

67403

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİRLEŞİK ELEMANLarda SICAKLIK
DAĞILIMININ BİR MATEMATİK MODELİNİN
ÇÖZÜMLENMESİ ÜZERİNE**

**Hülya YILDIRIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 1997**

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRLEŞİK ELEMANLarda SICAKLIK
DAĞILIMININ BİR MATEMATİK MODELİNİN
ÇÖZÜMLENMESİ ÜZERİNE

Hülya YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

67403

Bu tez 30 / 05 / 1997 tarihinde aşağıdaki juri tarafından oybirliği/oyçeklüğü ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.Galip OTURANÇ

(Danışman)

Prof.Dr.Ali SİNAN

(Üye)

Prof.Dr.Gürbüz ATAGÜNDÜZ

(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRLEŞİK ELEMANLarda SICAKLIK DAĞILIMININ BİR MATEMATİK MODELİNİN ÇÖZÜMLENMESİ ÜZERİNE

Hülya YILDIRIM

S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ
1997, Sayfa: VII+22

Jüri : Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Prof. Dr. Ali SİNAN

Prof. Dr. Gürbüz ATAGÜNDÜZ

İşı iletimi problemlerinin çözümünde değişkenlerine ayırma metodu yaygın olarak kullanılır.

Bu çalışmada birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımının bulunduğu zaman oluşan spektral problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiş ve sıcaklık dağılımı için formül yazılmıştır.

Bazı özel haller için açık formüller elde edilmiş ve genel haller için asimtotik formüller bulunmuştur.

Anahtar kelimeler: Sıcaklık Dağılımı, Özdeğer, Özfonsiyon, Spektral Problem, Birleşik Elemanlar.

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE SOLUTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF HEAT DISTRIBUTION OF COMPOSITE MEDIUM

Hülya YILDIRIM

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Galip OTURANÇ
1997, Page: VII+22

Jury : Assist. Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Prof. Dr. Ali SİNAN

Prof. Dr. Gürbüz ATAGÜNDÜZ

The method of separation of variables has been widely used in the solution of heat-conduction problems.

In this study the eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem arising in finding of the heat distribution in a composite medium consisting of two layers in contact are investigated and formula for the heat distribution is written.

In some private conditions, the clear formulas were obtained and in some general conditions, asymptotic formulas were found.

Key Words: Heat Distribution, Eigenvalue, Eigenfunction, Spectral Problem, Composite Medium.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tez çalışmalarım süresince büyük ilgi ve yardımlarını gördüğüm tez hocam Sayın **Yrd. Doç. Dr. Galip OTURANÇ'a** teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarından fikir aldığım halen Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Hussein Gusseinov hocama da teşekkür ederim.

Hülya YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

ÖZET	III
ABSTRACT	IV
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER	VI
SEMBOLLER	VII
GİRİŞ	1
BÖLÜM 1	
DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA YÖNTEMİ	3
BÖLÜM 2	
BİRLEŞİK ELEMANLarda SICAKLIK DAĞILIMININ SPEKTRAL ANALİZİ	7
2.1. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi Yardımcı Spektral Problem	7
2.2. Spektral Problemin İncelenmesi	8
2.3. Sıcaklık Dağılımı İçin Formül	20
SONUÇ	21
KAYNAKLAR	22

SEMBOLLER

- a Yüzeyler için temas noktası
- b Cismin bittiği nokta
- C Katsayı
- c Birim hacim için ısı kapasitesi
- h Yüzey birim katsayısı
- K Termal difuzivite

$R(x,t)$ x noktası ve t zamanındaki ısı üretim miktarı

t Zaman

$U(x,t)$ x noktası ve t zamanındaki sıcaklık fonksiyonu

U_o Çevre sıcaklığı

U_t $U(x,t)$ fonksiyonun t'ye göre kısmi türevi

U_x $U(x,t)$ fonksiyonun x'e göre kısmi türevi

$y(x)$ Özfonksiyon (Eigenfunction)

λ Özdeğer (Eigenvalue)

α_1 Malzemenin porozite katsayısı

β_1 Malzemenin termal iletim katsayısı

ρ $1/\sqrt{K}$

GİRİŞ

Bu çalışmada,

$$\left. \begin{array}{l} U_t = k_1 U_{xx} \quad (0 < x < a, t > 0) \\ U_t = k_2 U_{xx} \quad (a < x < b, t > 0) \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(b, t) = 0 \quad (\text{dış sınır koşulları}) \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} U(a - 0, t) = aU(a + 0, t) \\ U_x(a - 0, t) = bU_x(a + 0, t) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (\text{ iç temas}) \\ (\text{ koşulları}) \end{array} \right. \quad (3)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < b \quad (\text{başlangıç koşulu}) \quad (4)$$

$$(k_1, k_2, \alpha, \beta \in R)$$

diferensiyel denklem sisteminin, değişkenlerine ayırma yöntemi (Fourier yöntemi) ile çözümü incelenecaktır (Oturanç, 1995).

Değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözüm bulmada özdeğer ve özvektörlerin (özfonsiyonların) teorik olarak incelenmesi spektral teori bilimi çerçevesi içinde araştırılmaktadır.

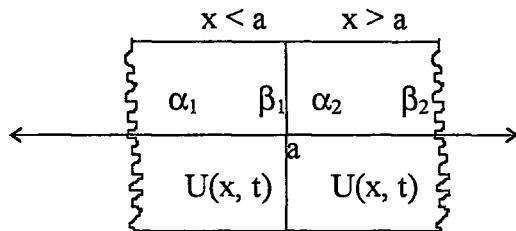
Eşitlik (1)'in fiziksel anlamı;

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{c} \right) R(x, t) - h[U(x, t) - U_0] \quad (5)$$

denklemine karşılık gelir. Eşitlik (5) literatürde bir boyutlu sıcaklık dağılımı denklemi olarak bilinir (Churchill, 1972).

Burada, c , birim hacim başına “ısı kapasitesi”, $R(x, t)$, t zamanında x yolu boyunca “üretilen ısı”, K , “termal difuzivite”, h pozitif değerli “yüzey ısı transfer katsayısı” ve U_0 “çevre sıcaklığı”dır.

Isı iletim katsayıları β_1 ve β_2 olan iki malzemenin “ a ” sınırında temas ettikleri varsayılsın, (Şekil 1).



Şekil 1

$x = a$ noktasında genelde ısı üretimi ve ısı absorbsiyonu olabilir. Bu durumda;

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a-0) & \text{ve} \\ & \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a+0) \end{array}$$

gösterimleri kullanılmak üzere, Eşitlik (3)'ün özel hali olarak,

$$\alpha_1 U(a-0, t) = \alpha_2 U(a+0, t)$$

$$\beta_1 U_x(a-0, t) = \beta_2 U_x(a+0, t)$$

eşitlikleri yazılabilir (Özışık, 1980). Burada α_1 , α_2 ve β_1 , β_2 pozitif sabitlerdir.

BÖLÜM 1

DEĞİŞKENLERE AYIRMA YÖNTEMİ

Değişkenlere ayırma yöntemi ile kısmi türevli diferensiyel denklem, adı türevli diferensiyel denklem Sturm-Lioville denklemi tipinde olur.

Bu yöntem ısı iletim denklemi ile anlatmak mümkündür. $0 \leq x \leq L$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (7)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial x} + hT = 0, \quad x = L, \quad t > 0 \quad (8)$$

$$T = F(x), \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (9)$$

kısımlı türevli denklemi sınır ve başlangıç şartları verilsin. Eşitlik (6) ile verilen diferensiyel denklem içinde ısı üretimi ve evaporasyon hali olmayan literatürde bir boyutlu ısı iletim denklemi olarak verilen bir kısımlı türevli diferensiyel denklemidir. Bu denklemi çözmek için Eşitlik (10) ile verilen dönüşüm yapabilir.

$$T(x,t) = X(x) \cdot \Gamma(t) \quad (10)$$

Eşitlik (10) zamana bağlı ayrılmış eşitliktir. Eşitlik (10), Eşitlik (6) da yerine konulursa,

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \cdot \frac{d \Gamma(t)}{dt} \quad (11)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte sol taraftaki ifade sadece x değişkenli uzayın fonksiyonudur. Sağ taraftaki ifade ise t değişkenine bağlıdır. Bu eşitlikteki her iki ifadenin aynı sabite eşit olduğu düşünülürse,

$\beta \in R$ için,

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \cdot \frac{d \Gamma(t)}{dt} = -\beta^2 \quad (12)$$

elde edilir. Bu durumda $\Gamma(t)$ fonksiyonu $\Gamma(t) = e^{-\alpha \beta^2 t}$ formundaki bir çözüme sahip olup,

$$\frac{d \Gamma(t)}{dt} + \alpha \beta^2 \Gamma(t) = 0 \quad (13)$$

adi türevli diferensiyel denklemi elde edilir. Burada β^2 'nin negatif seçilmesi $\Gamma(t)$ çözümünün $t \rightarrow \infty$ durumu için sıfıra yaklaşması durumunu oluşturmak içindir. α ve β pozitif ifadeler olduklarına göre $\Gamma(t)$ 'nin sıfıra yaklaşması için bir fiziksel bekłentidir.

Diger taraftan

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \beta^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (14)$$

diferensiyel denklemi de sağlanır.

Eşitlik (10) un sınır şartlarına uygulanması ile

$$\frac{d X}{d x} = 0, \quad x = 0 \quad (15)$$

$$k \frac{d X}{d x} + h X = 0, \quad x = L \quad (16)$$

bulunur.

Tanım. Eşitlik (14) ve (15) denklemleriyle tanımlanan yardımcı probleme özdeğer problemi denir.

$\beta = \beta_m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ ayırm parametresinin sadece belirli değerleri için çözümlere sahiptir.

Tanım. $X(\beta_m, x)$ uygun çözümüne problemin özfonsiyonu denir.

β , özdeğer değil ise yani $\beta \neq \beta_m$ ise problem aşikar çözüme sahiptir, yani $x = 0$ 'dır. $X(\beta_m, x)$ özfonsiyonları ve β_m özdeğerleri elde edilebilir ise yukarıdaki ısı iletimi probleminin çözümü, sıcaklık dağılımı, $T(x, t)$

$$T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m X(\beta_m, x) e^{-\alpha \beta_m^2 m t} \quad (17)$$

olarak verilir. Eşitlik (9)'da verilen başlangıç şartından yararlanarak,

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m X(\beta_m, x), \quad 0 < x < L \quad (18)$$

yazılabilir.

Bu sonuç, Eşitlik (15), (16) özdeğer probleminin $X(\beta_m, x)$ özfonsiyonlarının terimlerinde $0 < x < L$ aralığında tanımlı olan keyfi $F(x)$ fonksiyonunun ifadesidir. C_m bilinmeyen katsayıları

$$\int_0^L X(\beta_m, x) X(\beta_m, x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ N(\beta), & m = 0 \end{cases} \quad (19)$$

ile verilen özfonsiyonların ortogonallığı kullanarak belirlenebilir. Burada, norm, $N(\beta_m)$,

$$N(\beta_m) = \int_0^L [X(\beta_m, x)]^2 dx \quad (20)$$

ile tanımlıdır.

C_m katsayılarını belirlemek için

$$\int_0^L X(\beta_m, x) dx$$

operatörü ile Eşitlik (18) denkleminin her iki yanını kullanmakla mümkün olabilir. Eşitlik (19) ile verilen ortogonal özelliği de kullanarak

$$C_m = \frac{1}{N(\beta_m)} \int_0^L X(\beta_m, x) F(x) dx \quad (21)$$

elde edilir.

Eşitlik (6) ile verilen ısı-iletimi denkleminin sınır koşulları

$$\left. \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + h_1 T = 0, \quad x = 0, \quad t > 0 \\ k_2 \frac{\partial T}{\partial x} + h_2 T = 0, \quad x = L, \quad t > 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

olarak değiştirmek mümkündür.

Eşitlikler (6), (22), (9) denklemi, Eşitlik (10) ile değişkenlerine ayrılarak incelenirse, özdeğer probleminin $X(\beta_m, x)$ özfonsiyonları,

$$X(\beta_m, x) = \beta_m \cos \beta_m x + H_1 \sin \beta_m x \quad (23)$$

ile verilir. Burada β_m değerleri,

$$\tan \beta_m L = \frac{\beta_m (H_1 + H_2)}{\beta_m^2 - H_1 H_2} \quad (24a)$$

transental denkleminin kökleridir. Norm $N(\beta_m)$ ise

$$N(\beta_m) = \frac{1}{2} \left[(\beta_m^2 + H_1^2)(L_1 + \frac{H_2}{\beta_m^2 + H_2^2}) + H_1 \right] \quad (24b)$$

ile verilir. Burada

$$H_1 = \frac{h_1}{k_1} \quad \text{ve} \quad H_2 = \frac{h_2}{k_2}$$

olarak alınmıştır.

Burada özfonsiyonların belirlenmesi gereklidir. Ayrıca özdeğerlerin sayısı da önemlidir. Bölüm 2'de ele alınacak olan problemin özdeğerleri incelenerek özfonsiyon denklemi elde edilecektir (Özışık, 1980).

BÖLÜM 2

BİRLEŞİK ELEMANLarda SICAKLIK DAĞILIMININ SPEKTRAL ANALİZİ

2.1. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi Yardımcı Spektral Problem

(4) başlangıç koşulunu dikkate almaksızın (1) denkleminin (2) ve (3) koşullarını sağlayan çözümünü

$$U(x,t) = e^{-\lambda t} y(x), \quad 0 < x < b \quad (25)$$

şeklinde arayalım, burada λ kompleks değerler alabilir parametredir, $y(x)$ fonksiyonu ise t 'ye bağlı olmayıp λ 'ya bağlı olabilir.

(25) ifadesi (1), (2) ve (3) de yerine konulduğunda,

$$\begin{cases} -y''(x) = \lambda p_1^2 y(x) ; \quad 0 < x < a \\ -y''(x) = \lambda p_2^2 y(x) ; \quad a < x < b \end{cases} \quad (26)$$

$$y(0) = y(b) = 0 \quad (27)$$

$$\begin{cases} y(a-0) = \alpha y(a+0) \\ y'(a-0) = \beta y'(a+0) \end{cases} \quad (28)$$

elde edilir. Burada $p_1 = 1/\sqrt{K_1}$, $p_2 = 1/\sqrt{K_2}$ olarak alınmıştır (Bulavin, 1968 ve Mulholland, 1972).

Tanım: Eğer bir kompleks λ değerinde (26), (27), (28) probleminin özdeş olarak sıfır olmayan bir $y(x)$ çözümü varsa, bu λ değerine (26), (27), (28) probleminin özdeğeri ve $y(x)$ çözümüne de λ özdeğeri gelen özfonksiyonu denir.

Böylece (1), (2), (3) probleminin (25) şeklinde çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul λ 'nın (26), (27), (28) probleminin özdeğeri ve $y(x)$ 'in de bu özdeğere karşılık gelen özfonsiyonu olmalıdır.

(26), (27), (28) probleminin bütün özdeğerlerinden oluşan kümeye bu problemin spektr'i denir. Özdeğerlerin incelenmesi problemine de spektral problem denir (Atkinson, 1964 ve Bellman, 1953).

2.2. Spektral Problemin İncelenmesi

Önerme 1: (26), (27), (28) probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: λ kompleks değerli (26), (27), (28) probleminin özdeğeri ve $y(x)$ 'de bu özdeğere karşılık gelen özfonsiyon olsun. Eşitlik (26) ile verilen denklemler \bar{y} (y 'nin eşleniği) ile çarpılıp tanımlı oldukları aralıklarda integre edilirse;

$$-\int_0^a y''(x) \bar{y}(x) dx = \lambda \rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2 dx$$

ve

$$-\int_a^b y''(x) \bar{y}(x) dx = \lambda \rho_1^2 \int_a^b |y(x)|^2 dx$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten; sırasıyla

$$-y'(a-0) \bar{y}(a-0) + \int_0^a y'(x) \bar{y}'(x) dx = \lambda \rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2 dx$$

$$-y'(a+0) \bar{y}(a+0) + \int_a^b y'(x) \bar{y}'(x) dx = \lambda \rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2 dx$$

elde edilir. Eşitlik (28)'den

$$-\alpha\beta y'(a+0) \bar{y}(a+0) + \int_0^a |y'(x)|^2 dx = \lambda \rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2 dx \quad (29)$$

$$-y'(a+0) \overline{y(a+0)} + \int_a^b |y'(x)|^2 dx = \lambda \rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2 dx \quad (30)$$

elde edilir. Eşitlik (30)'un her iki tarafını $\alpha\beta$ ile çarpılıp eşitlik (29) ile taraf tarafa toplanırsa,

$$\int_0^a |y'(x)|^2 dx - \alpha\beta \int_a^b |y'(x)|^2 dx = \lambda \rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2 dx - \alpha\beta \lambda \rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2 dx$$

elde edilir. Bu son eşitliklerden;

$$\lambda = \frac{\int_0^a |y'(x)|^2 dx - \alpha\beta \int_a^b |y'(x)|^2 dx}{\rho_1^2 \int_0^a |y(x)|^2 dx - \alpha\beta \rho_2^2 \int_a^b |y(x)|^2 dx} \quad (31)$$

yazılabilir. Eşitlik (31)'den görüleceği üzere λ reeldir.

Önerme 2: (26), (27), (28) probleminin birbirinden farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonsiyonları aşağıdaki “ortogonalilik” bağıntısını sağlar.
 $\langle y_1, y_2 \rangle = 0$ olmak üzere

$$\rho_1^2 \int_0^a y_1(x) \overline{y_2(x)} dx + \alpha\beta \rho_2^2 \int_a^b y_1(x) \overline{y_2(x)} dx = 0 \quad (32)$$

dir.

İspat: Önce $0 < x < a$ aralığını inceleyelim.

$$-y_1''(x) = \lambda_1 \rho_1^2 y_1(x) \quad (33)$$

$$-y_2''(x) = \lambda_2 \rho_1^2 y_2(x) \quad (34)$$

Eşitlik (33)'ün her iki tarafını $\overline{y_2(x)}$ ile eşitlik (34)'ün eşlegini alıp her iki tarafını $y_1(x)$ ile çarpalım

$$-y_1''(x) \overline{y_2(x)} = \lambda_1 p_1^2 y_1(x) \overline{y_2(x)}$$

$$-y_1(x) \overline{y_2''(x)} = \lambda_2 p_1^2 y_1(x) \overline{y_2(x)}$$

Bu iki denklemi birbirinden çıkarıp $0 < x < a$ aralığında integralleylelim

$$\int_0^a [-y_1'' \overline{y_2(x)} + y_1(x) \overline{y_2''(x)}] dx = (\lambda_1 - \lambda_2) p_1^2 \int_0^a y_1(x) \overline{y_2(x)} dx$$

kısmi integrasyon ile çözülmüş sınırlar için eşitlik (27) ve (28) yazılırsa

$$-y_1'(a-0) \overline{y_2(a-0)} + y_1(a-0) \overline{y_2'(a-0)} = (\lambda_1 - \lambda_2) p_1^2 \int_0^a y_1(x) \overline{y_2(x)} dx \quad (35)$$

elde edilir.

Eşitlik (33) ve (34) için aynı işlemler $0 < x < b$ aralığı için yapılırsa,

$$-y_1''(x) = \lambda_1 p_2^2 y_1(x)$$

$$-y_2''(x) = \lambda_2 p_2^2 y_2(x)$$

alındığında,

$$-y_1''(x) \overline{y_2(x)} = \lambda_1 p_2^2 y_1(x) \overline{y_2(x)}$$

$$-y_1(x) \overline{y_2''(x)} = \lambda_2 p_2^2 y_1(x) \overline{y_2(x)}$$

yazılabilir. Bu iki denklem birbirinden çıkarılıp $0 < x < b$ aralığında integrallenirse, eşitlik (27) ve (28) yardımı ile;

$$-y_1'(a+0) \overline{y_2(a+0)} - y_1(a+0) \overline{y_2'(a+0)} = (\lambda_1 - \lambda_2) p_2^2 \int_0^a y_1(x) \overline{y_2(x)} dx \quad (36)$$

elde edilir. Eşitlikler (28), (35) ve (36) yardımı ile $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu için,

$$p_1^2 \int_0^a y_1(x) \overline{y_2(x)} dx + \alpha\beta p_2^2 \int_a^b y_1(x) \overline{y_2(x)} dx = 0$$

elde edilir.

Önerme 3: (26), (27), (28) probleminin özdeğerleri bir katlıdır. Yani her özdeğere sadece bir tane lineer bağımsız özfonsiyon karşılık gelir.

İspat: Bir λ özdeğerine iki tane lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonsiyonlarının karşılık geldiğini varsayıyalım. O halde $(0, a)$ ve (a, b) aralıklarından en az birisi üzerinde $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonsiyonları birbirileri ile lineer bağımsız olmalıdır.

Aksini kabul edelim; $y_2(x) = C_1 y_1(x)$ ($0 < x < a$), $y_2(x) = C_2 y_1(x)$ ($a < x < b$) olacak şekilde C_1 ve C_2 sabitleri vardır. Bu ifadeler eşitlik (3)'de yerine yazılırsa sırasıyla,

$$y_1(a-0) = \alpha y_1(a+0) , \quad y_2(a-0) = \alpha y_2(a+0)$$

ve

$$y_1'(a-0) = \beta y_1'(a+0) , \quad y_2'(a-0) = \beta y_2'(a+0)$$

$$C_1 y_1(a-0) = \alpha C_2 y_1(a+0)$$

$$C_1 y_1'(a-0) = \beta C_2 y_1'(a+0)$$

Buradan, $C_1 = C_2$ olduğu görülür. Çünkü $y(x) \neq 0$ dır. O halde her özdeğere sadece bir tane lineer bağımsız özfonsiyon karşılık gelir. Özdeğerleri incelemek için onların sağladığı denklemi (karakteristik denklemi) bulalım. Bu amaçla $\phi(x, \lambda)$ ($0 < x < a$) ile

$$- y''(x) = \lambda \rho_1^2 y(x) \quad (0 < x < a) \quad (37)$$

$$\phi(0, \lambda) = 0 , \phi'(0, \lambda) = 1 \text{ ve} \quad (38)$$

$\psi(x, \lambda)$ ($a < x < b$) ile de,

$$- y''(x) = \lambda \rho_2^2 y(x) \quad (a < x < b) \quad (39)$$

denkleminin

$$\psi(b, \lambda) = 0, \psi'(b, \lambda) = 1 \quad (40)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü gösterilsin.

Önerme 4. (26), (27), (28) probleminin λ özdeğerleri

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi(a-0, \lambda) & \alpha\Psi(a+0, \lambda) \\ \varphi'(a-0, \lambda) & \beta\Psi'(a+0, \lambda) \end{vmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \beta \varphi(a-0, \lambda) \Psi(a+0, \lambda) - \alpha \varphi'(a-0, \lambda) \Psi'(a+0, \lambda)$$

fonksiyonunun kökleri ile çakışır.

İspat: Eşitlik (37) $y(0) = 0$ şartını sağlayan çözümü $y(x) = C_1 \varphi(x, \lambda)$ ($0 < x < a$) şeklinde, eşitlik (39)'nin $y(b) = 0$ şartını sağlayan çözümü de $y(x) = C_2 \Psi(x, \lambda)$ ($a < x < b$) şeklindedir. O halde $y(x)$ çözümünün eşitlik (28) şartını sağlaması için

$$C_1 \varphi(a-0, \lambda) = \alpha C_2 \Psi(a+0, \lambda)$$

$$C_1 \varphi'(a-0, \lambda) = \beta C_2 \Psi'(a+0, \lambda)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. $y(x)$ 'in trival olmaması için C_1 ve C_2 'lerden en az biri sıfırdan farklı olmalıdır. Buradan,

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi(a-0, \lambda) & \alpha\Psi(a+0, \lambda) \\ \varphi'(a-0, \lambda) & \beta\Psi'(a+0, \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

Eşitlik (26), (27), (28) probleminin özdeğerlerinin varlığını incelemek için bu özdeğerlerin sağladığı denklem (karakteristik denklem) elde edilmelidir. Eşitlik (26) da $\lambda = s^2$ yazılırsa

$$y''(x) = s^2 \rho_1^2 y(x) \quad 0 \leq x \leq$$

$-y''(x) = s^2 \rho_2^2 y(x)$ $0 < x \leq b$
elde edilir. Eşitlik (26) nın Eşitlik (28) koşullarını sağlayan genel çözümü

$$y(x) = C_1 \frac{\sin s\rho_1 x}{s}, \quad 0 \leq x \leq a \quad (41)$$

$$y(x) = C_2 \frac{\sin s\rho_1(b-x)}{s}, \quad a \leq x \leq b$$

şeklinde olur, burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

$$C_1 \frac{\sin s\rho_1 a}{s} = \alpha C_2 \frac{\sin s\rho_2(b-a)}{s}$$

$$\rho_1 C_1 \cos s\rho_1 a = -\beta \rho_2 C_2 \cos s\rho_2(b-a)$$

elde edilir. Buradan

$$C_1 \frac{\sin s\rho_1 a}{s} - \alpha C_2 \frac{\sin s\rho_2(b-a)}{s} = 0$$

ve

$$C_1 \rho_1 \cos s\rho_1 a + C_2 \beta \rho_2 \cos s\rho_2(b-a) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu son iki denklemde katsasıl matrisinin determinantı

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \frac{\sin s\rho_1 a}{s} & -\alpha \frac{\sin s\rho_2(b-a)}{s} \\ \rho_1 \cos s\rho_1 a & \beta \rho_2 \cos s\rho_2(b-a) \end{vmatrix} = 0$$

olarak yazılır. Bu determinant açılırsa,

$$= \beta \rho_2 \frac{\sin s\rho_1 a}{s} \cos s\rho_2(b-a) + \alpha \rho_1 \cos s\rho_1 a \frac{\sin s\rho_2(b-a)}{s} = 0$$

$$= \beta \frac{\rho_2}{2s} \{ \sin s[\rho_1 a + \rho_2(b-a)] + \sin s[\rho_1 a - \rho_2(b-a)] \} +$$

$$+ \alpha \frac{\rho_1}{2s} \{ \sin s[\rho_1 a + \rho_2(b-a)] - \sin s[\rho_1 a - \rho_2(b-a)] \} = 0$$

$$\frac{1}{2s} (\alpha \rho_1 + \beta \rho_2) \sin s[\rho_1 a + \rho_2(b-a)] - \frac{1}{2s} (\alpha \rho_1 - \beta \rho_2) \sin s[\rho_1 a - \rho_2(b-a)] = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned} A &= \alpha\rho_1 + \beta\rho_2 \quad , \quad B = \alpha\rho_1 - \beta\rho_2 \\ \delta &= \rho_1a + \rho_2(b-a) \quad , \quad \gamma = \rho_1a - \rho_2(b-a) \end{aligned} \tag{42}$$

olmak üzere

$$\Delta(s) = \frac{1}{2s}(A \sin s\delta + B \sin s\gamma) = 0 \tag{43}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\Delta(s) = 0 \tag{44}$$

elde edilir.

Burada

$$A > 0 \quad , \quad -\infty < B < \infty$$

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \left| \frac{\alpha\rho_1 - \beta\rho_2}{\alpha\rho_1 + \beta\rho_2} \right| < 1 \tag{45}$$

$$\delta > 0 \quad , \quad -\infty < \gamma < \infty$$

$$\left| \frac{\gamma}{\delta} \right| = \left| \frac{\rho_1a - \rho_2(b-a)}{\rho_1a + \rho_2(b-a)} \right| < 1 \tag{46}$$

$\Delta(0) \neq 0$ olduğu gösterilebilir. Doğrudan da,
eğer $\gamma = 0$ ise (43) den

$$\Delta(0) = \frac{1}{2}A\delta \neq 0$$

eğer $\gamma \neq 0$ ise yine (43) den

$$\begin{aligned}
\Delta(0) &= \frac{1}{2}(A\delta + B\gamma) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha\rho_2 + \beta\rho_1)[\rho_1a + \rho_2(b-a) + (\alpha\rho_1 - \beta\rho_2)][\rho_1a - \rho_2(b-a)] \\
&= \frac{1}{2}\{\alpha a\rho_1^2 + \alpha(b-a)\rho_1\rho_2 + \beta a\rho_1\rho_2 + \beta(b-a)\rho_2^2 + a\rho_1^2 - \alpha(b-a)\rho_1\rho_2 \\
&\quad - \beta a\rho_1\rho_2 + \beta(b-a)\rho_2^2\} \\
&= \alpha a\rho_1^2 + \beta(b-a)\rho_2^2 \neq 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu sonuctan sonra aşağıdaki özel durumlar incelenebilir.

i) $B = 0$ olsun. $\Leftrightarrow \rho_1a = \rho_2(b-a)$ $\Rightarrow \Delta(s) = \frac{A}{2} \frac{\sin s\delta}{s}$

$S_0 = 0$ değeri (26), (27) problemi için özdeğer vermiyor. Çünkü bu değer için (26), (27) problemini yalnızca sıfır çözümü vardır. Ayrıca $\Delta(0) \neq 0$ olduğunu da biliyoruz.

$$\Delta(s) \neq 0 \Rightarrow s\delta = n\pi, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow S_n = n\pi / \delta, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow \lambda n = S_n^2 = (n\pi / \delta)^2 = [(\pi / \rho_1a + \rho_2(b-a)).n]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(41) de $C_1 = 1$ kabul edilerek

$$C_2 = \frac{\sin s_n \rho_1 a}{\alpha \sin s_n \rho_2 (b-a)}$$

elde edilir. O halde öz fonksiyonlar

$$y_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{s_n} \cdot \sin s_n \rho_1 x & , \quad 0 \leq x \leq a \\ \frac{\sin s_n \rho_1 a}{\alpha s_n \sin s_n \rho_2 (b-a)} \cdot \sin s_n \rho_2 (b-x) & , \quad a < x \leq b \end{cases} \quad (47)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde elde edilir.

$$\text{ii)} \quad \gamma = 0 \text{ olsun } [\Leftrightarrow \rho_1 a = \rho_2 (b-a)]$$

yukarıdaki durum ile aynı olan sonuç elde edilir.

Hiçbir ön şart vermeden Eşitlik (43) ün s köklerinin varlığı ve bu köklerin sayısının incelenmesi problemi (Özışık, 1980) spektral teori çalışmaları için önemlidir.

Köklerin varlığı ve bu köklerin sonsuz sayıda olması kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinden bilinen Rouche teoreminden yararlanılarak incelenebilir.

ROUCHE TEOREMİ: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları basit ve kapalı Γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik (holomorf) olsunlar. Eğer Γ hiçbir sıfır yerinden geçmiyorsa ve Γ üzerinde $|f(z)| > |g(z)|$ ise, o halde $f(z) + g(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonlarının Γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı aynıdır.

Teorem. Eşitlik (44) ün sonsuz sayıda kökü vardır. S_n ($n = 1, 2, \dots$) kökleri,

$$s_n = \frac{n\pi - r_n}{\delta}, \quad -\frac{\pi}{2} < r_n < \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir.

İspat. $\lambda = s^2$ olmak üzere

$$s\delta = \pi z, \quad s = \frac{\pi}{\delta} z \Rightarrow \lambda = s^2 = \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 z^2 \quad (48)$$

$$\Phi(\lambda) = \Phi\left(\frac{\pi^2}{\delta^2} z^2\right) = \phi_1(z) \quad (49)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{\delta}{2\pi z} (A \sin \pi z - B \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z) \quad (50)$$

$$\Gamma_n \text{ ile } \left\{ z : |\operatorname{Re} z| = n + \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Im} z| = n + \frac{1}{2} \right\}$$

karesinin çevresi gösterilsin.

$$\Gamma = \Gamma_n, \quad f(z) = \frac{\delta A}{2\pi z} \sin \pi z, \quad g(z) = \frac{\delta B}{2\pi z} \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z$$

kabul edilsin. O halde $\Phi_1(z) = f(z) + g(z)$ Rouche teoreminin ifadesine göre,

$$|A \sin \pi z| > |B \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z| \Leftrightarrow \left| \frac{B}{A} \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right| < 1$$

$|B/A| < 1$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla

$$\left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right| \leq 1 \quad (z \in \Gamma_n \text{ ve } n \text{ yeterince büyük})$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $z = \sigma + i\tau$ olmak üzere, Γ_n 'nin dik kenarları üzerinde

$$\sigma = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\sin \pi z = \sin \pi \left[\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) + i\tau \right] = \pm (-1)^n \operatorname{Ch} \pi \tau$$

$$\left| \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z \right| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right|, \quad \frac{\gamma}{\delta} = C \text{ için}$$

$$\left| \sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z \right| \leq \frac{1}{2} (e^{-\pi|\tau| + \pi|\tau|})$$

O halde,

$$\left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right| = \frac{e^{\pi|\tau| |\tau|} + e^{-\pi|\tau| |\tau|}}{e^{\pi|\tau|} + e^{-\pi|\tau|}}$$

$$\delta = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

O halde $|c| < 1$ olduğundan, $\forall n$ için

$$\left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right|_{\sigma=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)} \leq 1$$

elde edilir.

Γ_n 'in yatay kenarları üzerinde:

$$\tau = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right| \leq \frac{2e^{\pi \left| \frac{\gamma}{\delta} \right| |\tau|}}{ce^{\pi |\tau|}} = \frac{2}{c} e^{-\pi \left(1 - \frac{\gamma}{\delta} \right) |\tau|} \rightarrow 0$$

$|\tau| \rightarrow \infty$ çünkü, $\left| \frac{\gamma}{\delta} \right| < 1$.

O halde yeterince büyük n ler için

$$\left| \frac{\sin \frac{\gamma}{\delta} \pi z}{\sin \pi z} \right|_{\tau=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)} \leq 1$$

elde edilir.

O halde Rouche teoreminin ifadesine göre, büyük n ler için $\Phi(z)$ fonksiyonunun Γ_n içindeki sıfır yerlerinin sayısı $(1/z) \cdot \sin \pi z$ fonksiyonunun Γ_n içindeki sıfır yerlerinin sayısı kadardır. $1/z \sin \pi z$ 'nin Γ_n içindeki sıfırları

πm ($m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) dir ve bunların sayısı $2n$ dir.

πm ($m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) dir ve bunların sayısı $2n$ dir.

Eşitlik (49) den görüleceği üzere, $\Phi_1(z)$ çift fonksiyondur. O halde $\Phi_1(z)$ nin Γ_n içindeki kökleri,

$$-z_n, -z_{n-1}, \dots, -z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde (Rouche teoreminin yardımıyla) kolayca görülebilir ki, z_n kökü

$$\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right)$$

aralığında bulunur.

$$n - \frac{1}{2} < z_n < n + \frac{1}{2} \quad (51)$$

Eşitlik (49) dan $s_n = (\pi / \delta) z_n$, $z_n = (\pi / \delta) s_n$ Eşitlik (51) den,

$$n - \frac{1}{2} < \frac{\pi}{\delta} s_n < n + \frac{1}{2} \text{ buradan, } \Gamma_n = \delta s_n - n\pi \text{ olmak üzere.}$$

$$s_n = \frac{n\pi + \Gamma_n}{\delta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \Gamma_n < \frac{\pi}{2}$$

elde edilir.

(26), (27), (28) probleminin $\lambda_n = s_n^2$ özdeğerine karşılık gelen $y_n(x)$ özfonsiyonu .

$$y_n(x) = \frac{1}{s_n} \sin s_n \rho_1 x, \quad 0 < x < a$$

$$y_n(x) = \frac{\sin s_n \rho_1 a}{\alpha s_n \sin s_n \rho_2 (b-a)} \sin s_n \rho_2 (b-x), \quad a < x < b$$

şeklinde bulunur.

2.3. Sıcaklık Dağılımı İçin Formül

(1), (2), (3), (4) probleminin $U(x, t)$ çözümü

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} y_n(x)$$

serisi şeklinde bulunur, burada C_n sayıları Eşitlik (4) başlangıç koşulundaki $f(x)$ için yazılan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x)$$

ayrılış formülünden

$$C_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n \cdot y_n \rangle} = \frac{\rho_1^2 \int_0^a f(x) y_n(x) dx + \alpha \beta \rho_2^2 \int_a^b f(x) y_n(x) dx}{\rho_1^2 \int_0^a y_n^2(x) dx + \alpha \beta \rho_2^2 \int_a^b y_n^2(x) dx}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ olarak elde edilir.

SONUÇ

(26), (27), (28) olarak verilen birleşik elemanlarda sıcaklık dağılımı problemi bu çalışma ile değişkenlerine ayrılarak incelenmiştir.

Spektral analizi yapılan problemde özdeğerlerin reel oluşu, özfonsiyonların ortogonallığı, özdeğerleri, katılılığı gibi önemli spektr Özellikler incelendikten sonra özdeğerlerin sayısının sonsuz tane olduğu ifade ve ispat edilmiştir. Köklerin asumtotikliği problemi bu çalışmada ele alınmamıştır. Söz konusu problem halen Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı bünyesinde verilen bir doktora çalışması ile incelenmektedir. Önemli olan iki çalışmanın birleştirilip (Bulvain, 1968)'in genel halinin çözümünü elde etmektedir.

Bu çalışmanın orjinalliği (Özışık, 1980)'de belirtilmektedir. Söz konusu literatürde çok katlı birleşik elemanlar için bazı temel formüller verilmiş fakat spektral analiz yapılmamıştır. Bu çalışmada problemin bütün spektr Özellikleri analiz edilmiş özdeğerler ve özfonsiyonlar incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Atkinson, F.V. 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, New York.
- Bellman, R.E. 1953. Stability Theory of Differential Equations McGraw-Hill, New York.
- Bulvain, P.E. Kascheev V.M. 1968." Solution of The Nonhomogeneous Heat Conduction Equation for Multilayered Bodies. Int Chem Engng Vol. 5 pp. 112-115.
- Churchill, R.V. 1972. Operational Mathematics McGraw-Hill Kogakusha Ltd Tokyo.
- Gusseinov G., Oturanç G. "On The Theory of A Certain Class of Quadratic Pencils of Matrices and Its Applications". Turkish Journal of Mathematics (To appear).
- Mulholland, G.P. 1972. Cobblem H. Diffusion Through Composite Media. Int J Heat Mass Transfer, Vol. 15, No 1, pp. 147-160.
- Oturanç, G. 1995. "Diferansiyel Operatörlerin Spektral Teorisi ile Bileşik Elemanlarda Sıcaklık Dağılımının İncelenmesi Üzerine" Türk Matematik Derneği VIII. Ulusal Matematik Sempozyumu.
- Özışık, N. 1980. Heat Conduction, John Wiley & Sons, 2nd.
- Title, C.W. 1965. Boundary Value Problems in composite Media, J Appl Phys, Vol. 36, pp. 1586-1488.
- Vodicka, V. 1955. Eindim Ensionale Warmeleitung in Geschichteten Körpern. Math Nachr Bd 14, s. 47-55.