geq 2 \text{ için } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

biçiminde tanımlandığından

$$F_{2n}\,F_{2n+4} = (F_{2n+2})^2 - 1 = (F_{2n+2}+1)(F_{2n+2} - 1)$$

olduğu bilinir(Teorem 1.2.4). Buradan

$$F_{2n}F_{2n+2}\,F_{2n+4} = (F_{2n+2} - 1)\,F_{2n+2}\,(F_{2n+2}+1)$$

bulunur ki bu ise üç ardışık tamsayının çarpılması demektir. O halde Sonuç 3.2 den $F_{2n}F_{2n+2}F_{2n+4}$ sayısı da bir *Pythagorean* sayısıdır. Bu *Pythagorean* sayısının primitif olması için gerek ve yeter şart $F_{2n+2} - 1$ in tek sayı olması , yani F_{2n+2} nin çift sayı olmasıdır.

Örnek 3.5 Tanım1.2.4 den $F_4 = 3$, $F_6 = 8$, $F_8 = 21$ olup $F_4.F_6.F_8 = 3.8.21 = 504$ ve $F_6 = 8$ çift olduğundan 504 bir primitif *Pythagorean* sayısıdır.

Sonuç 3.7 F_{2n}, F_{2n+1}, F_{2n+2} biçimindeki üç ardışık *Fibonacci* sayısının çarpımı bir *Pythagorean* sayısıdır. Bu sayının primitif olması için gerek ve yeter şart F_{2n+1} in çift olmasıdır.

İspat. $F_{2n}F_{2n+2} = (F_{2n+1})^2 - 1 = (F_{2n+1} - 1)(F_{2n+1} + 1)$

dir.

$$F_{2n}\,F_{2n+1}\,F_{2n+2} = (F_{2n+1} - 1)\,F_{2n+1}\,(F_{2n+1} + 1)$$

Sonuç 2.1 den bir *Pythagorean* sayısıdır ve bu sayının primitif olması için $F_{2n+1} - 1$ tek olmalı, yani F_{2n+1} çift olmalıdır.

Örnek 3. 6 $F_4.F_5.F_6 = 3.5.8 = 120$ ve $F_3.F_4.F_5 = 2.3.5 = 30$ bu sayılar *Pythagorean* sayısıdır.

Sonuç 3.8 F_n, F_{n+1}, F_{n+2} ve F_{n+3} biçiminde ifade edilen dört ardışık *Fibonacci* sayısının çarpımı bir *Pythagorean* sayısıdır. Bu sayının primitif olması için gerek ve yeter şart F_{n+1} ve F_{n+2} nin biri tek iken diğerinin çift olmasıdır.

İspat. $F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3} = (F_{n+2} - F_{n-1})\,F_{n+2}\,(F_{n+2} + F_{n+1})\,F_{n+1}$

olur.

$$F_{n+2} - F_{n-1},\; F_{n+2} \text{ ve } F_{n+2} + F_{n+1}$$

ler F_{n+1} ortak farklı bir aritmetik dizi oluşturduğundan, Teorem 3.2 den dolayı

$$F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}$$

bir *Pythagorean* sayısıdır.

$$(F_{n+1}\,,\, F_{n+2}) = 1$$

olduğundan $F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}$ primitif olması için gerek ve yeter şart F_{n+1} ve F_{n+2} nin biri tek iken diğerinin çift olmasıdır.

Örnek 3.7 $F_4.F_5.F_6.F_7 = 3.5.8.13 = 1560$ ve $F_3.\,F_4.\,F_5.\,F_6 = 2.3.5.8 = 240$ olup 1560 primitif olmasına rağmen 240 primitif değildir. Çünkü F_4 ile F_5 biri tek diğeri çift olmalıdır ancak her ikisi de tektir.

Örnek 3.8 n bir tamsayı olmak üzere bir üçgenin kenarları $a = F_{2n+3}$, $b = F_{n+3}\,F_n$ ve $c = F_3 F_{n+2}\ F_{n+1}$ biçiminde verilsin. Bu üçgenin dik üçgen olup olmadığını araştıralım.

$$b = F_{n+3}\,F_n = (F_{n+2} + F_{n+1})(F_{n+2} - F_{n+1}) = F^2_{n+2} - F^2_{n+1}$$

$$c = 2F_{n+2}\,F_{n+1}$$

$$a = F^2_{n+2} + F^2_{n+1}$$

dir. Burada $F_{n+2} > F_{n+1}$, $(F_{n+2}, F_{n+1}) = 1$ ve $F_{n+2} + F_{n+1} \equiv 1(mod2)$ olduğundan $b^2 + c^2 = a^2$ bulunur. O zaman (a, b, c) üçgeni bir dik üçgen olduğundan *Pythagorean* üçgenidir ve a hipotenüsüdür.

Bir üçgenin alanı A ile gösterilir ise $A = \frac{1}{2}bc = F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}$ olur. Dolayısıyla A dört ardışık *Fibonacci* sayısının çarpımı olduğundan A bir *Pythagorean* sayısıdır.

Sonuç 3.9 Dört ardışık L_n, L_{n+1}, L_{n+2} ve L_{n+3} *Lucas* sayısının çarpımı bir *Pythagorean* sayısıdır. Bu sayının primitif *Pythagorean* sayısı olması için gerek ve yeter şart $L_{n+1} + L_{n+2} \equiv 1(mod2)$ olmasıdır.

İspat. *Lucas* dizisi

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ n \geq 1 \text{ için } L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

biçiminde tanımlanır.

$$L_n . L_{n+1} . L_{n+2} . L_{n+3} = (L_{n+2} - L_{n+1})\,L_{n+2}\,(L_{n+2} + L_{n+1})\,L_{n+1}$$

olarak yazılabildiğinden, $L_n L_{n+1} L_{n+2} L_{n+3}$ sayısı teorem 3.2 ye göre bir *Pythagorean* sayısıdır. L_{n+1}, L_{n+2} aralarında asal olduğundan $L_n L_{n+1} L_{n+2} L_{n+3}$ *Pythagorean* sayısının primitif olması için gerek ve yeter şart $L_{n+1} + L_{n+2} \equiv 1(mod2)$ olmasıdır.

Tüm bu gözlemlerden üç ardışık tamsayının çarpımı şeklinde sonsuz sayıda *Pythagorean* ve primitif *Pythagorean* sayılarının bulunduğunu söyleyebiliriz. $x(x+1)(x+2)(x+3)$ eğer x veya $x+3$ sayılarından biri bir tamsayının karesine eşitse, o zaman dört ardışık tamsayının çarpımı şeklinde olan *Pythagorean* sayılarının sayısını da sonsuz olarak buluruz.

Hemen akla şu soru gelir acaba iki ardışık tamsayının çarpımı şeklinde olan sonsuz sayı da *Pythagorean* ve primitif *Pythagorean* sayıları da var mıdır? Bu sorunun cevabını da aşağıdaki teoremler ile verelim.

Teorem 3.3 İki ardışık tamsayının çarpımı şeklinde olan sonsuz sayıda *Pythagorean* sayısı vardır.

İspat. a, 1 den büyük bir tamsayı olmak üzere n;

$$n = a^2(a^2 - 1)a^2(a^2 + 1), \; a > 1$$

olarak verilsin.

$$(a^2 - 1)a^2(a^2 + 1)$$

ifadesi üç ardışık tamsayının çarpımı olduğundan Sonuç 2.1 den dolayı bu ifade bir *Pythagorean* sayısıdır. Bir sayının karesi ile bir *Pythagorean* sayısının çarpımı daima bir *Pythagoren* sayısıdır. Böylece

$$n = a^2(a^2 - 1)a^2(a^2 + 1)$$

bir *Pythagorean* sayısıdır. Burada $n = a^4(a^4 - 1)$ olduğundan, bu sayı iki ardışık tamsayının çarpımıdır.

Şimdi de a, 1 den büyük bir tek doğal sayı olmak üzere ,

$$n = a^2(\frac{a^2-3}{2})(\frac{a^2-1}{2})(a^2 - 2)$$

olarak verilsin. Burada 1 , $(\frac{a^2-1}{2})$, $a^2 - 2$ sayıları ortak farkı $(\frac{a^2-3}{2})$ olan bir aritmetik dizi, a tek ve $(\frac{a^2-3}{2})(\frac{a^2-1}{2})(a^2 - 2)$ sayısı bir *Pythagorean* sayısı olduğundan dolayı

$$n = a^2(\frac{a^2-3}{2})(\frac{a^2-1}{2})(a^2 - 2)$$

sayısı da bir *Pythagorean* sayısıdır. Bu son ifade

$$n = (\frac{a^4-3a^2}{2})(\frac{a^4-3a^2}{2} + 1)$$

biçiminde yazılabildiğinden dolayı n yine iki ardışık tamsayının çarpımıdır.

Örnek 3.9 30 = 5.6, 240 = 16.15, 210 = 14.15 olup Tablo 1 den 30, 240 ve 210 *Pythagorean* sayısıdır.

Teorem 3.4 İki ardışık tamsayının çarpımı şeklinde olan sonsuz sayıda primitif *Pythagorean* sayısı vardır.

İspat. F_n, n inci *Fibonacci* sayısı ve $F_{n+1} + F_{n+2} \equiv 1(mod2)$ olmak üzere $F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}$ çarpım sayısını göz önüne alalım. Sonuç 3.6 dan $F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}$ bir primitif *Pythagorean* sayısıdır.

$$F_n F_{n+3} = F_{n+1} F_{n+2} + (-1)^n$$

olduğundan

$$F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3} = F_{n+1} F_{n+2} [\, F_{n+1} F_{n+2} + (-1)^n]$$

ifadesinin sağ tarafı iki ardışık tamsayının çarpımına eşit olur.

Bununla beraber (a) üç ardışık tamsayının çarpımı biçiminde ve (b) iki ardışık tamsayının çarpımı şeklinde sonsuz sayıda *Pythagorean* sayısı bulunmasına rağmen , bu iki şartı aynı anda sağlayan sadece 210 ve 6 sayıları vardır. Yani bunlar $6 = 1.2.3 = 2.3$ ve $210 = 5.6.7 = 14.15$ olduğundan hem ardışık iki tamsayının, hem de ardışık üç tamsayının çarpımına eşittir [7].

Teorem 3.5 Her *Pythagorean* sayısı 6 ile bölünebilirdir.

İspat. Bir n *Pythagorean* sayısı, u ile v aralarında asal, $u > v$ ve $u + v \equiv 1(mod2)$ şartlarını sağlayan tamsayılar olmak üzere, her bir n *Pythagorean* sayısı $m^2uv(u^2 - v^2)$ biçimindedir. Daima u ile v biri tek iken diğeri çift olduğundan n, 2 ile bölünebilirdir. Öte yandan bir sayının 6 ile bölünebilmesi için, hem 2 ye hem de 3 e bölünmesi gerektiğinden biz $n \equiv 0(mod3)$ olduğunu göstermeliyiz.Küçük *Fermat* teoreminden dolayı $u^3 \equiv u(mod3)$ ve $v^3 \equiv v(mod3)$ dir. Buradan

$$n = m^2uv(u^2 - v^2) = m^2(u^3v - uv^3) \equiv m^2(uv - uv) \equiv 0(mod3)$$

olur.

Sonuç 3.10 6 nın dışındaki hiçbir *Pythagorean* sayısı mükemmel sayı değildir.

İspat. n bir *Pythagorean* sayısı olsun Teorem 3.5 den dolayı her n *Pythagorean* sayısı 6 ile bölünebilirdir. Bu yüzden

$$n \equiv 0,\ 3 \text{ veya } 6\ (mod9)$$

olur. Her *Pythagorean* sayısı çift olduğundan dolayı tek olmayan bir mükemmel sayı *Pythagorean* sayısı olabilir. Ayrıca her çift mükemmel sayı n ile $2^n - 1$ asal sayılar olmak üzere $2^{n-1}(2^n - 1)$ biçiminde tanımlanır [7]. Buradan 6 nın dışındaki her çift mükemmel sayının 9 modülüne göre 1 e kongrüent olarak bulunur. Bu yüzden 6 dan büyük çift mükemmel sayı *Pythagorean* sayısı olamaz. Bundan dolayı hem *Pythagorean* hem de mükemmel sayı olan yegane sayı 6 dır.

Aşağıdaki teorem *Pythagorean* sayıları için Teorem 1.2.6 ya benzer bir sonuç verir.

Teorem 3.6 n bir doğal sayı ve $n > 12$ olmak üzere n ile $2n$ arasında bir *Pythagorean* sayısı vardır.

İspat. $13 \leq n \leq 23$ olduğundan *Pythagorean* sayısı olan 24

$24 \leq n \leq 29$ için *Pythagorean* sayısı olan 30

$30 \leq n \leq 53$ iken *Pythagorean* sayısı olan 54 bu şartı sağlar. Buradan $t \geq 3$ için $6(t+1)^2 < 12t^2$ olduğunu görürüz. Bu yüzden $6(t+1)^2$ biçimindeki *Pythagorean* sayısı, $6t$ ile $12t^2$ arasındadır. Böylece

$t \geq 3$ için $6t^2 \leq n \leq 6(t+1)^2 - 1$

için $6(t+1)^2$ bir *Pythagorean* sayısı olur. Her bir t pozitif tamsayısı için $6t^2$ bir *Pythagorean* sayısı olduğundan her $n > 12$ için n ve $2n$ arasında bir *Pythagorean* sayısı vardır.

Örnek 3.10 $n = 13$ ise $13 < 24 < 26$, $16 < 30 < 32$ olup 24 ve 30 *Pythagorean* sayılarıdır.

Aşağıdaki teorem her bir *Pythagorean* sayısının ya $10k$ yada $10k + 4$ veya $10k + 6$ şeklinde olabileceğini gösterir.

Teorem 3.7 $10k$, $10k + 4$, $10k + 6$ formunda sonsuz sayıda *Pythagorean* sayısı vardır.

İspat. Eğer n *Pythagorean* sayısı ise o zaman her bir t doğal sayısı için t^2n inde bir *Pythagorean* sayısı olduğunu biliyoruz. Eğer n ile tn in her ikisi de *Pythagorean* sayısı ise o zaman her bir m pozitif tamsayı kuvveti için tn inde bir *Pythagorean* sayısı olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece her bir pozitif m tamsayı kuvveti için $5^m 6$, $2^m 30$, $7^m 30$ sayıları *Pythagorean* sayısıdır. Bundan dolayı $10k$ biçiminde sonsuz sayıda *Pythagorean* sayısı vardır. Eğer $t = 10s + 2$ veya $t = 10s + 3$ ise, o zaman $6t^2 \equiv 4(mod10)$ olur. Her bir t pozitif tamsayısı için $6t^2$ bir *Pythagorean* sayısı olduğundan, $10k + 4$ formunda sonsuz sayıda *Pythagorean* sayısı vardır. Benzer şekilde $t = 10s + 4$ ve $t = 10s + 6$ için $6t^2 \equiv 6(mod10)$ olacağından dolayı $10k + 6$ şeklinde sonsuz sayıda *Pythagorean* sayısı mevcuttur.

Örnek 3.11 60 = 6.10 , 54 = 5.10 + 4 , 924 = 92.10 + 4 , 5376 = 537.10 + 6 olup bu *Pythagorean* sayılarının birler basamağında sırasıyla 0, 4, 4, 6 bulunur.

Teorem 3.8 Birler basamağında 2 veya 8 bulunduran hiçbir *Pythagorean* sayısı yoktur.

İspat. Her bir *Pythagorean* sayısı 6 ile bölünebildiğinden bu sayıların birler basamağında ancak 0, 2, 4, 6 veya 8 sayılarından birisi bulunabilir. Burada bir *Pythagorean* sayısının birler basamağında sadece 0, 4 veya 6 sayılarından birinin bulunabileceğini göstereceğiz. Verilen t, u, v doğal sayıları , $(u, v) = 1$, $u > v$ ve $u+v \equiv 1(mod2)$ şartlarını sağlamak üzere her bir *Pythagorean* sayısı $t^2uv(u^2 - v^2)$ biçiminde verilir. Eğer n tamsayısı

$$(2tuv,\ t(u^2 - v^2),\ t(u^2 + v^2))$$

Pythagorean üçgeninin alanı ise o zaman bu n sayısının yukarıdaki *Pythagorean* sayısı olacağı açıktır. Bir *Pythagorean* üçgeninin kenarlarından birisi, 5 ile bölünebilirdir. Eğer bir *Pythagorean* üçgeninin dik kenarlarından birisi veya t, 5 ile bölünebilir ise o zaman n de 10 ile bölünebilirdir. Böylece n in birler basamağında sıfır bulunur. Şimdi ise ne t nin ne de üçgenin dik kenarlarından birisinin 5 ile bölünmediğini farz edelim. O zaman

$$u \not\equiv 0(mod5)\,,\ v \not\equiv 0(mod5) \text{ ve } u^2 - v^2 \not\equiv 0(mod5)$$

olur. Fakat buradan $u^2 + v^2 \equiv 0(mod5)$ elde ederiz. $u^2 + v^2$ tek olduğu zaman

$$u^2 + v^2 \equiv 5(mod10)$$

olur. Şimdi 10 modülünü göz önüne alarak yukarıdaki kongrüansı sağlayan (u, v) ikililerini (1, 2), (1, 8), (2, 1), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 7), (6, 3), (7, 4), (7, 6), (8, 1), (8, 9), (9, 2), (9, 8) olarak buluruz. Her bir (u, v) yazımı için $uv(u^2 - v^2) \equiv 4$ veya $uv(u^2 - v^2) \equiv 6(mod10)$ olur. Eğer $t \not\equiv 0(mod5)$ ise o zaman $t^2 \equiv 1, 4, 6, 9(mod10)$ olacağından $t^2uv(u^2 - v^2)$ nin birler basamağında sadece 4 veya 6 bulunabilir. Böylece her bir *Pythagorean* sayısının birler basamağında sadece 0, 4 veya 6 sayılarından birisi bulunabilir.

Sonuç 3.9 Ortak farkları 6 veya 24 olacak şekilde dört *Pythagorean* sayısından oluşan bir aritmetik dizi yoktur.

İspat. İlk olarak 6 ortak farkı için ispatı yapalım. Yani n, $n+6$, $n+12$ ve $n+18$ sayılarının aynı anda *Pythagorean* sayısı olamayacağını göstereceğiz. n bir *Pythagorean* sayısı olduğunda onun birler basamağında ancak 0, 4 veya 6 sayılarından birisi bulunabilir. Eğer n in birler basamağında 0 var ise ,o zaman $n+12$ nin birler basamağında 2 bulunacaktır. Bu yüzden $n+12$ *Pythagorean* sayısı olamaz. Eğer n in birler basamağında 4 var ise o zaman $n+18$ in birler basamağında 8 bulunacağından $n+18$ *Pythagorean* sayısı olamaz. Eğer n in birler basamağında 6 var ise o zaman $n+6$ nın birler basamağında 2 bulunacağından $n+6$ da *Pythagorean* sayısı olamaz. Böylece n , $n+6$, $n+12$ ve $n+18$ sayıları aynı anda *Pythagorean* sayısı olamaz.

Şimdi de ispatı 24 ortak farkı için yapalım. Yani n, $n+24$, $n+48$, $n+72$ sayılarının aynı anda *Pythagorean* sayısı olamayacağını gösterelim. n *Pythagorean* sayısı olduğundan birler basamağında ancak 0, 4 veya 6 sayılarından birisinin bulunabileceğini biliyoruz. n in birler basamağında 0 var ise, o zaman $n+48$ in birler basamağında 8 bulunacağından dolayı $n+48$ *Pythagorean* sayısı olmaz. Eğer n in birler basamağında 4 var ise , bu durumda da $n+24$ ün birler basamağında 8 bulunur ki bu ise $n+24$ sayısının *Pythagorean* sayısı olamayacağını gösterir. Eğer n in birler basamağında 6 var ise , o zaman $n+72$ in birler basamağında 8 vardır ve $n+72$ *Pythagorean* sayısı olamaz. Yani n, $n+24$, $n+48$, $n+72$ aynı zamanda *Pythagorean* sayısı olamaz. Dolayısıyla ortak farkları 6 ve 24 olan dört *Pythagorean* sayısı yoktur.

Sonuç 3.10 Ortak farkları 12 ve 18 olacak şekilde üç *Pythagorean* sayısından oluşan bir aritmetik dizi yoktur.

İspat. İlk olarak ispatı 12 ortak farkı için yapalım. Burada n, $n+12$, $n+24$ sayılarının aynı anda *Pythagorean* sayısı olmadığını ispatlamalıyız. n bir *Pythagorean* sayısı olduğundan birler basamağında yalnızca 0, 4 veya 6 rakamlarından birisi olmalıdır. Eğer n in birler basamağında 0 var ise $n+12$ nin birler basamağında 2 olacağından $n+12$ bir *Pythagorean* sayısı olamaz. n in birler basamağında 4 var ise o zaman $n+24$ ün birler basamağında 8 bulunacaktır, dolayısıyla $n+24$ de bir *Pythagorean* sayısı olamaz. Yani n, $n+12$, $n+24$ sayıları aynı anda *Pythagorean* sayısı olmaz.

Şimdi de ispatı 18 ortak farkı için verelim. Yani n, $n + 18$, $n + 36$ sayılarının aynı anda *Pythagorean* sayısı olamayacağını göstermeliyiz. n bir *Pythagorean* sayısı ise n in birler basamağında yalnız 0, 4 veya 6 sayılarından birisi bulunabilir. Eğer n in birler basamağında 0 var ise , $n + 18$ in birler basamağında 8 bulunacaktır. Bu yüzden de $n + 18$ *Pythagorean* sayısı değildir. Eğer n in birler basamağında 6 var ise, o zaman $n + 36$ nın birler basamağında 2 bulunacaktır. O halde $n + 36$ sayısı bir *Pythagorean* sayısı olamaz. Yani n, $n + 18$, $n + 36$ sayıları aynı zamanda *Pythagorean* sayısı değildir. Dolayısıyla 12 ve 18 için ispat tamamlanmıştır.

Eğer L elemanlı ve d ortak farka sahip *Pythagorean* sayılarının herhangi bir aritmetik dizisi varsa, o zaman t bir tamsayı olmak üzere L elemanlı ve dt^2 ortak farklı *Pythagorean* sayılarının en az bir aritmetik dizisinin bulunabileceği açıktır .

Konjektür 3.1 n, $n + 6$ ve $n + 12$ sayıları aynı zamanda *Pythagorean* sayısı olamaz.

Konjektür 3.2 n, $n + 24$ ve $n + 48$ sayılarının aynı zamanda *Pythagorean* sayısı olması için gerek ve yeter şart $n = 6$ olmasıdır.

Eğer konjektür 3.2 doğru ise konjektür 3.1 de doğrudur. n, $n + 6$ ve $n + 12$ sayılarının aynı anda *Pythagorean* sayısı olduğunu kabul edersek, o zaman $4n$, $4n + 24$, $4n + 48$ sayıları da aynı anda *Pythagorean* sayısı olur. Eğer konjektür 3.2 doğru ise $4n = 6$ olur ki bu n tamsayı olduğundan imkânsızdır. Dolayısıyla eğer 3.2 konjektürü doğru ise konjektür 3.1 de doğrudur. *Pythagorean* sayıları listemiz den 120, 150, 180, 210, 240, 270 *Pythagorean* sayılarının ortak farkı 30 olan bir aritmetik dizi oluşturduğunu biliyoruz. Bu dizinin eleman sayısı 6 dır. Bu aritmetik diziden t bir tamsayı olmak üzere, ortak farkı $30t^2$ olan en az 6 elemanlı bir aritmetik dizi oluşturabiliriz. Örneğin; 480, 600, 720, 840, 960, 1080 ortak farkı 120 olan bir aritmetik dizidir.

Tanım 3.3 İki *Pythagorean* sayısı arasındaki fark 6 ise o zaman bu sayılara ikiz *Pythagorean* sayıları denir. Örneğin; 10.000 e kadar olan ikiz *Pythagorean* sayıları şunlardır. (24, 30), (54, 60), (210, 216), (330, 336), (480, 486), (540, 546), (720, 726), (750, 756), (1710, 1716), (2160, 2166), (8664, 8670), (8970, 8976)

Tanım 1.2.3 de tanımlanan ikiz asalların sonlu yada sonsuz olduğu henüz bilinmemekle beraber ikiz *Pythagorean* sayıları için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.9 İkiz *Pythagorean* sayılarının sayısı sonsuzdur.

İspat. 6 ve 30 *Pythagorean* sayısı olduğundan , x ve y nin bütün tamsayı değerleri için $6x^2$ ve $30y^2$ *Pythagorean* sayılarıdır. Eğer

$$6x^2 - 30y^2 = 6 \text{ veya } x^2 - 5y^2 = \pm 1$$

ise $6x^2$ ve $30y^2$ sayıları ikiz *Pythagorean* sayılarıdır.

$$x^2 - 5y^2 = -1$$

negatif Pell denklemi

$$u_1 + v_1\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$$

temel çözümüne sahiptir. Burada

$$x^2 - 5y^2 = -1$$

negatif Pell denkleminin bütün çözümleri

$$(2 + \sqrt{5})^{2n+1} = u_{2n+1} + v_{2n+1}\sqrt{5}$$

ile verilir. Yine $(2+\sqrt{5})^2 = u_2 + v_2\sqrt{5}$ olduğundan dolayı

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

denkleminin bütün çözümleri

$$(2 + \sqrt{5})^{2n} = u_{2n} + v_{2n}\sqrt{5}$$

biçiminde verilir. Buradan bağıntılar da

$$u_1 = 1,\ v_1 = 0,\ u_2 = 2,\ v_2 = 1 \text{ ve } u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n,\ v_{n+2} = 4v_{n+1} + v_n$$

biçiminde rekürans bağıntıları ile verilir. Buradan

$$x^2 - 5y^2 = \pm 1$$

denklemi için ilk beş çözüm (1, 0), (2, 1), (9, 4), (38, 17), (161, 73) olur. Bunlar bize sırası ile (6, 0), (24, 30), (486, 480), (8664, 8670), (155526, 155520) ikiz *Pythagorean* sayılarını verirler.

$$x^2 - 5y^2 = -1 \text{ ve } x^2 - 5y^2 = 1$$

denklemlerinin her birinin sonsuz sayıda çözümü mevcut olduğundan dolayı sonsuz sayıda ikiz *Pythagorean* sayıları da mevcuttur.

6 ve 60 *Pythagorean* sayıları olduğundan ve

$$6x^2 - 60y^2 = \pm 6 \text{ veya } x^2 - 10y^2 = \pm 1$$

yazılabileceğinden $6x^2$ ve $60y^2$ sayıları da ikiz *Pythagorean* sayıları olacaktır.

$$x^2 - 10y^2 = \pm 1$$

denkleminin tüm çözümleri

$$u_n + \sqrt{10}\,v_n = (3 + \sqrt{10})^n$$

ile verilir ki burada n çift olduğunda

$$x^2 \quad 10y^2 \quad 1$$

Pell denkleminin çözümleri ve n tek olduğunda

$$x^2 \quad 10y^2 = \quad 1$$

negatif Pell denkleminin çözümleri bulunur. Bu çözümler $u_1 = 1$, $v_1 = 0$, $u_2 = 3$, $v_2 = 1$ olmak üzere

$$u_{n+2} \quad 6u_{n+1} \quad u_n \text{ ve } v_{n+2} \quad 6v_{n+1} \quad v_n$$

rekürans formüllerinden de elde edilebilir. Bu rekürans bağıntılarından ilk çözümler (1, 0), (3, 1), (19, 6), (117,37) olarak bulunur. Bu çözümlerden sırası ile (6, 0), (54, 60), (2166, 2160), (82134, 82140) ikiz *Pythagorean* sayıları elde edilir. Yine $6x^2 \quad 60y^2 = \pm 1$ denkleminin çözümlerinin sayısı sonsuz olduğundan dolayı ikiz *Pythagorean* sayılarının sayısının da sonsuz olduğu sonucu elde edilir.

Tanım 3.4 Bir n *Pythagorean* sayısı verildiğinde, t bir doğal sayı olmak üzere $t^2 n = m$ olacak şekilde n den hareketle bir m *Pythagorean* sayısı elde edilemiyorsa n ye bağımsız *Pythagorean* sayısı denir. Örneğin; 6 bağımsız bir *Pythagorean* sayısı olmasına rağmen 24 değildir.

Bir tamsayının bağımsız *Pythagorean* sayısı olması için gerek şartın onun primitif *Pythagorean* sayısı olması gerektiğini anlarız. Yani her bağımsız *Pythagorean* sayısı bir primitif *Pythagorean* sayısıdır. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Yani her primitif *Pythagorean* sayısı, bağımsız *Pythagorean* sayısı değildir. Aşağıdaki örnek gerek şartın yeter olmadığını gösterir.

Örnek 3.12 840 sayısını göz önüne alırsak bu sayı (112, 15, 113) primitif *Pythagorean* üçgeninin alanı olduğundan primitiftir. Ancak $840 = 4.210 = 2^2.210$ olduğundan 840 aynı zamanda (20, 21, 29) bir başka primitif *Pythagorean* üçgeninin alanının 4 katına eşittir. Yani $840 = 4.210 = 2^2.210$ dur. Böylece 840 primitif *Pythagorean* sayısı olmasına rağmen bağımsız *Pythagorean* sayısı değildir.

Teorem 3.10 u ile v doğal sayıları $(u, v) = 1$ ve $u > v$ ve $u + v \equiv 1 (mod 2)$ şartlarını sağlasın. Eğer aşağıdaki şartlardan biri gerçekleniyorsa, o zaman $uv(u^2 - v^2)$ primitif *Pythagorean* sayısı, bir bağımsız *Pythagorean* sayısıdır.

a) $v \geq 1$ olmak üzere u, v, $u \quad v$ ve $u \quad v$ sayılarının her biri tam kare olmayan tamsayılardır.

b) $v \geq 1$ olmak üzere $u - v$, $u + v$ ve $\frac{uv}{4}$ sayılarının her biri bir tamsayının karesi olmayan tamsayılar ve $\frac{uv}{4}$ tektir.

İspat. b bir *Pythagorean* sayısı ve t de pozitif tamsayı olmak üzere

$$uv(u^2 - v^2) = t^2 b \tag{3.1}$$

olduğunu kabul edelim. b bir *Pythagorean* sayısı olduğu için, T, U, V pozitif tamsayıları $U > V$, $(U, V) = 1$ ve $U + V \equiv 1(mod2)$ şartlarını sağlamak üzere

$$b = T^2 UV(U^2 - V^2) \tag{3.2}$$

şeklinde olmalıdır. (3.1) denkleminde b yerine yazılırsa

$$uv(u^2 - v^2) = t^2 T^2 UV(U^2 - V^2) \text{ veya } uv(u - v)(u + v) = t^2 T^2 UV(U^2 - V^2) \tag{3.3}$$

elde edilir.

Eğer (a) hipotezi sağlanıyorsa yani u, v, $u + v$ ler bir sayının karesi olmayan tamsayılar ise o zaman $uv(u - v)(u + v)$ çarpımı bir kareye eşit olmayan tamsayıdır. Ayrıca uv, $u - v$ ve $u + v$ sayıları ikişer ikişer aralarında asaldır ve hipotezden u ile v $u + v \equiv 1(mod2)$, $(u, v) = 1$ ve $u > v$ şartlarını sağlayan tamsayılardır. O zaman (3.3) den dolayı $t^2 T^2 = 1 \Rightarrow tT = 1 \Rightarrow t = T = 1$ olur.

Eğer (b) hipotezi sağlanıyorsa (3.3) ün sol tarafı tam olarak 4 ile bölünebilirdir. $uv \equiv 0(mod2)$ ve $u \pm v \equiv 1(mod2)$ olduğundan $t^2 T^2$ tek ve $uv \equiv 0(mod4)$ olmalıdır. Buradan (3.3) ifadesini 4 ile bölerek

$$\frac{uv}{4}(u - v)(u + v) = t^2 T^2 \frac{UV}{4}(U^2 - V^2) \tag{3.4}$$

bulunur.(3.4) ün sol tarafı kare olmayan bir tek tamsayı olduğundan $t^2 T^2 = 1$ $\Rightarrow tT = 1 \Rightarrow t = T = 1$ olur. Bu yüzden $uv(u^2 - v^2)$ bir bağımsız *Pythagorean* sayısıdır.

Teorem 3.11 $p > 3$ bir asal ve $v \geq 1$, $w \geq 3$ kare olmayan tek doğal sayılar ($v = 1$ olduğu durumda) olmak üzere, v ile w nın farklı asal bölenlerinin hepsi p modülüne göre 1 e kongrüent olsun. Ayrıca n bir pozitif tamsayı olmak üzere w nın bölenleri olan r tek asalları , p den farklı olarak verilsin. $u = 2^n r^2 w$ olmak üzere

$(u, v) = 1$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $u - v$, bütün asal bölenlerinin her biri p modülüne göre 1 e kongrüent olacak şekilde tam kareye eşit olmayan bir tamsayı ve $u + v$ de, tam kareye eşit olmayan bir tamsayı olsun. $u + v$ nin asal bölenlerinden birisi $q \equiv 1(mod p)$ olacak şekildeki bir sayı olmak üzere, geriye kalan bütün asal bölenleri p modülüne göre 1 e kongrüent olsun. $n = 1$ veya $n = 2$ olarak kabul edilsin.

O zaman $uv(u^2 - v^2)$ primitif *Pythagorean* sayısı bağımsız bir *Pythagorean* sayısıdır.

İspat. Hipoteze göre $q,\ r,\ p_1\ ,\ \dots,\ p_m$ ler farklı tek asallar ve

$$p_1 \equiv \dots \equiv p_m \equiv 1(mod p)$$

olmak üzere $uv(u^2 - v^2)$ *Pythagorean* sayısının

$$uv(u^2 - v^2) = uv(u - v)(u + v) = 2^n qr^2 p_1 \dots p_m$$

şeklinde olması gerektiği açıktır. a ve b pozitif tamsayıları $a > b,\ (a,\ b) = 1$ ve $a + b \equiv 1(mod 2)$ şartlarını sağlamak üzere

$$2^n qr^2 p_1 \dots p_m = t^2 ab(a - b)(a + b) \qquad (3.5)$$

biçiminde verildiğini ve a nın tek ve b nin çift olduğunu farz edelim. B tek olmak üzere (3.5) de $b = 2^k B$ ve $t = 2^\delta T$ olarak alırsak;

$$2^n qr^2 p_1 \dots p_m = T^2 2^{2\delta + k} aB(a - 2^k B)(a2^k + B) \qquad (3.6)$$

olur ki burada $1 \leq k \leq n,\ \delta \geq 0$ olmak üzere $n = 2\delta + k$ da t nin tek olması gerektiğinden

$$qr^2 p_1 \dots p_m = T^2 aB(a - 2^k B)(a2^k + B) \qquad (3.7)$$

elde edilir.

İlk olarak $T > 1$ ve T tek için (3.7) nin sağlanmadığını ispatlayalım. Bunun için tersine olarak (3.7) nin bazı $T > 1$ ve T tek sayıları için sağlandığını kabul edelim. Gerçektende (3.7) nin sol tarafı, (3.7) nin sağ tarafındaki farklı asalların kuvvetleri biçiminde bir tek şekilde temsil edilir. r^2 sadece bir asalın karesi olduğundan dolayı $T = r$ olacağı açıktır. Böylece (3.7) denklemi

$$qp_1 \ldots p_m = aB(a - 2^kB)(a2^k + B) \tag{3.8}$$

olmasını gerektirir. $p_1 \equiv \ldots \equiv p_m \equiv 1(modp)$ olduğu için (3.8) de eğer $q \mid aB$ ise o zaman

$$a - 2^kB \equiv 1(modp) \text{ ve } a2^k + B \equiv 1(modp)$$

olacağı açıktır. Buradan

$$2a \equiv 2(modp) \text{ ve } 2^{k+1}B \equiv 0(modp)$$

olur. Böylece eğer $q \mid aB$ ise o zaman

$$a \equiv 1(mod2) \text{ ve } B \equiv 0(mod2) \tag{3.9}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü B nin bir böleni olan p (3.8) nin sol tarafını da böleceğinden p nin $q, p_1, \ldots, p_m$ den farklı olması ile çelişir. Sonra $q \mid (a - 2^kB)$ veya $q \mid (a + 2^kB)$ olduğunu farz edelim. Bu durum (3.8) denkleminde $a \equiv B \equiv 1(modp)$ olmasını gerektirir. Hem de $q \mid (a - 2^kB)$ ise o zaman $a - 2^kB \equiv q(modp)$ olmalıdır ve $a \equiv 1(modp)$ olduğundan sonuçta $2 \equiv q + 1(modp)$ $\Rightarrow q \equiv 1(modp)$ olur ki bu da $q \equiv 1(modp)$ hipotezi ile çelişir. Çünkü ($a - 2^kB \equiv q(modp)$ ve $a + 2^kB \equiv 1(modp)$ dir.)

Böylece $T > 1$ için (3.8) eşitliğinin sağlanmadığı görülür. Sonuç olarak $T = 1$ ve burada $t = 2^{\delta}T$ olduğundan $t = 2^{\delta}$ elde ederiz. Şimdi de $\delta = 0$ olduğunu gösterelim. Hipoteze göre $n = 1$ veya $n = 2$ dir. Eğer $n = 1$ ise o zaman $2\delta + k = n$ ve

$k \geq 1$ olduğundan $\delta = 0$ bulunur. $n = 2$ için de $\delta = 0$ bulmalıyız. Çünkü $2\delta + k = n$ ve $k \geq 1$ olduğundan ancak $\delta = 0$ olabilir. Böylece $\delta = 0$ ve $T = 1$ olduğundan $t = 2^{\delta}T \Rightarrow t = 1$ olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 3.12 Bağımsız olmayan primitif *Pythagorean* sayılarının sayısı sonsuzdur.

İspat. Önce k, 1 den büyük bir tamsayı olmak üzere n sayısının

$$n = (18k^2 + 12k + 2)(6k^2 + 4k + 1)(24k^2 + 16k + 3)(12k^2 + 8k + 1)$$

biçiminde verildiğini düşünelim. Burada

$$u = 18k^2 + 12k + 2 \text{ ve } v = 6k^2 + 4k + 1$$

olarak alırsak, o zaman u çift v tek, $u > v$ ve $(u, v) = 1$ dir. Böylece $n = uv(u + v)(u - v)$ olacağından n bir primitif *Pythagorean* üçgeninin alanı olur. Yani n bir primitif *Pythagorean* sayısıdır. Şimdi de n yi

$$n = (3k + 1)^2(12k^2 + 8k + 2)(24k^2 + 16k + 3)(12k^2 + 8k + 1)$$
$$= (3k + 1)^2 n'$$

biçiminde tekrar yazarsak $a = 12k^2 + 8k + 1$ olmak üzere $n' = a(a + 1)(2a + 1)$ olarak bulunur. Böylece sonuç 3.2 den n' de bir primitif *Pythagorean* sayısı olur. Ancak eğer $k \geq 1$ ise n bağımsız *Pythagorean* sayısı değildir.

Yukarıdaki durumlar için iki özel örnek daha verebiliriz.

Örnek 3.13

$$n = (18k^2 + 24k + 8)(6k^2 + 8k + 3)(24k^2 + 32k + 11)(12k^2 + 16k + 5), \; k \geq 1$$
$$= (3k + 2)^2(12k^2 + 16k + 6)\,(24k^2 + 32k + 11)(12k^2 + 16k + 5)$$

olur ki $a = 12k^2 + 16k + 5$ olmak üzere

$$n = (3k + 2)^2 a(2a + 1)(a + 1)$$

bulunur.

Örnek 3.14

$$n = (6k + 2)(2k + 1)(8k + 3)(4k + 1), \quad k \geq 1 \text{ ve } 3k + 1 = s^2$$
$$= (3k + 1)(4k + 2)(8k + 3)(4k + 1)$$
$$= s^2(4k + 2)(8k + 3)(4k + 1)$$

olur ki $a = 4k + 1$ olmak üzere

$$n = s^2 a(2a + 1)(a + 1)$$

elde edilir.

Tanım 3.5 Her hangi bir n doğal sayısı , iki farklı *Pythagorean* üçgeninin alanı olarak yazılabiliyorsa n ye ikiz *Pythagorean* sayısı denir.

Tanım 3.6 Eğer bir n doğal sayısı üç farklı *Pythagorean* üçgeninin alanı olarak yazılabiliyorsa bu n doğal sayısına üçüz *Pythagorean* sayısı denir.

Tanım 3.7 Eğer dört farklı *Pythagorean* üçgeninin alanı bir n doğal sayısına eşitse bu n doğal sayışına dördüz *Pythagorean* sayısı denir.

İkinci bölümde verdiğimiz farklı hipotenüslü (518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458), (231, 2960, 2969), (111, 6160, 6161) üçgenlerini alırsak alanları aynıdır. Dolayısıyla dördüz *Pythagorean* sayısı olur.

Tanım 3.8 Eğer bir n doğal sayısı beş farklı *Pythagorean* üçgeni olarak yazılabiliyorsa bu n doğal sayısına beşiz *Pythagorean* sayısı denir.

Yine ikinci bölümde bahsettiğimiz beş farklı (2805, 52416, 52491), (3168, 46410, 46518), (5236, 28080, 28564), (6006, 24480, 25206), (8580, 17136, 19164) *Pythagorean* üçgenlerinin alanları aynıdır. Bundan dolayı üçgenlerin alanları beşiz *Pythagorean* sayılarını oluşturur.

Bağımsız olmayan sonsuz sayıda primitif *Pythagorean* sayılarının olduğu Teorem3.11 den dolayı açıktır. Buradan ikiz *Pythagorean* sayılarının sayısı da sonsuz sayıdadır. n, (40, 42, 58), (70, 24, 74) ve (112, 15, 113) ile verilen üç *Pythagorean* üçgeninin alanı olduğundan $n = 840$ bir üçüz *Pythagorean* sayısıdır. Böylece her bir t doğal sayısı için $840t^2$ bir üçüz *Pythagorean* sayısıdır.

Bazı pozitif tamsayılar ikiz primitif *Pythagorean* sayısıdır. Bunlardan 10.000 e kadar üç tane ikiz primitif *Pythagorean* sayısı vardır. Bunlar 210, 2730 ve 7980 dir.

$n = 210$, (12, 35, 37) ve (20, 21, 29) primitif *Pythagorean* üçgenlerinin alanlarına eşittir.

$n = 2730$ ise (28, 195, 197) ve (60, 91, 109) biçimindeki iki primitif *Pythagorean* üçgeninin alanıdır.

$n = 7980$ de (40, 399, 401) ve (168, 95, 193) biçimindeki ifade edilen iki primitif *Pythagorean* üçgeninin alanıdır.

İki primitif *Pythagorean* üçgeninin alanına eşit olan tüm pozitif n tamsayılarının bulunması problemi enteresan bir problemdir.

Tanım 3.9 Herhangi bir pozitif n sayısı p ile bölündüğü zaman, p^2 ile de bölünebiliyorsa yani n in asal çarpanlara ayrılışında kuvveti bire eşit olan hiçbir asal çarpanı yok ise bu n sayısına *Powerful* sayı denir.

Tanım 3.10 Eğer bir n tam sayısı *powerful* ve *Pythagorean* ise bu n tam sayısına *powerful Pythagorean* sayısı denir.

Teorem 3.13 Verilen bir sayı *Pythagorean* sayısı ise o zaman bu sayı bir sayının karesine eşit değildir.

İspat. Eğer bir *Pythagorean* sayısı , bir sayının karesine eşit olsaydı, o zaman $(u, v) = 1$, $u > v$ ve $u + v \equiv 1 (mod 2)$ olmak üzere

$$m^2uv(u^2 - v^2) = s^2$$

olurdu. Buradan

$$uv(u - v)(u + v) = \frac{s^2}{m^2} = s_1^2$$

olur. Bu ise a, b, c ve d doğal sayıları olmak üzere

$$u = a^2,\quad v = b^2,\quad u - v = c^2 \text{ ve } u + v = d^2$$

olmasını gerektirir. Böylece $a^2 - b^2 = c^2$ ve $a^2 + b^2 = d^2$ olarak bulunur ki bu mümkün değildir [8]. Eğer

$$(u, v) = 1 \text{ ve } uv(u - v)(u + v) = s^k$$

ise o zaman

$$u = a^k,\ v = b^k,\ u - v = c^k \text{ ve } u + v = d^k,\ a^k + b^k = d^k$$

olacak şekilde a, b, c ve d doğal sayıları vardır. Buda *Fermat' ın* son teoreminden dolayı bir primitif *Pythagorean* sayısı bir tam sayının k ıncı kuvveti olamaz (yani $x^k + y^k = z^k$ nın trivial olmayan çözümü yoktur.)

Teorem 3.14 Sonsuz sayıda *powerful Pythagorean* sayısı vardır.

İspat. Eğer n bir *Pythagorean* sayısı ise o zaman her t ve m pozitif tam sayıları için t^2n^{2m+1} *powerful Pythagoreandır.*

En küçük *powerful Pythagorean* sayısı $6^3 = 216$ dır. Diğer bazı *powerful Pythagorean* sayıları $t^2 6^3$, $t^2 2^m 30^3$, $t^2 5^m 6^3$, $t^2 7^m 30^3$ dir.

Teorem 3.15 *Lucas* dizisinde *Pythagorean* sayısı yoktur.

İspat. *Pythagorean* sayısı 6 ile bölünebildiğinden ve bu sayının birler basamağında 0 veya 4 yada 6 sayılarından birinin bulunması gerektiğini biliyoruz. n inci *Lucas* sayısının *Pythagorean* sayısı olması için $L_n \equiv 0 \pmod 6$ ve $L_n \equiv 0,\ 4$ veya $6 \pmod{10}$ olması gerek şarttır. Ayrı ayrı olarak 6 modülüne ve 10 modülüne göre *Lucas* dizisini göz önüne alalım.

6 modülünde *Lucas* dizisi

<2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5, 5, 4, 3, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5> 2, 1, 3,...

şeklindedir. Periyodu 24 tür. Böylece $L_{24k+6} \equiv 0 \pmod 6$ ve $L_{24k+18} \equiv 0 \pmod 6$ elde edilir.

10 modülünde *Lucas* dizisi

<2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9>2, 1, ... şeklindedir ve periyodu 12 dir.

$L_{24k+6} \equiv L_{12k_1+6} \equiv 8 \pmod{10}$, $L_{24k+18} \equiv L_{12(2k+1)} \equiv 8 \pmod{10}$ olur. O halde *Lucas* sayıları 6 ile bölündüğünde birler basamağında 8 rakamı bulunur ki bu yüzden *Lucas* sayıları *Pythagorean* sayısı değillerdir.

KAYNAKLAR

[1] Baker, A.1996.A Concise Introduction to The Theory of Numbers, Cambridge Uni.Press.

[2] Bezuszka, S.J.1981.Even Perfect Numbers- An Update, Mathematics Teacher 460-463.

[3] Brown, C.K.1970.Nasties are Primitive, Mathematics Teacher 502-504.

[4] Burton, M.D.1989.Elemantary Number Theory, 2nd Ed.Wm.C.Brown, Dubuque, Iowa.

[5] Cihangir, A., Şenay,H.2000. $x^p+y^q=z^r$ Diophantine Denkleminin Tamsayı Çözümleri Üzerine II .Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi, 8,1:137-143.

[6] Davenport, H.1992.The Higher Arithmetic, 6th Ed.Cambridge Uni.Press.

[7] Freitag, H.T.1990.Pythagorean Triples, Elemantary Problems and Solutions 372-373.

[8] Hardy,G.H. , Wright, E.M.1960. An Introduction to the Theory of Numbers, 4th Ed., Oxford University Press.

[9] Golomb, S.W.1970.Powerful Numbers, American Mathematic Monthly 840-852.

[10] Miller, B.1980.Nasty Numbers, The Mathematics Teacher 73.9: 649.

[11] Mohanty, S. , Mohanty, S.P.1992.Pythagorean Numbers, Fibonacci Quarterly 28:31-42.

[12] Mordell, L.J.1969.Diophantine Equatians , In "Pure and Applie Mathematics" Vol.30.

[13] Nagell, T.1951.Introduction to Number Theory, Wiley, New York.

[14] Robbins, N.1993.Beginning Number Theory, Wm.C.Brown, Oxford.

[15] Siérpinski , W.1962.Pythagorean Triangles, The Scripta Mathematica Studies No:9, Yeshiva Universty, New York.

[16] Sierpinski,W.1997. Elemantary Theory of Numbers ,translated from polish by A.Hulanicki, Warszawa.

[17] Şenay, H.1989.Sayılar Teorisine Giriş, S.Ü.Fen-Ed.Fak. Yayını , Yayın No:5, Konya.

[18] Wajda, S.1989.Fibonacci&Lucas Numbers and the Golden Section Theory and Aplications, Ellis Harwood Limited, Chichester.

[19] Weil, A.1984.Number Theory: An Approach Through History From Hummarapi to Legendre, Birkhauser, Boston.

[20] Whitlock, W.P. 1943. Rational Right Triangles With Equal Areas, Scripta Mathematica IX: 155-161.

[21] Wiles, A. 1995. Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem, Annals of Math.141 : 443-551.

[22] Zelator, K.1993.On Independent Pythagorean Numbers, Fibonacci Quarterly 31:299-301.