T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AÇILARI VE KENARLARI ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HARMONİK DİZİ OLUŞTURAN ÜÇGENLER İLE $x^2+3y^2=z^2$ DİOPHANTİNE DENKLEMİ ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Tayfun EŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
KONYA – 2010

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AÇILARI VE KENARLARI ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HARMONİK DİZİ OLUŞTURAN ÜÇGENLER İLE $x^2 + 3y^2 = z^2$ DİOPHANTİNE DENKLEMİ ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Tayfun EŞEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

Bu tez 26.03.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
(DANIŞMAN)

Doç. Dr. Süleyman SOLAK
(JÜRİ)

Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN
(JÜRİ)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AÇILARI VE KENARLARI ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HARMONİK DİZİ OLUŞTURAN ÜÇGENLER İLE $x^2+3y^2=z^2$ DİOPHANTİNE DENKLEMİ ARASINDAKİ İLİŞKİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Tayfun EŞEN

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İlköğretim Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

2010, *vi* + 45 sayfa

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Bu çalışmada; ilk olarak aritmetik üçgenler tanıtıldı ve aritmetik üçgenlerden Pythagorean üçgenlerinin nasıl elde edileceği verildi. Sonra bir üçgenin kenarlarının nasıl aritmetik dizi olduğu ve hangi durumda harmonik ve geometrik dizi olacağı araştırıldı. Kenarları tamsayı olan üçgenler ile $x^2+3y^2=z^2$ Diophantine denkleminin çözümleri arasındaki ilişki araştırıldı. Bu çözümlerden, kenarları tamsayı olan üçgenlerin üretilebileceği gösterildi. Son olarak genel aritmetik üçgenler ile Bhaskara Denkleminin çözümleri arasındaki ilişkiler ortaya kondu.

Anahtar Kelimeler: Heron Üçgeni, Aritmetik Üçgen, Pythagorean Üçgeni, Pell Denklemi, Bhaskara Denklemi.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A RESEARCH ON THE RELATIONS BETWEEN TRIANGLES WHICH ANGLES AND SIDES IN ARITHMETIC, GEOMETRIC AND HARMONIC PROGRESSION WITH $x^2+3y^2=z^2$ DIOPHANTINE EQUATION

Tayfun EŞEN

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Primary Education

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

2010, *vi* + 45 Pages

Jury: Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

Doç. Dr. Süleyman SOLAK

Asist. Prof.Doç. Dr. Saadet ARSLAN

By this study, firstly, we described the basic knowledge of aritmetic triangles and we gave information about how Pythagorean triangles are gained from arithmetic triangles. Then how to be a triangle sides an aritmetic progression and the case of triangle sides in geometric and harmonic progression are searched. And then the relations between triangles with integer sides and solution of diophantine equation $x^2+3y^2=z^2$ has been described. Utilization of these studies, how to triangles with integer sides being derived has been proved. Lastly the relations between general arithmetic triangles and the solution of Bhaskara Equation has been presented.

Key Words: Heronion Triangle, Arithmetic Triangle, Pythagorean Triangle, Pell Equation, Bhaskara Equation.

ÖNSÖZ

Matematiğin gelişmesinin büyüleyici yönlerinden birisi de, geometri ile sayılar teorisi arasındaki karşılıklı etkilenmedir. Üçgenlerin geometride önemli bir yer teşkil ettiği herkesçe bilinir. Heron üçgenlerinin özel bir durumu olan aritmetik üçgenler üzerinde yapılan çalışmalar ise sayılar teorisi ile geometri arasında güzel bir ilişki ortaya çıkarmıştır.

Pythagorean, Heron, Brahmagupta, Bhaskara, Hoppe, Aubry ve Rath gibi birçok ünlü matematikçi sayılar teorisinin cazibesine kapılmışlar ve Diophantine denklemlerinin çözümlerine bağlı olarak, bu özel üçgenlerin üretilmesi üzerinde birçok araştırmalar yapmışlardır.

Sayılar teorisinde Pell denklemleri ve genel Pell denklemleri olan Bhaskara denklemlerinin tam sayı çözümleri üzerinde birçok çalışma mevcuttur. Örneğin, yedinci yüzyılda Brahmagupta, on ikinci yüzyılda Bhaskara, on dokuzuncu yüzyılda Hoppe, Pell ve Bhaskara denklemlerinin çözümleri ile aritmetik üçgenler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmışlardır. Günümüzde ise Beauregard, Suryanarayan, başta olmak üzere; Sastry, Fasler gibi birçok matematikçinin Diophantine denklemlerinin çözümleri ile geometri arasındaki ilişkiler üzerindeki çalışmaları halen devam etmektedir.

Bu çalışma; Konstantine Zelator'un "Triangle Angles and Sides in Progression and the Diophantine Equation $x^2+3y^2=z^2$" başlıklı çalışması üzerine kuruldu. Burada kenarları aritmetik dizi, geometrik dizi ve harmonik dizi olan üçgenlerin bulunup bulunmadığı araştırıldı. Kenarları tamsayı olan üçgenler ile $x^2+3y^2=z^2$ Diophantine denkleminin çözümleri arasındaki ilişki verildi. Bu çözümlerden, kenarları tamsayı olan üçgenlerin üretilebileceği gösterildi. Son olarak genel aritmetik üçgenler ile Bhaskara Denkleminin çözümleri arasındaki ilişkiler ortaya konuldu.

"Açıları ve kenarları aritmetik, geometrik ve harmonik dizi oluşturan üçgenler ile $x^2+3y^2=z^2$ Diophantine denklemi arasındaki ilişki üzerine bir araştırma" adlı tez konusunun tespitinde ve tezin hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bana her zaman destek olan eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Tayfun EŞEN

Mart – 2010

SEMBOLLER

$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	:	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel Sayılar Kümesi
$b \mid a$	:	*b* böler *a*
$m(B\hat{A}C)$	:	Üçgendeki A açısının ölçüsü
|AB|	:	AB doğru parçasının uzunluğu
(*a*)	:	Açıları aritmetik dizi olan üçgen
(*s*)	:	Kenarları aritmetik dizi olan üçgen
s	:	Üçgenin Çevre Uzunluğunun Yarısı
$\lvert a \rvert$	:	*a* nın mutlak değeri
$a \equiv b \pmod{m}$	:	*a*, *b* ye m modülüne göre kongrüenttir
$A(ABC)$	:	ABC üçgeninin alanı
r	:	Üçgenin iç teğet çemberinin yarı çapı
$\in$	:	Elemanıdır Sembolü
$\lVert x \rVert$	:	*x* in tam değeri

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Geometride üçgenler özel öneme haizdir. Üçgenlerden de dik üçgenler daha ayrıcalıklıdır. Dik üçgenlerin, β pozitif bir reel sayı olmak üzere kenar uzunlukları $\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$, β ve $\gamma = \frac{2\beta}{\sqrt{3}}$ şeklindeki özel hali iyi bilinir. Tüm bu üçgenler, açıları $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 90^\circ$ olan benzer üçgenlerin bir sınıfını oluştururlar. Burada üçgenin A, B, C açıları arasındaki fark; $\varphi = 30^o$ olacak şekilde bir aritmetik dizi oluşturdukları açıktır. Diğer çok bilinen bir benzer üçgen sınıfı ise δ pozitif bir reel sayı olmak üzere, kenarları $\alpha = 3\delta$, $\beta = 4\delta$, $\gamma = 5\delta$ biçiminde verilen üçgenlerin sınıfıdır. Bunların hepsi dik üçgen olmakla birlikte, onların göze çarpan diğer bir özelliği de; α, β, γ kenar uzunluklarının (sırasıyla), $d = \delta$ farkı olacak şekilde aritmetik bir dizi oluşturmasıdır.

Şimdi de bu çalışmanın yapısından bahsedelim. Bölüm 1 de, konumuza ilişkin çalışmaların bir kısmının özetleri ile gerekli tanım ve teoremler verildi. Bölüm 2 de, kenarları aritmetik dizi olan Heron üçgenlerden yola çıkıp $x^2 + 3y^2 = z^2$ Diophantine denklemine ulaşıldı. Ayrıca bilinen örnekler dışındaki diğer aritmetik dizilerden de bahsedildi. En son Heron üçgenini iki dik üçgene ayırdığımızda oluşan üçgenlerin de Heron üçgeni olduğu görüldü. Bölüm 3 te, kenarları ve açıları aritmetik dizi olan üçgenlere ilişkin birkaç sonuç ortaya koyuldu. Açıları aritmetik dizi olan üçgenler incelendi; bunu yaparken de, $x^2 + 3y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tam sayılardaki parametrik çözümlerinin belirli bir alt kümesi kullanıldı. Bölüm 4 te, genel aritmetik üçgenler ve Bhaskara denkleminin genelleştirilmiş aritmetik üçgenler ile arasındaki ilişkisi ortaya konularak çalışmamız bitirildi.

1.1. Kaynak Araştırması

Bu kesimde konumuza ilişkin, geçmişten günümüze yapılmış olan çalışmaların bir kısmının özetleri verilmiştir.

Matematiğin gelişmesinin büyüleyici yönlerinden birisi de geometri ile sayılar teorisi arasındaki karşılıklı etkilenmedir. Bunun görüldüğü durumlardan birisi aritmetik üçgenlerdir. Bu üçgenlerde; alan tamsayıdır ve kenarları da $x - d, x, x + d$ biçimindeki tamsayılardır. En küçük örnek (3, 4, 5) üçgenidir (Aritmetik ve dik tek primitif üçgen). Heron'a atfedilen ikinci örnek, (13, 14, 15) üçgenidir ki alanı 84 dür.

Sierpinski (1962), bu eserinde tamsayı kenarlı üçgenlerin özel çeşidi olan Pythagorean üçgenlerini alan, kenar, çevre v.b. yönüyle incelemiştir. Ayrıca bu; Pythagorean üçgenleri ile ilgili olarak müstakil yazılmış ilk eserdir.

Mordell (1969), bu eserinde Diophantine denklemlerinden bahsetmiştir. Bu çalışma Diophantine denklemleri üzerine yazılmış en kapsamlı ve temel eserlerden biridir. Bu eserde bir sayının karesi ile başka bir sayının karesinin üç katının toplamının bir kareye eşit olması durumu da dahil olmak üzere Diophantine denklemleri ve çözümlerine ilişkin ayrıntılı bilgiler verilmiştir.

Gilder (1982), bir açısı 60^0 olan tam sayı kenarlı üçgenlerin kenarlarının iki parametreye bağlı olarak üretilmesini gösteren formüller verilmiştir.

Sierpinski (1988), eserinde, Diophantine denklemlerinin analizini ele almış; gerek Pythagorean üçgenleri, gerekse diğer tür diophantine denklemleri geniş bir şekilde incelemiştir.

Dunham (1990), eserinde üçgenlerin alanları için Heron alan formülünü kullanmış ve matematiğin ünlü teoremleri üzerinde durmuştur.

Dickson (1971), bu eserde; eserin basım yılına kadar olan sayılar teorisi ile ilgili gelişmeler, açık problemler ve çalışmaları özetlemiştir. Ayrıca Pythagorean üçgenleri ile rasyonel dik üçgenler için genel bilgilere ve Diophantine denklemlerine de yer vermiştir.

Rosen (1993), eserinde Pythagorean üçgenleri üzerinde durmuştur. Bu çalışmadaki bir teoremde, verilen bir denklemin n. kökünün bir tamsayı ya da farklı olarak bir irrasyonel sayı olabileceğinden bahsetmiştir. Ayrıca aritmetik ve geometrik dizi üzerinde durmuştur.

Guy (1994), bu eserde sayılar teorisinin, geçmişten eserin basıldığı 1994 yılına kadar çözülememiş problemler ile bu problemlerle ilgili yayınları ve özetlerini vermiştir. Bu literatürün Diophantine Equations isimli bölümünde Heron üçgenleri ile ilgili çözülememiş problemlere yer vermiştir.

Beauregard ve Suryanarayan (1997), tüm aritmetik üçgenlerin $x^2 - 3y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin çözümlerinden nasıl üretildiğini gösterdiler. Brahmagupta ilk olarak yedinci yüzyılda, tamsayı alanlı ve ardışık kenarlı üçgenler ile $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denklemini çalışmış ve ikisini ilişkilendirmiştir. On ikinci yüzyılda Bhaskara, Pell denkleminin tam çözümünü vermiştir. $x^2 - Dy^2 = e$ Bhaskara denkleminin tarihte birçok önemli uygulaması mevcuttur (Nagell, 1951; Adler,1995)**.** İkinci yüzyılın başlarında (e = 1 ile), $\sqrt{D}$ nin yaklaşık değerini bulma problemi ile ilgilenildiği görülmektedir. $\sqrt{D}$ nin sürekli kesir açılımıyla ilişkisi, ilk olarak 1768 de Lagrange tarafından ortaya konulmuştur. Bhaskara denkleminin diğer uygulamaları; $D = 2$, $e = 1$ alınmasıyla Pell dizisinin üretilmesi, $D = 3$ olduğunda aritmetik üçgenler elde edilmiştir. Şimdiye kadar, $D > 3$ olduğu duruma ilişkin Bhaskara denkleminin hiçbir geometrik uygulaması bulunamamıştır. On dokuzuncu yüzyılda R.Huppe, aritmetik üçgenler ile $D=3$ için Bhaskara denklemini ilişkilendirmiştir.

Buchholz ve MacDougall (1999), kenarları geometrik ve aritmetik dizi biçiminde olan rasyonel alanlı üçgenler ve kirişler dörtgenleri üzerinde çalışmıştır. Kenarları aritmetik olan üçgenlerin sonsuz bir ailesi için tam bir karakterizasyon verilmiştir ve ayrıca geometrik diziden oluşan kenarlara sahip hiçbir üçgenin olamayacağı gösterilmiştir. Bu eserde, bu tür Heron üçgenlerini bulmak için $x^2 - 3y^2 = z^2$ Diophantine denklemi kullanılmıştır. Ayrıca, kenarları aritmetik veya geometrik diziden alınan bir kirişler dörtgeninin bulunamayacağı gösterilmiştir. Her iki tür dörtgenin varlığının araştırılmasında da eliptik eğriler kullanılmıştır.

MacDougall (2003), burada üçgenin kenar uzunluklarını içeren sayılar arasındaki ilginç ilişkileri incelemiş ve bu tür üçgenleri örneklendirmiştir. Bu çalışmada amaç; bu ilişkilerin neden incelendiğini açıklamak ve bu duruma cevap veren uygun her üçgenin (sonsuz sayıda ailesi olan) nasıl bulunduğunu göstermektir. Ayrıca farklı metotlar kullanarak, aritmetik dizi uzunluğuna sahip Heron üçgenlerinin çok sayıdaki genel problemini de tartışmaktır.

Sastry (2000), bu çalışmada Pythagorean üçgenlerinden faydalanarak Heron üçgenlerinden bahsetmiştir. Ayrıca, Heron dörtgenlerinin yeni bir ailesi, Heron açıları yoluyla tanımlanmaya çalışmıştır.

Zelator (2005), dik üçgende Pythagorean teoremi üzerinde durmuştur. Ayrıca $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ Diophantine denklemlerinin pozitif tam sayı çözümlerinden yola çıkarak $x^2 + 3y^2 = z^2$ Diophantine denklemi için genel çözümlerden bahsetmiştir.

Zelator (2006), herkesçe bilinen Pythagorean teoreminden yola çıkarak $x^2 + ky^2 = z^2$ Diophantine denklemlerinin genel çözümlerine ulaşmış ve tam sayı kenarlı üçgenler üzerinde durmuştur. Sayılar teorisinin belli başlı konularını farklı durumlar halinde listeleyerek açıklama yapmıştır. Ayrıca tam sayı kenarlı ve açılı üçgenlerin genel çözümleri üzerinde de durup araştırma konumuza geniş yer vermiştir.

Zelator (2008), aritmetik dizi, geometrik dizi ve harmonik dizi tanımlarını vermiş, kenar ve açıları bu dizilere uyan üçgenleri incelemiştir. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde Kosinüs Teoremi ve üçgen eşitsizliğinden faydalanarak Pythagorean üçgenleri ile bağlantı kurmuş ve bazı özel üçgenler tanımlamıştır. Ayrıca pozitif tam sayılarda $x^2 + 3y^2 = z^2$ Diophantine denklemlerinin çözümlerine yer vererek bunların çözümlerinden aritmetik üçgenleri üretmiştir.

1.2 Ön Bilgiler

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.2.1 *a, b* tam sayılar olmak üzere $a = b.c$ olacak şekilde bir c tam sayısı varsa *b, a* yı *böler* denir ve $b|a$ biçiminde gösterilir (Şenay, 2007).

Tanım 1.2.2 Pozitif bir p tamsayısına, eğer;

i) $p > 1$,

ii) p kendisinden ve 1 den başka bir bölene sahip değilse;

asaldır denir (Şenay, 2007).

Tanım 1.2.3 Eğer p asal sayı iken, $p+2$ de asalsa bu iki asala *ikiz asal* (Twin Prime) denir (Şenay, 2007).

Tanım 1.2.4 $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun.

i) $d \mid a$ ve $d \mid b$ ise d ye a ile b nin bir *ortak böleni* denir.

ii) *d*, *a* ile *b* nin bir ortak böleni olsun. Eğer *a* ile *b* nin her *c* ortak böleni için $c|d$ ise, *d* ortak bölenine, *a ile b nin en büyük ortak böleni* denir ve ebob (*a, b*) veya (*a, b*) ile gösterilir (Şenay, 2007).

Tanım 1.2.5 Sabit ve sıfırdan farklı bir *m* tamsayısı, *a* ve *b* gibi herhangi iki tamsayısının $a - b$ farkını bölüyorsa (yani $m|a-b$ ise); *a, b* ye *m* modülüne göre *kongrüenttir* denir ve $a \equiv b$ (mod m) biçimde gösterilir (Şenay, 2007).

Tanım 1.2.6 Bütün kenar uzunlukları ve açıları eşit olan üçgenlere *eşkenar üçgen* denir (Şahin ve Arkadaşları,1997).

Tanım 1.2.7 Kenar uzunlukları *a, b, c* tam sayıları ve alanı da tamsayı olan *ABC* üçgenine *Heron üçgeni,* (*a, b, c)* üçlüsüne de *Heron üçlüsü* denir (Sastry, 2000).

Tanım 1.2.8 Bir *ABC* üçgeninde $0 < \theta < \pi$ olmak üzere θ açısının hem sinüsü hem de kosinüsü rasyonel sayı ise bu θ açısına *Heron açısı* denir (Sastry, 2000).

Teorem 1.2.1 (Heron Formülü) Kenar uzunlukları *a, b, c* ve yarı çevre uzunluğu da $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ olan bir *ABC* üçgenin alanı *A*(*ABC*) ile gösterilir ve

$$A(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

formülü ile hesaplanır. Bu formül Yunan matematikçi Heron tarafından bulunduğu için *Heron alan formülü* olarak bilinir (Dickson, 1971).

Tanım 1.2.9 Fermat'ın son teoremi olarak bilinen "$n \geq 3$ ve *n* tamsayı olmak üzere $a^n + b^n = c^n$ denklemini sağlayan hiçbir (*a, b, c*) tamsayı üçlüsü yoktur" biçimindeki ifadenin $n=2$ için özel hali olan

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1.1)$$

ifadesine *Pythagorean denklemi* adı verilir. Pythagorean üçgenleri üzerindeki çalışmalar (1.1) denkleminin tamsayı çözümlerinin bulunmasına eşdeğerdir. $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlayan *a* ve *b* kenarlı, *c* hipotenüslü dik üçgene *Pythagorean üçgeni* denir. $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlayan *a, b* ve *c* doğal sayılarının oluşturduğu (*a, b, c*) üçlüsüne *Pythagorean üçlüsü* denir.

Eğer bu üçgenin *a, b* dik kenarları $a > b > 0,\ a + b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ ve *a* ile *b* aralarında asal olma şartlarını sağlıyorsa, üçgene *Primitif Pythagorean Üçgeni*, (*a, b, c*) üçlüsüne *Primitif Pythagorean Üçlüsü* denir.

Pythagorean üçgeninin bütün kenarları bir doğal sayı ile çarpılırsa, o zaman yine kenarları doğal sayı olan benzer bir dik üçgen elde edilir ki bu üçgende Pythagorean üçgenidir. Bundan dolayı *k=1,2,...* olmak üzere verilen bir (*a, b, c*) Pythagorean üçgeninden sonsuz çoklukta benzer (*ka, kb, kc*) Pythagorean üçgeni elde edilir (Sierpinski, 1988).

Teorem 1.2.2 *m* ile *n* aralarında asal, *m*>*n* ve *m* ile *n* tamsayıları biri tek iken diğeri çift olmak üzere, *b* si çift olan tüm primitif (*a, b, c*) Pythagorean üçgenleri

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn \;\; c = m^2 + n^2$$

formüllerinden elde edilir ki bu tip (*a, b, c*) primitif Pythagorean üçgeni yalnız bu yolla bulunur (Sierpinski, 1988).

Teorem 1.2.3 *d* kare çarpan ihtiva etmeyen bir tamsayı olmak üzere $x^2 + dy^2 = z^2$ Diophantine denkleminin bütün *x, y, z* tamsayı çözümleri; aralarında asal *m* ile *n* tamsayıları için

$$x = m^2 - dn^2, \quad y = 2mn, \;\; z = m^2 + dn^2$$

formüllerinden elde edilir (Şenay, 2007).

Tanım 1.2.10 Reel sayılardan tamsayılara tanımlanan ($\|\ \|: R \to Z$) ve $n \le x < n+1$ özelliğindeki *x* reel sayılarını $n \in Z$ sayısına eşleyen fonksiyona *tam değer fonksiyonu* denir ve *x* in tam değeri $\|x\|$ ile gösterilir (Şenay, 2007).

Tanım 1.2.11 $n \ge 0$, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ reel sayılar ve a_0 hariç hepsi pozitif olmak üzere

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

ifadesine *sonlu sürekli kesir* denir ve $\left[a_0,a_1,a_2,...,a_n\right]$ biçiminde gösterilir. Burada $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ ler kısmi bölümler veya kısmi paydalardır. Bu gösterimi $n>0$ için

$$\left[a_0,a_1,a_2,...,a_n\right]=a_0+\frac{1}{\left[a_1,a_2,...,a_n\right]}$$

şeklinde yazabiliriz. Daha genel olarak;

$$\left[a_0,a_1,a_2,...,a_n\right]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}$$

biçiminde gösterilir. Burada a_0 sayısının pozitif ya da negatif bir reel sayı veya sıfır olabileceğine dikkat edilmelidir. Ayrıca $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ lerin hepsi tamsayı ise sürekli kesre *sonlu basit kesir* denir (Rosen, 1993).

Tanım 1.2.12 Eğer a_0 tamsayısı hariç $a_1,a_2,...,a_n$ ler pozitif tamsayılar ise, o zaman $0\le k\le n$ için $\left[a_0;a_1,a_2,...,a_k\right]$ sürekli kesrine $\left[a_0;a_1,a_2,...,a_n\right]$ sürekli kesrinin *k. yakınsayanı* denir ve C_k ile gösterilir. $C_k=\left[a_0;a_1,a_2,...,a_k\right]$ dır (Rosen, 1993).

Teorem 1.2.4 a_0 tamsayısı hariç, $a_1,a_2,...,a_n$ tamsayılarının tümü pozitif olmak üzere $A=\left[a_0;a_1,a_2,...,a_n\right]$ sonlu basit sürekli kesri verildiğinde $k\ge 0$ için $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ dizileri,

$$\begin{array}{lll} p_{-2}=0, & p_{-1}=1 & p_k=a_k p_{k-1}+p_{k-2} \\ q_{-2}=1, & q_{-1}=0, & q_k=a_k q_{k-1}+q_{k-2} \end{array}$$

biçiminde verilir (Rosen, 1993).

Tanım 1.2.13 a_0 tamsayısı hariç, hepsi pozitif tamsayılar olan bir $a_1,a_2,a_3...$ tam sayı dizisi, $C_k=\left[a_0;a_1,a_2,...,a_k\right]$ olmak üzere

$$\left[a_0,a_1,a_2,...\right]=\lim_{k\to\infty}C_k$$

olan kesirlere *sonsuz sürekli kesir* denir (Rosen, 1993).

Tanım 1.2.14 $[a_0;a_1,a_2,...]$ sonsuz basit sürekli kesrine, yeterince büyük *r* tam sayısı için $a_r = a_{n+r}$ olacak şekilde bir *n* pozitif tamsayısı varsa *periyodiktir* denir. $t > 0, m \geq 0$ olmak üzere;

$$[b_0;b_1,b_2,...,b_m,a_0,a_1,a_2,...,a_{\tau-1},a_0,a_1,a_2,...,a_{\tau-1},...]$$

periyodik kesri $\left[b_0;b_1,b_2,...,b_m,\overline{a_0,a_1,a_2,...,a_{\tau-1}}\right]$ şeklinde gösterilir. $a_0,a_1,a_2,...,a_{\tau-1}$ e bir *periyot* denir. Burada *t* ye sürekli kesrin *periyot uzunluğu* denir (Rosen, 1993).

Teorem 1.2.5 $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı ve $a_0,a_1,a_2,...$ dizisi ardışık olarak *k=0,1,2,...* için

$$a_k = \|\alpha_k\|, \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman α, $[a_0;a_1,a_2,...]$ sonsuz basit sürekli kesrinin değeridir (Rosen, 1993).

Tanım 1.2.15 *x, y, D* tamsayılar ve *D* de bir pozitif tamsayının karesinden farklı olmak üzere

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{1.2}$$

denklemine *Pell denklemi* denir. (1.2) denklemi *D* parametresine bağlı olduğundan bu denklem parametreye bağlı bir denklem ailesidir. Yine (1.2) denkleminde *x* ve *y* nin her ikisinin de negatif olmadığının kabul edilmesi genelliği bozmaz. Herhangi bir *D* parametresi için (1.2) denkleminin $x = \pm 1$, $y = 0$ ın bir çözüm olduğu kolayca görülür ki bu çözüme *bilinen (trivial) çözüm* denir. Ayrıca eğer *D*, *a* gibi bir tamsayının karesi ($D = a^2$) ise o zaman

$$1 = x^2 - Dy^2 = x^2 - a^2y^2 = (x - ay)(x + ay)$$

olması için gerek ve yeter şart $x - ay = \pm 1, x + ay = \pm 1$ olmasıdır. Bu ise $x = \pm 1, y = 0$ olması demektir. Yani $D = a^2$ olması durumunda trivial çözüm tek çözüm olur. O halde bundan sonra (1.2) denkleminde *D* yi pozitif ve bir tamsayının karesinden farklı olarak kabul edeceğiz. Şüphesiz Pell denkleminin (1,0) dan farklı bir çözümünün bulunması konunun en zor kısmını teşkil eder. $x^2 - Dy^2 = -1$ denklemine ise (1.2) denkleminin ilgisi veya *negatif Pell denklemi* denir (Robbins, 1993).

Teorem 1.2.6 *D* tam kare olmayan pozitif bir tam sayı ve $\frac{p_k}{q_k}, \sqrt{D}$ nin sürekli kesir açılımında *k.* yakınsayan olsun. *t,* bu sürekli kesrin periyodunun uzunluğu olmak üzere, (1.2) denkleminin sonsuz sayıdaki bütün çözümleri,

i) Eğer *t* çift ise *n* = 0,1,2,… için $x_n = p_{nt-1},\ y_n = q_{nt-1}$

ii) Eğer *t* tek ise *n* = 0,1,2,… için $x_n = p_{2nt-1},\ y_n = q_{2nt-1}$

olur (Robbins, 1993).

Teorem 1.2.7 *D* tam kare olmayan pozitif bir tam sayı ve $\frac{p_k}{q_k}, \sqrt{D}$ nin sürekli kesir açılımında *k.* yakınsayan olsun. *t,* bu sürekli kesrin periyot uzunluğu olmak üzere, eğer t çift ise, o zaman $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin çözümü yoktur. Eğer t tek ise o zaman $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin sonsuz sayı çözümü vardır ve bu çözümler *n* = 1,3,5, … için $x_n = p_{nt-1}, y_n = q_{nt-1}$ biçiminde verilir (Robbins, 1993).

Tanım 1.2.16 *D* tam kare olmayan pozitif bir sayı, *t* de $\sqrt{D}$ nin sürekli kesir açılımında periyot uzunluğu olarak verilsin. O zaman $x_1 = p_{t-1}, y_1 = q_{t-1}$ ifadeleri (1.2) *Pell denkleminin minimal çözümü* olarak isimlendirilir (Robbins, 1993).

Teorem 1.2.8 Eğer *D* tam kare olmayan pozitif bir tam sayı ve (1.2) Pell denkleminin bir minimal çözümü $x = x_1$ ve $y = y_1$ ise

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$$

denkleminin bütün trivial olmayan çözümleri $x = x_n$ ve $y = y_n$ biçiminde verilir (Robbins, 1993).

Tanım 1.2.17 *D* tam kare olmayan pozitif bir tam sayı ve $e \neq 0$ olmak üzere, $x^2 - Dy^2 = e$ denklemine *genelleştirilmiş Pell denklemi* denir. Hintli matematikçi Bhaskara'nın bu denklem üzerindeki çalışmalarından dolayı *Bhaskara denklemi* olarak da isimlendirilir (Robbins, 1993).

Tanım 1.2.18 α_1, α_2, α_3 üç reel sayı olmak üzere bu dizinin, bir aritmetik dizi oluşturması için gerek ve yeter şart $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$; geometrik dizi oluşturması için gerek ve yeter şart $\alpha_2^2 = \alpha_1\alpha_3$; harmonik bir dizi oluşturması için gerek ve yeter şart ise $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}$ dizisinin bir aritmetik dizi oluşturmasıdır (Zelator, 2008).

Tanım 1.2.19 Eğer, elemanları tamsayılardan oluşan bir aritmetik diziden bir Heron üçgeninin kenar uzunlukları alınıyor ve alanı da tamsayı oluyorsa bu üçgenlere *aritmetik üçgenler* denir.

c ve *d* uygun tamsayılar olmak üzere bir üçgenin kenar uzunlukları *c, c+d, c+2d* ise bu üçgene *d* - *aritmetik üçgen* denir. Sıfırdan farklı bir *d* tamsayısı uygun negatif değer de alabileceğinden, eğer *d* negatif ise o zaman *(-d) aritmetik üçgen olarak* isimlendirilir.

α, x, d tamsayıları için $x, \alpha x - d, \alpha x + d$ kenarlı bir üçgenin alanı da tamsayı oluyorsa bu üçgene α *tipinde d- aritmetik üçgen* denir (Canan,2002).

Teorem 1.2.9 (Sinüs Teoremi). Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c*; iç açıları *A, B, C* ve çevrel çemberinin yarıçapı da *R* ise, o zaman

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = 2R$$

dir (Ayres, 1954).

Teorem 1.2.10 (Kosinüs Teoremi). Bir *ABC* üçgeninin kenar uzunlukları *a, b, c* ve iç açıları da *A, B, C* ise;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA,\ \ b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB,\ \ c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

dir (Ayres, 1954).

Tanım 1.2.20 Bir üçgendeki üç iç açı ya da üçgenin köşe noktaları A, B, C gibi büyük harflerle gösterilir. Sözgelimi bir ABC üçgenindeki A açısı denildiğinde, her zaman o üçgenin A köşesindeki iç açıyı kast edeceğiz ve o anlamda kullanacağız. Başka bir deyişle $m(B\hat{A}C) = m(C\hat{A}B)$ dir.

Doğru parçaları genel olarak [AB] şeklinde gösterilecektir. [AB]; A ve B noktaları ile bu noktaları birleştiren bir doğru parçasını gösterir. Kenar uzunlukları ise küçük harflerle gösterilecektir. Örneğin, bir ABC üçgeninin üç kenar uzunluğunu *α, β, γ* ile gösterirsek;

$$\alpha = |BC| = |CB|,\ \beta = |AC| = |CA|,\ \gamma = |AB| = |BA|$$

dir.

Üçgenler için iyi bilinen durumları şöyle verebiliriz. Bir üçgenin açılarının derece cinsinden ölçümleri A, B, C; kenarlarının uzunlukları da *α, β, γ* ise, o zaman (genelliği bozmaksızın)

$0^{o} < A \leq B \leq C < 180^{o}$, $A + B + C = 180^{o}$

ve (bu sıralamaya uyacak şekilde), $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ dır, ayrıca üçgen eşitsizliklerinden

$\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$ ve $\gamma < \alpha + \beta$

dır (Eğer üç reel sayı, bu üç üçgen eşitsizliğini sağlarsa, o zaman bu reel sayıların hepsinin pozitif olması gerektiğine dikkat ediniz.).

Bir üçgenin açılarına karşılık gelen A, B, C dizisi **(a)** ile kenar uzunluklarına karşılık gelen *α, β, γ* dizisi de **(s)** ile gösterilmek üzere bazı durumları şöyle özetleye biliriz.

(a) dizisi bir aritmetik dizi alındığında üçgenin, 2B = A+C ve A+B+C= 180º bağlantılarını sağlaması için gerek ve yeter şart B = 60º olmasıdır. Kosinüs teoreminden, $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma$ olduğu ortaya çıkar. Hem de, **(a)** dizisi bir aritmetik dizi oluşturduğunda elde edilen dik üçgen bir Pythagorean üçgeni olamaz. Çünkü bu durumda dik üçgenin açıları A= 30º, B = 60º, C = 90º biçiminde aritmetik bir dizi oluşturacağından; bu üçgenin *β* ya bağlı *α, β, γ* kenar uzunlukları $\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}}, \beta$ ve $\gamma = \frac{2\beta}{\sqrt{3}}$ olarak elde edilir. Bununla beraber, bu üç reel sayıdan en çok ikisi pozitif bir tamsayı olabileceğinden, *m* pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\beta = m\sqrt{3}$ olacaktır. Çünkü *β* pozitif bir tam sayı ise o zaman *α* ile *γ* nın her ikisinin de pozitif irrasyonel sayılar olacağı açıktır (Zelator, 2008).

2. KENARLARI ARİTMETİK DİZİ OLAN HERON ÜÇGENLERİ

Bu bölümde kenarları aritmetik dizi olan Heron üçgenlerinden yola çıkarak $x^2+3y^2=z^2$ Diophantine denklemleri ve arasındaki ilişkiler verildi. Ardışık tamsayı kenarlı Heron üçgenlerinin sonsuz sayıda olduğu ve bunların nasıl üretilebileceği gösterildi. Ayrıca, daha genel olarak herhangi bir aritmetik dizi kenarlı Heron üçgenlerini bulma probleminin tam bir çözümü farklı bir metotla verildi. Kenar uzunlukları ardışık tamsayılar olan Heron üçgenlerinin varlığı gösterildi ve onların listesi verilerek özellikleri incelendi (Fleenor, 1987).

2.1. Ardışık Tamsayı Kenarlı Heron Üçgenleri

Bir üçgenin *a, b, c* kenar uzunlukları ve alanı tamsayı ise bu üçgene Heron Üçgeni dendiğini Tanım 1.2.7 den biliyoruz. Ayrıca kenar uzunlukları *a, b, c* ve $s=(a+b+c)/2$ olan bir üçgenin alanını Teorem 1.2.1 den

$$\mathrm{A}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

formülüyle hesaplarız. Bu formül Herondan birkaç yüz yıl önce Archimedes tarafından bulunmuş ancak Heron formülü olarak bilinmektedir.

Bir üçgenin kenar uzunlukları *b–1, b, b+1* olsun. O zaman $s=3b/2$ olur ve bunu Heron formülünde yerine koyarsak;

$$\mathrm{A}=\frac{b\sqrt{3(b^2-4)}}{4}$$

sonucuna ulaşırız. A nın tamsayı olması için $3(b^2-4)$ ifadesi bir kareye eşit olmalıdır. Bunu b nin durumuna göre irdeleyelim. Bu ifadede; eğer *b* tek olsaydı o zaman $3(b^2-4)$ ifadesi tek olurdu ki bu *A* nın tamsayı olamayacağını gösterir. Bundan dolayı *b* çift olacağından $b=2z$ alırsak o zaman alan

$$\mathrm{A}=z\sqrt{3(z^2-1)}$$

olur. Burada alanın tamsayı, yani üçgenin Heron üçgeni olabilmesi için gerek ve yeter şart $3\,(z^2-1)$ ifadesinin bir tam kare olmasıdır. O zaman $z^2-1=3y^2$ olması gerektiğinden

$$z^2-3y^2=1$$

elde edilir. Bu denklem $x^2 - dy^2 = 1$ formunda iyi bilinen Diophantine denklemlerinden biridir. Bu denklemin Pell denklemi olarak isimlendirildiğini Tanım 1.2.15 den biliyoruz. Pell denklemlerinin en küçük çözümlerinin ise sürekli kesirler yardımıyla bulunabileceğini Teorem 1.2.6 dan biliyoruz (Robbins, 1993). Burada $d = 3$ ve $\sqrt{3}$ için sürekli kesir açılımını Tanım 1.2.14 e göre verirsek;

$$\left[1;\overline{1,2}\right] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

olur. Buradan $\sqrt{3}$ için yakınsak dizi

$$\frac{2}{1},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{26}{15},\frac{71}{41},\frac{97}{56},\frac{265}{153}\ldots$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki dizide baştan başlayıp, birer atlayarak (2, 1), (7, 4), (26, 15), (97, 56), ... ikililerini buluruz ki bunların her biri denklemimizin çözümlerine karşılık gelir. Bunlar da *b* nin değerlerini verir. Bu şekilde elde edilen bazı üçgen örnekleri **Tablo 2.1** de verilmiştir.

Bu yakınsak diziler arasındaki çözümlerin sonsuz sayıda olduğunu nasıl bilebiliriz? İlk bulunan çözümden hareketle bütün çözümleri üreten kolay bir yol var. Bunun için $z^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin en küçük çözümünün (z_1, y_1) olduğunu var sayalım. O zaman bütün pozitif çözümler

$$z_n + y_n\sqrt{d} = (\mathrm{z}_1 + y_1\sqrt{d}\ )^{\mathrm{n}}$$

olmak üzere (z_n, y_n) formundadır (Robbins, 1993).

Öte yandan *d* nin birçok küçük değeri için en küçük çözüm kolayca bulunabildiğinden $\sqrt{d}$ nin yakınsamalarını hesaplamamız gereksizdir. *d = 3* olması durumunda $x^2 - 3y^2 = 1$ Pell denkleminin en küçük çözümün (2, 1) olduğu kolayca bulunur. O zaman denklemi sağlayan bütün *z* değerleri, $(2+\sqrt{3}\ )^{\mathrm{n}}$ irrasyonel ifadesinin rasyonel bileşenleri olarak bulunur. Hesaplamalar sonucunda z için *2, 7, 26, 97,* 362, 1351… çözümleri elde edilir. Bu *z* lerden elde edilen *b=2z* kenarlı üçgenlerin küçük bir listesi **Tablo 2.1** ile verilmiştir.

Tablo 2.1. Kenarları Aritmetik Dizi Olan Üçgenler

n	*a*	*b*	*c*	*Alan*
1	3	4	5	6
2	13	14	15	84
3	51	52	53	1170
4	193	194	195	16296
5	723	724	725	226974
6	2701	2702	2703	3161340
7	10083	10084	10085	44031786
8	37633	37634	37635	613283664
9	140451	140452	140453	8541939510
10	524173	524174	524175	118973869476
11	1956243	1956244	1956245	1657092233154
12	7300801	7300802	7300803	23080317394680
13	27246963	27246964	27246965	321467351292366
14	101687053	101687054	101687055	4477462600698440
15	379501251	379501252	379501253	62363009058485800
16	1416317953	1416317954	1416317955	868604664218103000

Bu değerleri ve devamını üretecek bir formül bulabilir miyiz? Bunun için $(2+\sqrt{3}\,)^{\mathrm{n}}$ irrasyonelini Binom teoremiyle açarsak

$$(2+\sqrt{3}\,)^{\mathrm{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^{k}$$

sonucuna ulaşırız. k nın çift kuvvetlerine karşılık gelen terimlerin rasyonel kısımlarından,

$$z_{\mathrm{n}} = \sum_{k=o}^{n/2}\binom{n}{k}3^{k}\,2^{n-2k}$$

elde edilir ki $b = 2z_n$, Heron üçgeninin kenarına karşılık gelir. Bu sonuç, ardışık tamsayı kenarlı Heron üçgenlerin sonsuz bir ailesinin bulunduğunu gösterir ki bunların çok az bir kısmı **Tablo 2.1** de verilmiştir.

Fleenor (1987), **Tablo 2.1** de verilen ardışık üçgenlere karşılık gelen kenarların oranlarının limit olarak $2+\sqrt{3}$ e yaklaştığını göstermiştir. Bu ifadeden z_n için farklı bir gösterim de elde edebiliriz. $(2+\sqrt{3})^n$ in Binom açılımındaki çift terimlerinden z_n,

$$z_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$$

biçiminde de ifade edilebilir. $(2-\sqrt{3})^n = (0,267...)^n$ ifadesinin *n* sonsuza gittiğinde limit değerinin de 0 a yaklaştığını dikkate alırsak;

$$z_n \approx \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

olur. O zaman z_{n+1}/z_n oranının yaklaşık $2+\sqrt{3}$ olacağı açıktır.

2.2 Diğer Aritmetik Dizilere Genişlemeler

Kesim 2.1 de *b – 1, b, b+1* aritmetik dizisinin bir Heron üçgenin kenar uzunlukları olduğunu gösterdik ve diğer aritmetik dizi formunda kenarlı Heron Üçgenlerinin bulunup bulunmadığını sorduk. Yukarıda tanımlanan üçgenlerden herhangi birisinin bütün kenarlarını bir k tam sayısı ile çarparsak, o zaman onlar da aritmetik dizi formunda olur ve alanı da k^2 ile çarpılmış hali olacağından alan da bir tamsayıdır. (15, 20, 25) veya (26, 28, 30) üçgenlerini bunlara örnek olarak verebiliriz. Ancak bu yolla elde edilemeyen aritmetik üçgenler var mıdır?

Önce, *x* tamsayısı $1 \le x \le b$ şartını sağlamak üzere, kenarlar *b – x, b, b+x* olarak alalım. O zaman $s = 3b/2$ yarı çevre ve Heron formülünden alan da

$$A = \frac{b\sqrt{3(b^2-4x^2)}}{4}$$

bulunur. Daha önce açıklandığı üzere *b* çift olmak zorunda olduğundan *b=2z* alırsak, o zaman alanı sadeleştirdiğimizde,

$$A = z\sqrt{3(z^2-x^2)}$$

olur. Tekrar bu üçgenin Heron olması için gerek ve yeter şart $3(z^2-x^2)$ ifadesinin bir tam kare olmasıdır. Burada $z^2 - x^2 = 3y^2$ dersek o zaman denklem

$$x^2 + 3y^2 = z^2$$

biçiminde 2.dereceden homojen Diophantine denklemine dönüşür. Böyle denklemlerin çözülebilir olduğunu, bu çözümlerin Teorem 1.2.3 ile verildiğini belirtelim. Çözümlerin her zaman iki değişkenli parametrik denklemlerin bir kümesi olarak verildiği açıktır. Yukarıdaki denklemlerin bütün çözümleri, λ ile κ tamsayı ve $g = (\lambda^2 - 3\kappa^2,\ 2\lambda\kappa, \lambda^2 + 3\kappa^2)$ olmak üzere;

$$x = \frac{|\lambda^2 - 3\kappa^2|}{g},\ y = \frac{2\lambda\kappa}{g},\ z = \frac{\lambda^2 + 3\kappa^2}{g}$$

biçiminde verilir. Denklem homojen olduğu için, primitif çözümlerin herhangi bir katı da bir çözüm ve λ ile κ da aralarında asal tamsayılar olurlar. Primitif çözümlerin λ ile κ nin farklı değerleri için oluşan üçgenlere karşılık geldiğini söyleyebiliriz ki bunlar **Tablo 2.2** ile verilmiştir.

Tablo 2.2. Kenarları Aritmetik Olan Üçgenin Artan b Değerleri

λ	κ	*x*	*a*	*b*	*c*	λ	κ	*x*	*a*	*b*	*c*
1	1	1	3	4	5	7	3	11	65	76	87
2	1	1	13	14	15	4	3	11	75	86	97
1	2	11	15	26	37	1	4	47	51	98	145
1	3	13	15	28	41	6	7	37	85	122	159
3	5	11	17	28	39	7	5	13	111	124	137
3	4	13	25	38	51	11	1	59	65	124	183
3	7	23	29	52	75	3	8	61	73	134	195
5	3	1	51	52	53	5	4	23	123	146	169
2	3	23	39	62	85	1	7	73	75	148	221
5	2	13	61	74	87	11	3	47	101	148	195
1	5	37	39	76	113	11	3	47	123	170	217
11	6	109	157	266	375	10	3	97	109	206	303
8	9	37	145	182	219	10	9	73	181	254	327
11	12	73	265	338	411	2	5	71	87	158	229

Tablodaki değerler yukarıdaki formüllerden elde edilmiştir. Tabi ki $x = 1$ alırsak Kesim 2.1 deki kenarları $b - 1,\ b,\ b+1$ olan üçgene dönüşür. Ayrıca x değerlerinin hepsi 12 modülüne göre 1 ya da -1 e kongrüent olduğuna dikkat çekilmelidir.

2.3 Bir Heron Üçgeninden İki Dik Heron Üçgeni Oluşturulması

Kesim 2.1 de verilen **Tablo 2.1** deki herhangi bir üçgeni dikkate alalım. Bu üçgenin kenar uzunluğu çift olana, karşı köşeden bir dik indirelim (Üç kenarının ortasındaki kenara). Eğer üçgen dar açılı ise onu iki dik üçgene ayırır. Fleenor, bu şekilde elde edilen dik üçgenlerin her birinin Heron olduğunu ve onların taban kenar uzunluklarının farkının 4 olduğunu göstermiştir (Fleenor, 1987). Bu gerçek kesim 2.1

de incelenen üçgenlerin hepsinde ortaya çıkmıştır ve bunu görmek çok zor değildir. Eğer kenarlar ardışık tamsayılar ise, yüksekliği h olarak aldığımızda, bu yükseklik b tabanını *u* ve *v* uzunluklarına ayırdığını **Şekil 2.1** de görürüz. O zaman Pythagorean teoreminde $b = 2z$ kullanırsak;

$$h^2 + u^2 = 4z^2 - 4z + 1$$
$$h^2 + v^2 = 4z^2 + 4z + 1$$

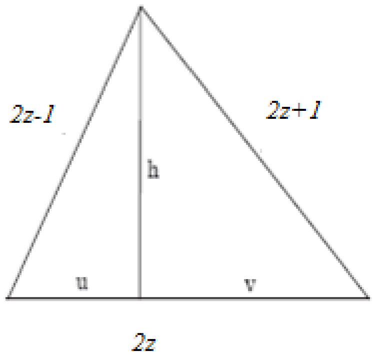
buluruz. Bu ifadelerin ikincisinden birincisini çıkarırsak,

$$(v-u)(v+u) = 8z$$

elde ederiz. Burada $v + u = 2z$ olduğundan $v - u = 4$ sonucuna ulaşırız. O zaman üçgenin *h* yüksekliği

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(2z-1)^2 - (z-2)^2} \\ &= \sqrt{3z^2 - 3} \\ &= \frac{A}{z} \end{aligned}$$

olup bu ifade bir tam sayıdır. Böylece her ikisi de Heron olup, bu üçgenlerin taban uzunlukları *z* – 2 ve *z*+2 dir. Dolayısıyla onların farkı 4 tür.



Şekil 2.1. Bir Heron Üçgeninin İki Dik Üçgene Ayrılması

Kesim 2.2 deki üçgenler için yukarıdakine benzer bir hesaplama ile yükseklik, tabanı *z – 2x* ve z *+2x* uzunluklu parçalara ayırır. O zaman yükseklik önceden olduğu gibi $\sqrt{3z^2 - 3x^2}$ ifadesine dönüşür ki bu durumda da $\frac{A}{z}$ ifadesi tamsayı haline gelir. Böylece kenarları *b – x, b, b + x* aritmetik dizisinden oluşan her bir Heron üçgeni, tabanları farkı *4x* olan iki dik Heron üçgenine dönüşür. Benzer bir hesaplamayla diğer kenarlardan (çift olmayan) herhangi birisinin yüksekliğinden, iki Heron üçgeninin üretilemeyeceği gösterilebilir. Gerçekten herhangi bir Heron üçgeninin en az bir kenarının çift olduğunu ve birbirine dayanan iki dik üçgene ayrılabileceğini gösterebiliriz.

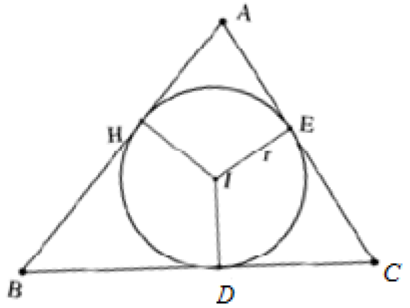
Kesim 2.1 ve 2.2 de çalışılan üçgenler dar açılı olmayabilirdi ki bu durumda yükseklik çift kenarlı tabanının dışına düşer. Bu durumda (gerçekte $b < 4x$ olduğu zaman) yukarıdakine benzer hesaplamayla bir Heron üçgeni, farklı iki dik Heron üçgeninin farkı olduğu gözlemlenebilir. Bu durum daha ayrıntılı olarak 4. bölümde incelenmiştir.

3. ÜÇGENDE AÇILARIN VE KENARLARIN DİZİ OLUŞTURMASI

Bu bölümde bir üçgenin açılarının ya da kenarının dizi oluşturması için trigonometrik durumlarının ne olması gerektiğini vereceğiz. Daha sonra üçgenin geometrik dizili üçgen olup olmadığını konusuna değineceğiz. Bir üçgende **(a)** nın dizi olabilmesi için B açısının 60º olması gerektiğini ve $\rho = \dfrac{2\tau}{\beta}$ nın oranının (2, 3] aralığına düştüğünü göstereceğiz. Özel olarak; $\rho = 1+\sqrt{3}$ için bu üçgen, $A = 30^0$, $B = 60^0$, $C = 90^0$ açılı üçgenlere dönüşür. Öte yandan, $\rho = 3$ için üçgen eşkenardır.

Teorem 3.1. Üçgeninin kenar uzunlukları *α, β, γ*, yarı çevresi *τ* ve üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı *r* ise; $r = \sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$ olarak verilir.

İspat. Bir üçgenin çevresini *2τ* ile yani $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$ ile gösterirsek; yarı çevre $\tau = (\alpha + \beta + \gamma)/2$ olur.



$|AH| = |AE| = x \qquad r = |IE|$

$|BH| = |BD| = y \qquad r = |IH|$

$|DC| = |CE| = z \qquad r = |ID|$

Şekil 3.1. Üçgenin İç Teğet Çemberinin Merkezi

Şekil 3.1. den,

$2x + 2z + 2y = 2\tau$; $x + y + z = \tau$, $x + y = \gamma$, $y + z = \alpha$ ve $x + z = \beta$

olur. Buradan

$$r = y.\tan\left(\frac{B}{2}\right) = z.\tan\left(\frac{C}{2}\right) = x.\tan\left(\frac{A}{2}\right);$$

$$r = (\tau-\alpha)\tan\left(\frac{A}{2}\right) = (\tau-\beta)\tan\left(\frac{B}{2}\right) = (\tau-\gamma)\tan\left(\frac{C}{2}\right) \qquad (3.1)$$

elde edilir.

İki açının toplamının tanjantının;

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1.\tan\theta_2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan;

$$\tan(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=\frac{\tan\frac{A}{2}\ +\ \tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}} \tag{3.2}$$

ve

$$\tan=(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=\tan(90^\circ-\frac{C}{2})=\cot(\frac{C}{2})=\frac{1}{\tan(\frac{C}{2})}$$

olacağından (3.1) ile (3.2) ifadelerinden hareketle,

$$\frac{\frac{r}{\tau-\alpha}+\frac{r}{\tau-\beta}}{1-\frac{r^2}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}}=\frac{\tau-\gamma}{r}$$

$$\Leftrightarrow [r(\tau-\alpha)+r(\tau-\beta)]r=(\tau-\gamma)[(\tau-\alpha)(\tau-\beta)-r^2]$$

$$\Leftrightarrow r^2=\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}$$

veya dengi olan

$$r=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} \tag{3.3}$$

olur ki bu da aranandır. □

Teorem 3.2. Bir üçgende **(s)** dizisinin bir aritmetik dizi oluşturması için gerek ve yeter şart $\cot(A/2),\cot(B/2),\cot(C/2)$ dizisinin de bir aritmetik dizi oluşturmasıdır.

İspat. Tanım 1.2.18 den $2\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow 2\cot\left(\frac{B}{2}\right)=\cot\left(\frac{A}{2}\right)+\cot\left(\frac{C}{2}\right)$

olduğunu göstermeliyiz. (3.1) i kullanarak;

$$2\cot\left(\frac{B}{2}\right)=\cot\left(\frac{A}{2}\right)+\cot\left(\frac{C}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\tan(B/2)}=\frac{1}{\tan(A/2)}+\frac{1}{\tan(C/2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tau-\alpha}{r}+\frac{\tau-\gamma}{r}=\frac{2(\tau-\beta)}{r}\Leftrightarrow \alpha+\gamma=2\beta$$

elde ederiz (Zelator, 2008). ∎

Teorem 3.3. **(s)** dizisinin bir aritmetik dizi oluşturması için gerek ve yeter şart $\tan(\frac{A}{2}).\tan(\frac{C}{2})=\frac{1}{3}$ olmasıdır.

İspat. Tanım 1.2.18 den

$$2\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow \tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (3.1) in ve (3.3) ün kullanılmasıyla;

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{r}{\tau-\alpha}\right).\left(\frac{r}{\tau-\gamma}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{r^2}{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}\right].\frac{1}{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tau-\beta}{\tau}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{2\tau-2\beta}{2\tau}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{(\alpha+\beta+\gamma)-2\beta}{\alpha+\gamma+\beta}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha+\gamma-\beta)=\alpha+\gamma+\beta\Leftrightarrow\alpha+\gamma=2\beta$$

olur ki ispat biter (Zelator, 2008). ∎

Teorem 3.4. Bir üçgenin kenar uzunluklarının kareleri olan α^2, β^2, γ^2 nın bir aritmetik dizi oluşturması için gerek ve yeter şart *cosA, cosB, cosC* dizisinin bir aritmetik dizi oluşturmasıdır.

İspat. Tanım 1.2.18 den,

$$2\cot B=\cot A+\cot C\Leftrightarrow 2\beta^2=\alpha^2+\gamma^2$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$\cot\theta=\frac{\cot^2(\theta/2)-1}{2\cot(\theta/2)}$$

yarım açı formülünü kullanarak başlayalım.

$$2\cot B=\cot A+\cot C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cot^2(B/2)-1}{\cot(B/2)}=\frac{\cot^2(A/2)-1}{2\cot(A/2)}+\frac{\cot^2(C/2)-1}{2\cot(C/2)}$$

$$((3.1)\text{ den}) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{(\tau-\beta)}{r}\right)^2-1}{\left(\frac{(\tau-\beta)}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{(\tau-\alpha)}{r}\right)^2-1}{2\left(\frac{(\tau-\alpha)}{r}\right)} + \frac{\left(\frac{(\tau-\gamma)}{r}\right)^2-1}{2\left(\frac{(\tau-\gamma)}{r}\right)}$$

$(\beta = 2\tau - (\alpha + \gamma))$ nin kullanılması ve eşitliklerin 2τ ile çarpılması sonucunda

$$\Leftrightarrow \quad 2\tau(\tau-\beta) - 2(\tau-\alpha)(\tau-\gamma) = \tau\beta - (\tau-\beta)\beta$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\tau^2 - 2\tau\beta - 2\tau^2 + 2(\alpha+\gamma)\tau - 2\alpha\gamma = \tau\beta - \tau\beta + \beta^2$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta\tau + 2(\alpha+\gamma)\tau - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta\tau + 2(\alpha+\gamma)\tau - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta\tau + 2\tau[2\tau-\beta] - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta\tau + 4\tau^2 - 2\tau\beta - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -4\beta\tau + 4\tau^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta(2\tau) + (2\tau)^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta(\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta\alpha - 2\beta^2 - 2\beta\gamma + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$$

olarak bulunur ki ispat biter (Zelator, 2008). $\square$

Teorem 3.5. Bir üçgenin hem açılarının oluşturduğu **(a)** dizisi hem de kenarlarının oluşturduğu **(s)** dizisinin aritmetik olması için gerek ve yeter şart üçgenin eşkenar olmasıdır. Yani bu aritmetik dizilerde fark sıfırdır.

İspat. $\Leftarrow$: Eğer üçgen eşkenarsa (**a)** nın ve **(s)** nin aritmetik dizi olacağı açıktır. Çünkü bir üçgen eşkenar ise, A = B = C = 60º ve $\alpha = \beta = \gamma$ olur. Buradan açık olarak; **(a)** ile **(s)** dizilerinin her ikisi de farkı sıfıra eşit olan aritmetik dizilerdir.

$\Rightarrow$: Yani, **(a)** ve **(s)** dizilerinin her ikisi de aritmetik dizi ise o zaman üçgen eşkenardır. Gerçekten, Teorem 3.3 den dolayı **(s)** dizisi bir aritmetik dizi olduğunda $\tan(\frac{A}{2}).\tan(\frac{C}{2}) = \frac{1}{3}$ olur.

Öte yandan, **(a)** bir aritmetik dizi de olduğundan, özel olarak B = 60º elde ederiz ve burada A + C = 120º olduğundan C = 120º – A bulunur. Böylece, Teorem 3.3 den

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(60^\circ-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2}\right).\left[\frac{\tan 60^\circ-\tan\left(A/2\right)}{1+\tan 60^\circ\ \tan\left(A/2\right)}\right]=\frac{1}{3}$$

ve $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ olduğundan

$$3\tan^2\left(A/2\right)-2\sqrt{3}\tan\left(A/2\right)+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}\tan\left(A/2\right)-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(A/2\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \ (0^\circ<\frac{A}{2}<90^\circ)\ \frac{A}{2}=30^\circ;\ A=60^\circ$$

ifadelerine ulaşırız ki buradan B = 60º ve C = 60º olur. Böylece A = B = C = 60º olup, üçgen eşkenardır (Zelator, 2008). □

Teorem 3.6. δ bir reel sayı olmak üzere, **(s)** dizileri aritmetik dizi oluşturan dik üçgenler ise, üçgenin kenar uzunlukları $\alpha=3\delta,\ \beta=4\delta,\ \gamma=5\delta$ biçiminde verilirler.

İspat. Böyle bir dik üçgenin α, β, γ kenar uzunlukları iki şartı sağlamalıdır:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma^2=\alpha^2+\beta^2\\ 2\beta=\alpha+\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow 4\gamma^2=4\alpha^2+(\alpha+\gamma)^2\Rightarrow 3\gamma^2-2\alpha\gamma-5\alpha^2=0;$$

$(3\gamma-5\alpha)(\gamma+\alpha)=0$ ve (γ + α > 0 olduğundan)

$$3\gamma-5\alpha=0\ \Rightarrow\ \gamma=\frac{5\alpha}{3}$$

ve *2β = α + γ* dan *β = 4α/3* elde ederiz ve δ pozitif reel sayı olacak şekilde, α = 3δ koyarsak, α = 3δ, β = 4δ, γ = 5δ ya ulaşırız (Zelator, 2008). □

Teorem 3.7. Bir üçgenin α, β, γ kenar uzunlukları dizisinin bir harmonik dizi olması için gerek ve yeter şart $\sin^2(\frac{A}{2}),\sin^2(\frac{B}{2}),\sin^2(\frac{C}{2})$ dizisinin de bir harmonik dizi olmasıdır.

İspat. Harmonik dizi tanımından

$$\frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\Leftrightarrow\frac{2}{\sin^2\left(B/2\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(A/2\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(C/2\right)}$$

olduğunu ispatlamalıyız. Sağ taraftan sol tarafa ulaşalım.

$$\frac{2}{\sin^2\left(B/2\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(A/2\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(C/2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{cosec}^2\left(B/2\right)=\operatorname{cosec}^2\left(A/2\right)+\operatorname{cosec}^2\left(C/2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left[1+\cot^2\left(B/2\right)\right]=1+\cot^2\left(A/2\right)+1+\cot^2\left(C/2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cot^2\left(B/2\right)=\cot^2\left(A/2\right)+\cot^2\left(C/2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\tan^2\left(B/2\right)}=\frac{1}{\tan^2\left(A/2\right)}+\frac{1}{\tan^2\left(C/2\right)}$$

((3.1)' den) $\Leftrightarrow \dfrac{2(\tau-\beta)^2}{r^2}=\dfrac{(\tau-\alpha)^2}{r^2}+\dfrac{(\tau-\gamma)^2}{r^2}$

$$\Leftrightarrow 2\tau^2-2\tau(2\beta)+2\beta^2=\tau^2-2\tau\alpha+\alpha^2+\tau^2-2\tau\gamma+\gamma^2$$

$$\Leftrightarrow 2\tau(\alpha+\gamma-2\beta)=\alpha^2+\gamma^2-2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-2\beta)=\alpha^2+\gamma^2-2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\gamma^2-2\beta^2+2\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\beta=\alpha^2+\gamma^2-2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\gamma=\beta\gamma+\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{2\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{2}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}$$

olur ki bu da aranandır. □

Teorem 3.8. (a) dizisinin aritmetik dizi ve **(s)** dizisinin de geometrik dizi olduğu üçgenler sadece eşkenar olanlardır (Yani farkı sıfır olan aritmetik diziler ve oranı 1 olan geometrik diziler).

İspat. Bir üçgende **(s)** dizisi bir geometrik dizi ve **(a)** bir aritmetik diziyse, o zaman üçgenin eşkenar olması gerektiğini Teorem 3.5 den biliyoruz. Gerçekten eğer durum böyle ise o zaman B=60º ve $\beta^2 = \alpha\gamma$ şartları aynı zamanda sağlanması gerekirdi. Teorem 1.2.9 dan,

$$\frac{\alpha}{\sin A}=\frac{\beta}{\sin 60^\circ}=\frac{\gamma}{\sin C}$$

olur. Böylece,

$$\beta^2 = \alpha\gamma \Rightarrow \beta^2 = \left(\frac{\beta \sin A}{\sin 60^\circ}\right).\left(\frac{\beta \sin C}{\sin 60^\circ}\right)$$

ve $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan $\sin A.\sin C = \frac{3}{4}$ elde edilir.

Öte yandan

$$\cos(A+C) = \cos(180^\circ - B) = cos120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos A \cos C - \sin A \sin C = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos A \cos C - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos A \cos C = \frac{1}{4}$$

olduğundan

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sin A \sin C = \frac{3}{4} \\ \cos A \cos C = \frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sin^2 A \sin^2 C = \frac{9}{16} \\ \cos^2 A \cos^2 C = \frac{1}{16} \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} (1-\cos^2 A)(1-\cos^2 C\ ) = \frac{9}{16} \\ \cos^2 A \cos^2 C = \frac{1}{16} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \cos^2 A + \cos^2 C = \frac{1}{2} \\ \cos^2 A \cos^2 C = \frac{1}{16} \end{matrix}\right\}$$

ifadelerini elde ederiz.

Eğer iki sayının toplamı S ve çarpımı P ise, onların $x^2 - Sx + P = 0$ biçimindeki ikinci dereceden denkleminin iki kökü olması gerektiğini hatırlayalım. Yukarıda verilenlere göre cos^2A ve cos^2C reel sayıları

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{4})^2 = 0$$

ikinci dereceden denkleminin iki kökü olmalıdır. Bu ikinci dereceden denklemin 1/4 biçiminde bir katlı kökü bulunur. Dolayısıyla $\cos^2 A \cos^2 C = \frac{1}{16}$ ve $cos\ A > 0$, $cos\ C > 0$ olduğundan hareketle $\cos A = \frac{1}{2} = \cos C$ elde edilir. Burada A=60º = C olacağından üçgen eşkenardır (Zelator, 2008). ∎

Şimdi de kenarları geometrik dizi oluşturan rasyonel kenarlı ve rasyonel alanlı hiçbir üçgenin bulunmadığını ifade eden teoremi verelim.

Teorem 3.9. Kenarları geometrik dizi oluşturan rasyonel kenarlı ve rasyonel alanlı bir üçgen yoktur.

İspat. Burada, kenar uzunlukları geometrik dizi olan rasyonel alanlı üçgenler göz önüne alınmıştır. Kenarları *a, ar,* ar^2 (burada $a, r \in \mathbb{Q}$ ve $r \neq 0$) alırsak o zaman yarı çevre $s = a(1+r+r^2)/2$ olur. Heron alan formülünü kullanırsak;

$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{(1+r+r^2)(-1+r+r^2)(1-r+r^2)(1+r-r^2)}$$

olur ve bu sonuç bir rasyonel sayı olmalıdır, ayrıca burada $y \in \mathbb{Q}$ iken

$$(1+r+r^2)(-1+r+r^2)(1-r+r^2)(1+r-r^2) = y^2$$

olmak zorundadır.

Burada $m,n \in Z$, $(m,n) = 1$ ve $Y \in Z$ iken $r = \frac{m}{n}$ alalım, o zaman tam sayı denklemi

$$Y^2 = (n^2 + mn + m^2)(-n^2 + mn + m^2)(n^2 - mn + m^2)(n^2 + mn - m^2)$$

olur.

Bu denklemin sağındaki 4 terimin ikişer ikişer aralarında asal olduğu kolayca görülür. Bunun anlamı, buradaki her bir terimin kare olması gerektiğidir. Gerçekten de terimlerden ikisinin çarpımının da kare olacağı görülür. Bu yüzden

$$Y'^2 = (n^2 + mn + m^2)(n^2 - mn + m^2) = n^4 + m^2n^2 + m^4$$

denklemini elde ederiz.

Bu denklemin tek çözümü *mn = 0* iken ki çözümdür. Burada $n \neq 0$ olduğundan sadece $m = 0$ yani $r = 0$ olur. Böylece teoremi ispatlamış oluruz (Buchholz & MacDougall, 1998). □

3.1 Açıları Dizi Olan Üçgenler

(a) dizisinin bir aritmetik dizi olması için gerek ve yeter şartın B = 60º olması gerektiği hemen görülür. Bu 2B = A + C ve A + B + C = 180º şartlarından çıkar. Üstelik kosinüs teoreminden;

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos 60^\circ \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma \Leftrightarrow (\alpha+\gamma)^2 = \beta^2 + 3\alpha\gamma$$

elde ederiz.

Şimdi de, iki pozitif β ve τ reel sayıları verildiğinde 0< α ≤ β ≤ γ olacak şekilde B = 60º açılı bir tek üçgen tanımlandığında $\rho = \frac{2\tau}{\beta}$ oranı (2, 3] yarı kapalı aralığına düştüğü görülecektir. Gerçekten $\beta > 0$, $\tau > 0$ ve $2 < \rho \leq 3$ şartlarından, tam olarak(gereklilik ve yeterlilik), B = 60º açılı bir tek üçgen belirlenir. Başka bir deyişle, $\rho = \dfrac{2\tau}{\beta}$ için $2 < \rho \leq 3$ olacak şekilde, iki pozitif β ve τ reel sayıları verildiğinde yukarıdaki koşulları sağlayan Euclides geometrisinde bir tek üçgen oluşturulabilir. Şimdi niçin böyle olduğunu görelim. Eğer α ve γ nın toplamı S ile çarpımları da P ile gösterilirse; yukarıda elde ettiğimiz bağıntıda $(\alpha + \gamma)^2 = \beta^2 + 3\alpha\gamma$ olacağından $S^2 = \beta^2 + 3P \Leftrightarrow P = \dfrac{S^2 - \beta^2}{3}$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Öte yandan α ve γ reel sayıları, $X^2 - SX + P = 0$ ikinci dereceden denkleminin kökleridir. α ve γ reel kökler olduklarından, bu ikinci dereceden denklemin diskriminantı negatif olamaz. Buradan;

$$(-S)^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - 4\left(\frac{S^2 - \beta^2}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 \geq S^2$$

(β ve S nin her ikisi de pozitif olduğu için) $2\beta \geq S$ ve $S = 2\tau - \beta$ olduğundan,

$$2\beta \geq 2\tau - \beta \Leftrightarrow 3\beta \geq 2\tau \Leftrightarrow (\beta > 0 \text{ için}) \ \frac{3\beta}{\beta} \geq \frac{2\tau}{\beta}$$

elde ederiz; buradan da (açık olarak), $2\tau > \beta$; $\dfrac{2\tau}{\beta} > 1$ olur. Böylece $1 < \dfrac{2\tau}{\beta} \leq 3 \Leftrightarrow 1 < \rho \leq 3$ ifadesi bir gerek şart olarak ortaya çıkar.

Öte yandan $X^2 - SX + P = 0$ denklemine geri dönersek ; α ile γ, $\alpha \leq \gamma$ olacak şekilde denklemin kökleri olduğundan (ikinci derece denklem formülünden),

$$\alpha = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}, \ \gamma = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

elde ederiz.

Daha önceden $P = \dfrac{S^2 - \beta^2}{3}$ ve $S = 2\tau - \beta$ olarak verilen ifadeler kullanılırsa;

$$\alpha = \frac{2\tau - \beta - \sqrt{\dfrac{(3\beta - 2\tau)(\beta + 2\tau)}{3}}}{2}, \ \gamma = \frac{2\tau - \beta + \sqrt{\dfrac{(3\beta - 2\tau)(\beta + 2\tau)}{3}}}{2}$$

ifadesini veya denk olan,

$$\alpha = \frac{\beta\left(\frac{2\tau}{\beta}-1\right)-\sqrt{\frac{\beta^2(3-\frac{2\tau}{\beta})(1+\frac{2\tau}{\beta})}{3}}}{2}$$

ve

$$\gamma = \frac{\beta\left(\frac{2\tau}{\beta}-1\right)+\sqrt{\frac{\beta^2(3-\frac{2\tau}{\beta})(1+\frac{2\tau}{\beta})}{3}}}{2}$$

ifadesini elde ederiz ve ayrıca $\rho = \frac{2\tau}{\beta}$ eşitliğini kullanarak,

$$\alpha = \frac{\beta}{2}\left[\rho-1-\sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right],\ \gamma = \frac{\beta}{2}\left[\rho-1+\sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right] \tag{3.4}$$

sonucuna ulaşırız. Fakat ek bir şart olarak; (3.4) den dolayı $\alpha > 0$ olması ($\beta > 0$ olduğundan)

$$\rho-1-\sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}} > 0$$

olmasına denk olduğundan;

$$\Leftrightarrow\ \rho-1 > \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}} \Leftrightarrow (1 < \rho \le 3 \textit{için})\ 3(\rho-1)^2 > (3-\rho)(1+\rho)$$

$$\Leftrightarrow 3\rho^2-6\rho+3 > 3+2\rho-\rho^2 \Leftrightarrow 4\rho^2-8\rho > 0 \Leftrightarrow 4\rho(\rho-2) > 0;$$

sonucunu elde ederiz. Ayrıca $1 < \rho \le 3$ olduğundan hareketle $2 < \rho \le 3$ elde edilir ki bu da aranandır.

Teorem 1.2.9 dan $\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin 60^\circ} = \frac{\gamma}{\sin C} = 2R$ olduğunu hatırlayalım (Burada R, çevrel çemberin yarıçapıdır). Burada $B = 60^\circ$ alırsak, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan hareketle $\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{2\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\gamma}{\sin C}$ ifadesine ulaşırız. Bunu (3.4) ile birleştirirsek,

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho-1-\sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right]$$

ve

$$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho - 1 + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right]$$

sonuçlarına ulaşırız. Ayrıca,

$0 < \alpha \le \beta \le \gamma \Leftrightarrow 0^\circ < A \le B \le C < 180^\circ \Leftrightarrow$ ($A + B + C = 180^o$ olduğundan)

$0 < \sin A \le \sin B \le \sin C \le 1 \Leftrightarrow 0 < \sin A \le \sin 60^\circ \le \sin C \le 1 \Leftrightarrow$

$0 < \sin A \le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \le \sin C \le 1 \Leftrightarrow$

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho - 1 - \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right] \le \frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho - 1 + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right] \le 1$$

olur.

Eğer ilk eşitliğin işareti doğruysa, o zaman ikincisinin ve tersinin de doğru olması gerekir; burada $\rho = 3$ olması durumu tam olarak eşkenar üçgen olması durumuna karşılık gelir (yani, $A = B = C = 60^o$). Üstelik dördüncü eşitsizlikte, aynı işaretli olması durumu tam olarak $\rho = 1 + \sqrt{3}$ için sağlanır ki, bu $A = 30^0$, $B = 60^0$, $C = 90^0$ olması durumuna karşılık gelir. Eğer cebirsel işlemler yapılırsa son eşitsizliğin $\left[\rho - (1+\sqrt{3})\right]^2 \ge 0$ olduğu görülür.

Tersine olarak $2 < \rho \le 3$ olmak üzere (3.4) ün kullanılması ve sinüs teoremiyle birlikte B = 60º olarak belirleyebiliriz.

Son olarak ta $\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$ şeklindeki üç üçgen eşitsizliğinin sağlandığını kolayca gösterebiliriz; üçüncü eşitsizlik, $\gamma \ge \beta \ge \alpha > 0$ dan dolayı hemen görülür; ikincisi ise $\alpha + \gamma = 2\tau - \beta$ dan kolaylıkla bulunur. Gerçekten $\alpha + \gamma > \beta \Leftrightarrow 2\tau - \beta > \beta \Leftrightarrow 2\tau > 2\beta \Leftrightarrow$ ($\beta > 0$ olduğundan) $\dfrac{2\tau}{\beta} > 2$ ifadesinden $\rho > 2$ olur ki bu geçerlidir. Çünkü ρ nun, $2 < \rho \le 3$ şartını sağladığını varsaymıştık.

Şimdi $\alpha + \beta > \gamma$ üçgen eşitsizliğini ispatlayalım. (3.4) den dolayı

$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow$ (β > 0 olduğundan)

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho + 1 - \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right] + 1 > \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho + 1 + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right]$$

(Bu eşitsizliğin her tarafını 4 ile çarparsak)

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(\rho+1)+4-\sqrt{3}(\rho+1) > 2\sqrt{(3-\rho)(1+\rho)}$$

$$\Leftrightarrow 2 > \sqrt{(3-\rho)(1+\rho)} \Leftrightarrow 4 > (3-\rho)(1+\rho)$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho + 1 > 0 \Leftrightarrow (\rho-1)^2 > 0$$

olur ki bu eşitsizlik $\rho \neq 1$ olduğunda doğrudur. Çünkü $2 < \rho \leq 3$ dür.

Buna göre şu sonuçları elde ederiz.

Açıları A, B, C; kenar uzunlukları α, β, γ olan bir üçgende açıların **(a)** dizisinin bir aritmetik dizi oluşturması için gerek ve yeter şart B = 60º olmasıdır.

$\rho = \dfrac{2\tau}{\beta}$ olmak üzere $2 < \rho \leq 3$ olacak şekildeki bir üçgende çevre uzunluğu 2τ dur.

Tersine olarak $2 < \rho \leq 3$ olacak şekilde iki pozitif reel sayı 2τ ve β verildiğinde B = 60º açılı ve B açısını oluşturan kenarları;

$$\alpha = \frac{\beta}{2}\left[\rho - 1 - \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right] \text{ ve } \gamma = \frac{\beta}{2}\left[\rho - 1 + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right]$$

biçiminde olan bir özel üçgen inşa edilebilir. Ayrıca bu üçgende;

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho - 1 - \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right] \text{ ve } \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\rho - 1 + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right]$$

olarak bulunur.

Üçgende $\rho = 1 + \sqrt{3}$ olduğu zaman, açıları A = 30º, B = 60º, C = 90º olan bir dik üçgen bulunur. Öte yandan $\rho = 3$ için üçgen eşkenardır.

3.2 Açıları Aritmetik Dizi Oluşturan Tamsayı Kenarlı Üçgenlerin Tanımlanması ve Belirlenmesi

Açıkça görüleceği gibi, kenar uzunlukları tamsayı olan ve açılarının **(a)** dizisi bir aritmetik dizi oluşturan bütün üçgenleri parametrik olarak tanımlayabilmek için, üç değişkenli $x^2 + 3y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin genel çözümüne ihtiyacımız olacaktır. Burada $x^2 + ny^2 = z^2$ (n verilen pozitif bir tamsayıdır) biçimindeki üç değişkenli Diophantine denkleminin iyi anlaşıldığını ve genel çözümlerinin uzun zamandır bilindiği belirtelim. Fazla ayrıntıya girmeksizin, $x^2 + 3y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin pozitif tamsayılardaki bütün çözümleri; *d, κ, λ* pozitif tamsayılar ve κ ile λ aralarında asal (yani (κ, λ) = 1 için) olmak üzere;

$$x = \frac{d\,|\,3\kappa^2 - \lambda^2\,|}{2}, \qquad y = d\kappa\lambda, \qquad z = \frac{d\,(3\kappa^2 + \lambda^2)}{2} \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlandığını ifade edelim.

Şimdi kenar uzunlukları *α, β, γ* tamsayıları ve **(a)** dizisi bir aritmetik dizi olan bir üçgen düşünelim ki bu durumda B = 60º olması gerekecektir. Bu üçgene Teorem 1.2.10 ile verilen Kosinüs Teoremini uygularsak;

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma \Leftrightarrow \gamma^2 - \alpha\gamma + \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

denklemine ulaşırız. $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ olduğunu dikkate alır ve γ ya göre bu son ikinci dereceden denklemi çözersek;

$$\gamma = \frac{\alpha \pm \sqrt{4\beta^2 - 3\alpha^2}}{2} \tag{3.6}$$

ifadesini elde ederiz.

Burada sayılar teorisinin bilinen bir sonucundan faydalanarak hareket ederiz. Bu sonuca göre; eğer n ve m pozitif tamsayılarsa o zaman $\sqrt[n]{m}$ (m nin n inci dereceden kökü) nin rasyonel olması için gerek ve yeter şart *m* nin *n* inci kuvvetten bir tamsayı; yani bir k pozitif tamsayısı için $m = k^n$ olmasıdır. Bunun anlamı $\sqrt[n]{m} = k$ nın pozitif bir tamsayı olmasıdır. Özel olarak, bir pozitif tamsayının karekökünün rasyonel olması için gerek ve yeter şart bu pozitif tamsayının bir tam kare olmasıdır (yani mükemmel kare) (Nagell,1951). Çünkü yukarıda verilen (3.6) e göre hareket edersek (*β, γ, α* tam sayılar oldukları için) $\sqrt{4\beta^2 - 3\alpha^2}$ karekökünün bir rasyonel sayı olması gerektiği ortaya çıkar.

γ nın bir pozitif tamsayı olması için gerek ve yeter şart bir δ pozitif tamsayısı için $4\beta^2 - 3\alpha^2 = \delta^2; \dfrac{\alpha \pm \delta}{2} > 0$ ve α ve δ tamsayılarının aynı türden (yani her ikisi de tek veya her ikisi de çift) olmasıdır. α ile δ nın her ikisi de pozitif tamsayılar olduklarından, $\dfrac{\alpha + \delta}{2} > 0$ olduğu açıktır.

Bununla beraber $\gamma = \dfrac{\alpha - \delta}{2}$ olması durumu bir çelişkidir. Bu kolayca görülebilir. Burada $\gamma > 0$ olduğundan $\alpha > \delta$ olması gerekir. Ancak bu durum geçerli olduğunda $4\beta^2 - 3\alpha^2 = \delta^2 \Rightarrow 4\beta^2 < 3\alpha^2 + \alpha^2 \Rightarrow 4\beta^2 < 4\alpha^2$ ifadesinden (β ve α nın her ikisi de pozitif oldukları için) $\beta < \alpha$ elde edilir ki bu ise $\alpha \le \beta$ olmasıyla çelişir. Böylece (3.6) ifadesindeki hesaplamadan dolayı;

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{\alpha + \sqrt{4\beta^2 - 3\alpha^2}}{2} \\ 4\beta^2 = 3\alpha^2 + \delta^2 \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}^+ \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{\alpha + \delta}{2} \\ (2\beta)^2 = \delta^2 + 3\alpha^2 \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}^+ \end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

olarak elde edilir (pozitif tamsayılar kümesi).

(3.7) deki ikinci denklem; $x^2 + 3y^2 = z^2$ Diophantine denkleminin bir pozitif tamsayı çözümünün ($\delta, \alpha, 2\beta$) üçlüsü olduğunu gösterir. ($\delta, \alpha, 2\beta$) çözüm üçlüsü;

$$\delta = \frac{d\left|3\kappa^2 - \lambda^2\right|}{2}, \alpha = d\kappa\lambda, 2\beta = \frac{d(3\kappa^2 + \lambda^2)}{2}$$

olarak bulunur ki bu ifadeler ile (3.7) ile birleştirilirse δ, α, β tamsayıları; d, κ, λ ∈ Z^+ ve (κ, λ) = 1 için

$$\alpha = d\kappa\lambda,\ \ \beta = \frac{d(3\kappa^2 + \lambda^2)}{4},\ \gamma = d\left(\frac{2\kappa\lambda + \left|3\kappa^2 - \lambda^2\right|}{4}\right) \qquad (3.8)$$

formüllerinden bulunur.

İlk gözlemimiz; κ, λ parametreleri tamsayı ve (κ, λ) = 1 olduğundan bu tamsayıların ya her ikisi de tek, ya da onlardan birisinin çift, diğerinin tek olması gerektiğini görürüz. Eğer κ ile λ farklı ikililer ise, o zaman β ve γ nın tamsayı olması için d, 4 ün bir katı olmalıdır. Öte yandan eğer κ ≡ λ ≡ 1 (mod 2) ise, o zaman $\kappa^2 \equiv \lambda^2 \equiv 1 \pmod{4}$ olacağından, $3\kappa^2 + \lambda^2 \equiv 0 \pmod{4}$ elde edilir. Burada β ve γ pozitif tamsayı olmaları gerektiğinden, d pozitif bir değer alır.

Ayrıca κ ≡ λ ≡ 1 (mod 2) olduğu zaman $d = i = 1$ veya κ + λ ≡ 1(mod 2) olmak üzere $i = 4$ için; $i\kappa\lambda,\ i\left(\dfrac{3\kappa^2 + \lambda^2}{4}\right), i\left(\dfrac{2\kappa\lambda + \left|3\kappa^2 - \lambda^2\right|}{4}\right)$ tamsayıları ikişer ikişer aralarında asal ve λ, 3 ile bölünemeyen bir sayıdır. Eğer i, κ ve λ; tamsayıları yukarıdaki şartları sağlamak üzere λ, 3 ün bir katı ise o zaman bu üç tamsayıdan herhangi ikisinin en büyük ortak böleni 3 e eşit olacaktır. Sonra, (3.8) formüllerinde

$\alpha \leq \beta \leq \delta$ şartının geçerli olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla bu κ ve λ tamsayı parametrelerinin sağlaması gereken şartlarını belirlememizi mümkün kılar.

Daha sonra $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - \alpha\gamma$ denkleminin pozitif tamsayılardaki bütün çözümlerini elde ettikten sonra, bu çözümler arasından $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan çözümleri belirlemeliyiz. (3.8) ifadesine bu şartlar uygulanırsa;

$$d\kappa\lambda \leq \frac{d(3\kappa^2+\lambda^2)}{4} \leq d\left(\frac{2\kappa\lambda + \left|3\kappa^2-\lambda^2\right|}{4}\right) \tag{3.9}$$

elde edilir. *d, κ, λ* lar pozitif olduğundan, kısa bir cebirsel işlem sonucunda, (3.9) daki ilk eşitsizlikten;

$$\left(\frac{\lambda}{\kappa}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\kappa}-3\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\kappa} \leq 1 \, yada \, \frac{\lambda}{\kappa} \geq 3\right) \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada (λ, κ) = 1 olduğundan $\frac{\lambda}{\kappa}=1$ için $\lambda = \kappa = 1$ ve $\frac{\lambda}{\kappa}=3$ için $\lambda = 3$, $\kappa = 1$ olacağını belirtelim. (3.8) den dolayı ilk durumda; $\alpha = \beta = \gamma = d$ olduğunu, ikinci durumda ise $\alpha = \beta = \gamma = 3d$ olduğunu görürüz ki, her iki durumda da üçgen eşkenar olur (aşağıda bu durumun bir tanesi kabul edilmiştir).

λ ve κ pozitif tamsayı olduklarından, (3.10) ifadesi 1 ≤ λ ≤ κ veya 3 ≤ 3κ ≤ λ değerleri içinde elde edilebilir ki bunun aralık gösterimi $\frac{\lambda}{\kappa} \in (0,1] \cup [3+\infty)$ olarak bulunur.

(3.10) altında, (3.9) daki ikinci eşitsizliğin de sağlandığını gösterelim. $\sqrt{3}$ bir irrasyonel sayı olduğundan $3\kappa^2 - \lambda^2$ sıfır olamaz. Eğer $3\kappa^2 - \lambda^2 > 0$ ise o zaman $\left|3\kappa^2-\lambda^2\right| = 3\kappa^2-\lambda^2$ olacağından (3.9) daki ikinci eşitsizlikten;

$$d\left(\frac{2\kappa\lambda + \left|3\kappa^2-\lambda^2\right|}{4}\right) \geq \frac{d(3\kappa^2+\lambda^2)}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)\left[\frac{\lambda}{\kappa}-1\right] \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{\lambda}{\kappa} \quad \text{(olduğu}$$

için) $0 < \frac{\lambda}{\kappa} \leq 1$, (3.10) ile uyumlu ve $3\kappa^2 - \lambda^2 > 0$ olması gerektiğinden $0 < \frac{\lambda}{\kappa} < \sqrt{3}$ bulunur. Benzer şekilde eğer $3\kappa^2 - \lambda^2 < 0$ ise o zaman $\left|3\kappa^2-\lambda^2\right| = \lambda^2 - 3\kappa^2$ olacağından ve ikinci eşitsizlikten $\frac{\lambda}{\kappa} \geq 3$ elde edilir ki (3.10) ile uyumlu ve aynı zamanda $3\kappa^2 - \lambda^2 < 0$ olması gerektiğinden $\sqrt{3} < \frac{\lambda}{\kappa}$ elde edilir. Buradan $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ olmak üzere (3.8) ve (3.10) ile birlikte; $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma$ denkleminin bütün pozitif tamsayı çözümlerinin tanımlanacağı açıktır. Üstelik kosinüs teoreminden üçgenin B açısını 60^o olarak buluruz.

Geriye gerçek bir üçgenin oluştuğundan emin olmak için; $\alpha + \beta > \gamma$, $\beta + \gamma > \alpha$, $\alpha + \gamma > \beta$ üçgen eşitsizliklerinin gerçekleştiğinin kontrol edilmesi kalır.

$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow$ ((3.8) den dolayı) $2\kappa\lambda + 3\kappa^2 + \lambda^2 > |3\kappa^2 - \lambda^2|$ olması gerektiği; $|3\kappa^2 - \lambda^2| \leq |3\kappa^2| + |\lambda^2| = 3\kappa^2 + \lambda^2$ ve κ ile λ nın pozitif olmasından açıktır. İkinci üçgen eşitsizliği olan $\beta + \gamma > \alpha$ ifadesi $(\kappa - \lambda)^2 + 2\kappa^2 + |3\kappa^2 - \lambda^2| > 0$ ifadesine denk olur ki geçerli olduğu açıktır. Üçüncüsü olan $\alpha + \gamma > \beta$ üçgen eşitsizliğini gerçekleştirmek için, (3.10) den faydalanarak $3\kappa^2 - \lambda^2 > 0$ ile $3\kappa^2 - \lambda^2 < 0$ olması durumlarını irdelemek gerekir. Ayrıntıları bir kenara bırakıyoruz. Ayrıca, (3.8) ile (3.10) ifadelerini birleştirir ve gerekli hesaplamaları yaparsak

$$\rho = \frac{2\tau}{\beta} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\gamma}$$

oranından $2 < \rho \leq 3$ olması gerekeceğinden, önceki kesimdeki sonuçtan bunun sağlandığını görürüz. Buradan şu sonuçları çıkarırız.

Kenar uzunlukları α, β, γ tamsayıları $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ve onun açılarının **(a)** dizisi bir aritmetik dizi olacak şekildeki bütün üçgenlerin parametrik gösterimi (3.8) ifadeleri ile verilmiştir. Burada, d, κ, λ pozitif tamsayılar, $(\kappa, \lambda) = 1$, $3\kappa \leq \lambda$ veya $1 \leq \lambda \leq \kappa$ dir (veya aralık gösterimi $\frac{\lambda}{\kappa} \in (0,1] \cup [3 + \infty)$ olur.). Ayrıca κ ile λ nın her ikisi de tek olduğunda d herhangi bir pozitif tamsayı olabilir. Ancak $\kappa + \lambda \equiv 1 \pmod{2}$ için d, 4 ün bir katı olmalıdır. Ek olarak $B = 60^o$ açısı ve Teorem 1.2.9 dan dolayı

$$\sin A = \frac{a \sin 60^\circ}{\beta} = \frac{2\kappa\lambda\sqrt{3}}{3\kappa^2 + \lambda^2}$$

ifadesi elde edilir ki burada $0 < A \leq 60^o$ ve $\varphi = 60^o - A$ olacağından φ, **(a)** aritmetik dizisinin farkıdır. Yani $0^o \leq \varphi \leq 60^o$ bulunur.

Son olarak C açısı, $C = 120^o - A = 2\varphi + A = \varphi + 60^o$ olarak bulunur. Aynı zamanda verilen bir (κ, λ) ikilisi için, d yi değiştirmek suretiyle benzer üçgenlerin bütün sınıfının üretilebileceğini belirtelim. Üstelik $\rho = \frac{2\tau}{\beta}$ oranından ρ, (2, 3] aralığına düşer. Yani $2 < \rho \leq 3$ dir.

3.3 Örnekler

Aşağıda kenar uzunlukları tamsayı, **(a)** dizileri aritmetik dizi, 1 ≤ λ, κ ≤ 5 eşitsizliklerini sağlayan λ ve κ farklı ikili olduğunda d parametresi 4 e eşit, λ ile κ nın her ikisinin de tek olduğu durumda *d = 1* olacak şekildeki bütün üçgenlerin listesini veriyoruz. Aşağıdaki veriler; önceki bölümdeki formüllerden A açısının değerini yaklaşık olarak belirlemek için ve bilimsel hesap makinesi kullanılarak elde edilmiştir. Aşağıda on iki üçgen vardır.

Burada tüm benzer üçgenler sınıfı λ ve κ yı sabitleyerek ve d yi değiştirmek suretiyle elde edilmesine rağmen, aşağıdaki örnekler bu sınıfların birbiriyle bağlantılı olmadığını göstermektedir. Bunun nedeni; λ, 3 ün katı alındığı için üçgenin her bir kenarının 3 ün katı olmasıdır.

Örnek 3.3.1 $\kappa = \lambda = 1,\ d = 1,\ \alpha = \beta = \gamma = 1,\ \rho = 3,\ \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$A = 60^\circ,\ \varphi = 0^\circ,\ B = 60^\circ,\ C = 60^\circ$$

Örnek3.3.2 $\kappa = 2,\ \lambda = 1,\ d = 4,\ \alpha = 8,\ \beta = 13,\ \gamma = 15,\ \rho = \frac{36}{13} \approx 2.769230769,$

$$\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{13}, A \approx 32.2042275^\circ,\ \varphi \approx 27.7957725^\circ,\ B = 60^\circ,\ C \approx 87.7957725^\circ$$

Örnek 3.3.3 $\kappa = 3,\ \lambda = 1,\ d = 1,\ \alpha = 3,\ \beta = 7,\ \gamma = 8,\ \rho = \frac{72}{28} = \frac{18}{7} \approx 2.57142851,$

$$\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}, A \approx 21.7867893^\circ,\ \varphi \approx 38.2132107^\circ,\ B = 60^\circ,\ C \approx 98.2132107^0$$

Örnek 3.3.4 $\kappa = 4,\ \lambda = 1,\ d = 4,\ \alpha = 16,\ \beta = 49,\ \gamma = 55,\ \rho = \frac{120}{49} \approx 2.448979592,$

$$\sin A = \frac{8\sqrt{3}}{49}, A \approx 16.4264214^\circ,\ \varphi \approx 43.5735786^\circ,\ B = 60^\circ,\ C \approx 103.5735786^\circ$$

Örnek 3.3.5 $\kappa = 5,\ \lambda = 1,\ d = 1,\ \alpha = 5,\ \beta = 19,\ \gamma = 21,$

$$\rho = \frac{45}{19} \approx 2.368421053, \sin A = \frac{10\sqrt{3}}{76} = \frac{5\sqrt{3}}{38},$$

$A \approx 13.17355111^\circ$, $\varphi \approx 46.82644889^\circ$, $B = 60^\circ$, $C \approx 106.8264489^\circ$

Örnek 3.3.6 $\kappa = 3,\ \lambda = 2,\ d = 4,\ \alpha = 24,\ \beta = 31,\ \gamma = 35,$

$$\rho = \frac{90}{31} \approx 2.903225806, \sin A = \frac{12\sqrt{3}}{31},$$

$A \approx 42.10344887^\circ$, $\varphi \approx 17.89655113^\circ$, $B = 60^\circ$, $C \approx 77.89655113^\circ$

Örnek 3.3.7 $\kappa = 5,\ \lambda = 2,\ d = 4,\ \alpha = 40,\ \beta = 79,\ \gamma = 91,\ \rho = \dfrac{210}{79} \approx 2.658227848,$

$\sin A = \dfrac{20\sqrt{3}}{79}, A \approx 26.00782389^\circ$, $\varphi \approx 33.99217611^\circ$, $B = 60^\circ$, $C \approx 93.99217611^\circ$

Örnek 3.3.8 $\kappa = 1,\ \lambda = 3,\ d = 1,\ \alpha = \beta = \gamma = 3, \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, A = 60^\circ, \varphi = 0^\circ,$

$B = 60^\circ$, $C = 60^\circ$

Örnek 3.3.9 $\kappa = 4,\ \lambda = 3,\ d = 4,\ \alpha = 48,\ \beta = 57,\ \gamma = 63,$

$$\rho = \frac{168}{57} = \frac{56}{19} \approx 2.947368421, \sin A = \frac{24\sqrt{3}}{57} = \frac{8\sqrt{3}}{19},$$

$A \approx 46.82644889^\circ$, $\varphi \approx 13.17355111^\circ$, $B = 60^\circ$, $C \approx 73.17355111^\circ$

Örnek 3.3.10 $\kappa = 5,\ \lambda = 3,\ d = 1,\ \alpha = 15,\ \beta = 21,\ \gamma = 24,$

$$\rho = \frac{60}{21} = \frac{20}{7} \approx 2.857142857, \sin A = \frac{30\sqrt{3}}{84} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$A \approx 38.2132107^\circ, \varphi \approx 21.7867893^\circ$, $B = 60^\circ$, $C \approx 81.7867893^\circ$

Örnek 3.3.11 $\kappa = 1,\ \lambda = 4,\ d = 4,\ \alpha = 16,\ \beta = 19,\ \gamma = 21,$

$$\rho = \frac{56}{19} \approx 2.94736841, \sin A = \frac{32\sqrt{3}}{76} = \frac{8\sqrt{3}}{19},$$

$A \approx 46.82644889^\circ$, $\varphi \approx 13.17355111^\circ$, $B = 60^\circ$, $C \approx 73.17355111^\circ$

Bu üçgenin örnek 3.3.9 daki üçgenle benzerliğine dikkat ediniz (κ = 4, λ = 3, *d* = *4* için).

Örnek 3.3.12 $\kappa = 1,\ \lambda = 5,\ d = 1,\ \alpha = 5,\ \beta = 7,\ \gamma = 8,$

$$\rho = \frac{80}{28} = \frac{20}{7} \approx 2.857142857, \sin A = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$A \approx 38.2132107^\circ, \varphi \approx 21.7867893^\circ$, $B = 60^\circ$, $C \approx 81.7867893^\circ$

Bu üçgenin örnek 3.3.10 daki üçgenle benzerliğine dikkat ediniz(*κ = 5 λ = 3, d = 1* için).

4. GENEL ARİTMETİK ÜÇGENLER VE BHASKARA DENKLEMİ

Bu bölümde, $x^2 + dy^2 = z^2$ Diophantine denkleminin, $d = 3$ durumundaki $x^2 + 3y^2 = z^2$ denklemi ile Bhaskara denkleminin genelleştirilmiş aritmetik üçgenler arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Bu genel aritmetik üçgenlerin Bhaskara denkleminin çözümlerine karşılık geldiği gösterilmiştir.

α, x, d tamsayıları için, bir üçgenin kenar uzunlukları $\alpha x - d$, x, $\alpha x + d$ ve alanı da tam sayı ise, bu üçgene *α tipinde d-aritmetik üçgen* dendiğini Tanım 1.2.19 dan biliyoruz. Örneğin; 8, 29, 35 üçgeni $\alpha = 4$, $x = 8$ ve $d = 3$ olan bir aritmetik üçgendir. $d \neq 0$ olması durumunda, d nin negatif değerleri de bu özelliği sağlar ki bu durumda d aritmetik üçgeni, aynı zamanda bir $(-d)$ aritmetik bir üçgendir.

Burada şu iki özel durum önemlidir: Bunlar;

(1) Eğer p ve q ikiz asallar ve $\alpha = \sqrt{pq+1}/2$ ise, o zaman α tipindeki aritmetik üçgenlere $x^2 - pqy^2 = d^2$ denklemi karşılık gelir ki bu ikiz asalların kullanımının ilginç bir durumudur.

(2) Eğer p, bir tam kareye yakın komşuluğa sahip bir tek sayı (3, 7, 11, 23 vb) ve α da $\alpha = (p \pm 1)/2$ biçiminde uygun seçilmiş bir işarete sahip ise, o zaman α-aritmetik üçgenleri, $x^2 - py^2 = d^2$ denklemine karşılık gelir. Bu durumların her ikisi de Bhaskara denkleminin birçok örneğinde gerçeklenir (Ribenboim,1988).

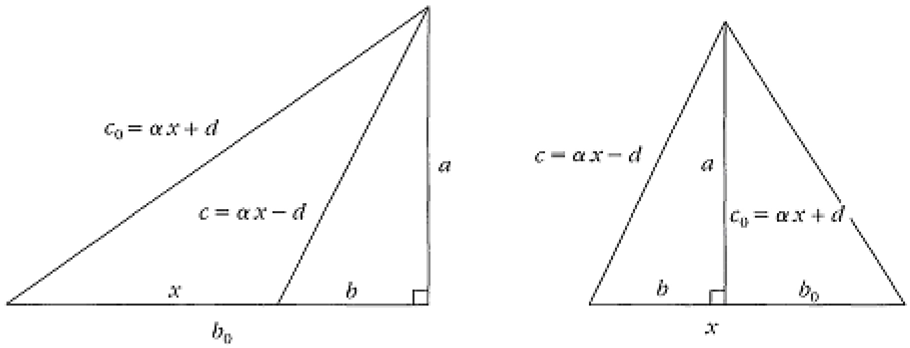
4.1 Aritmetik Üçgenlerin Özellikleri

Dik üçgen olmayan bir aritmetik üçgen, kenarları tam sayı olan iki dik üçgene bölünebildiğini 2. Bölüm 3. kesimden biliyoruz. Bir Pythagorean üçlüsünün, (a, b, c) biçiminde olduğunu ve bileşenlerin $a^2 + \mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2$ denklemini sağladığını hatırlayalım. Böylece her bir aritmetik üçgen, iki Pythagorean üçlüsüne ayrılmış olur. Bunun nasıl olduğu anlatılırken, Pythagorean üçlüsünün orta bileşeninin pozitif olmasını gerektirmeyen bir kuraldan burada söz etmeliyiz (Beauregard ve Suryanarayan, 1996 ve 1997).

α tipinde bir primitif aritmetik üçgen verilsin. Bu durumda üçgenin kenarları x, $\alpha x - d$, $\alpha x + d$ biçiminde aralarında asal sayılar olur. Şimdilik onun geniş açılı olduğu varsayalım. Uzunluğu x olan tabana, **Şekil 4.1(a)** da görüldüğü gibi, karşı köşeden dik çizilecek şekilde b kadar uzatırız. Üçgenin dar açılı olması durumunda x uzunluğundaki tabana karşısındaki köşeden **Şekil 4.1(b)** da görüldüğü gibi, bir dik çizilir. Böylece aritmetik üçgen, taban uzunlukları b ve $b_0 = x \pm b$ olan iki üçgene ayrılır. **Şekil 4.1** deki tüm uzunlukların tam sayı olduğunu göstermek zor değildir. O zaman orada dik üçgenlere karşılık gelen Pythagorean üçlülerini,

$$A = (a, b, c) \text{ ve } (a, b_0, c_0)$$

şeklinde gösteririz.



Şekil 4.1(a) **Şekil 4.1(b)**

Şekil 4.1: α Tipinde Bir Aritmetik Üçgen

Aritmetik üçgenin yarı çevresi, $x(\alpha + 1/2)$ dir. Bu üçgenden Pythagorean üçgenlerinin oluşturulması için Heron alan formülünü kullandığımızda; alanının karesini,

$$\left(\frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)x\left(\frac{x}{2} - d\right)\left(\frac{x}{2} + d\right)$$

olarak buluruz. Bu son ifadede $x = 2x_0$ ve $N = 4\alpha^2 - 1$ olarak alırsak eşitliğimiz

$$a^2 = N(x_0^2 - d^2) \tag{4.1}$$

ifadesine dönüşür. Burada N için $4\alpha^2 - 1 = (2\alpha - 1)(2\alpha + 1)$ ifadesinden N nin ardışık iki tek sayının çarpımı olduğunu ve böylece N nin, 8 modülüne göre 3 e veya 7 ye eşit olacağını belirtelim. p asal bir sayı ve p^j de, N yi bölen p nin en büyük kuvveti olsun. Eğer j çift ise, o zaman p^j , a^2 yi böleceğinden, (4.1) ifadesi p^j ile kısaltılabilir. Öte yandan eğer $j = 2i + 1$ ise, p^{2i}, a^2 yi böler ve (4.1) ifadesi p^{2i} ile kısaltılırsa;

$$a_1^2 = pN_0(x_0^2 - d^2)$$

ifadesine ulaşırız ki burada $p\,N_0 \equiv N \ (mod\ 8)$ olur (Herhangi bir p tek sayısı için

$p^2 \equiv 1$ (mod 8) olduğundan). N_0 ın her bir asal böleni için yukarıdaki yöntem tekrar edilirse,

$$a_k^2 = p_1 ... p_k (x_0^2 - d^2)$$

eşitliğine ulaşırız ki burada p_i ler farklı asallar ve $p_l ... p_k \equiv$ N(mod 8) dir. Bu son denklemde $a_k = p_l .... p_k a_0$ olarak alırsak

$$p_1 ... p_k a_0^2 = x_0^2 - d^2,$$

ifadesini buluruz. Bu denklemi

$$x^2_0 - Da_0^{\ 2} = \mathrm{d}^2 \tag{4.2}$$

biçiminde yeniden düzenleriz ki bu denklem bir Bhaskara denklemidir. Burada $D \equiv 3$ veya 7 (mod 8) ve D nin farklı asal sayıların çarpımı olduğuna, aynı N nin bu asal çarpanlarının tek kuvvet ihtiva etmesi gerektiğine ilgi çekilmelidir. Bu (4.2) denkleminin (x_0, a_0) primitif çözümleri, primitif d – aritmetik üçgenleri tanımlar ki burada d ile D aralarında asal tamsayılar olmak zorundadırlar. Son olarak, x_0 ve a_0 ın her ikisinin de tek olmaması gerektiğini ve d nin tek olduğunu belirtelim (Bunu görmek için, (4.2) denklemini mod 8 e göre düşünelim.). Bütün bunları şu teoremle ifade ederiz.

Teorem 4.1 (α – Tipinde Aritmetik Üçgenler). Her bir $N = 4\alpha^2 - 1$ ve N nin asal çarpanları tek kuvvet ihtiva edecek şekilde D farklı asalların çarpımı olmak üzere (4.2) nin primitif çözümlerine, tabanı $x=2x_0$, kenarları $\alpha x \pm d$ ve yüksekliği $a = a_0\sqrt{ND}$ olan d-aritmetik üçgenler karşılık gelir.

Dik üçgenlerin özel durumlarını kullanalım. **Şekil 4.1** e göre bir aritmetik üçgenin dik üçgen olması için gerek ve yeter şart,

$$(\alpha x + d)^2 = (\alpha x - d)^2 + x^2,$$

olmasıdır. Bunun gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart $x = 4\alpha d$ olmasıdır. Burada üçgenin primitif olması $d = 1$ olmasını gerektirir. Bu duruma karşılık gelen Pythagorean üçlüleri

$$(4\alpha^2 - 1, 4\alpha, 4\alpha^2 + 1)$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha = 1$ için (3, 4, 5) Pythagorean üçlüsünün oluşacağına ilgi çekelim. Daha iyi bir izah için, $N = 4\alpha^2 - 1$ biçiminde ve farklı asalların çarpımı olduğunda $N = D$ olduğunu varsayabiliriz. D nin bu değerini ve $x_0 = 2\alpha$ ifadesini birlikte düşünürsek;

$$x_0{}^2 - Da_0{}^2 = 1 \quad (4.3)$$

denkleminin en küçük (Fundemental) çözümünü (2α,1) olarak buluruz. Bu çözümde bir dik üçgen oluşturur. Örneğin α = 2 olduğu zaman $N = 4\alpha^2 - 1 = 3.5$ olarak bulunur ki bu da (15, 8, 17) Pythagorean üçlüsünü üretir.

4.2 α – Tipinde Aritmetik Üçgenlerin İlk Birkaç Modeli

1 – Tipinde aritmetik üçgenler için (4.2) denklemi,

$$x_0{}^2 - 3a_0{}^2 = d^2 \quad (4.4)$$

şekline dönüşür. Bu durum Beauregard ve Suryanarayan (1997)'ın çalışmasında ayrıntılı olarak incelenmiştir.

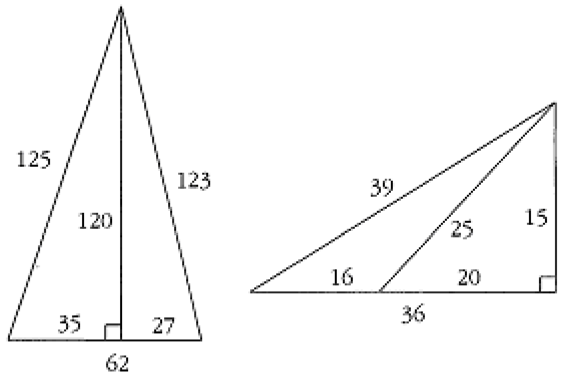
Teorem 4.2 (1 – Tipinde Aritmetik Üçgenler İçin Varlık Teoremi). Eğer d bir tam sayı ise o zaman d – aritmetik üçgenin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart (4.4) denkleminin bir primitif çözüme sahip olmasıdır. Bu durumun geçerli olabilmesi için gerek ve yeter şart $d = \pm 1$ veya d nin 12 modülüne göre ± 1 e kongruent olacak şekilde asalların çarpımı olmasıdır.

$\alpha = 2$ tipindeki üçgenler için (4.1) denkleminde $4\alpha^2 - 1 = N = 15$ olarak buluruz. Böylece (4.2) denklemi;

$$x_0^2 - 15a_0{}^2 = d^2 \quad (4.5)$$

ifadesine dönüşür. Buradan x = $2x_0$ bir aritmetik üçgenin taban uzunluğu ve $a = 15a_0$, da onun yüksekliği olur. (4.5) denkleminde $d = 1$ olduğu zaman temel çözüm (4, 1) olup, bu daha önce üzerinde durduğumuz (8, 15, 17) dik üçgenini tanımlar. Adler ve Coury (1995), bu denklemin sonsuz sayıda primitif çözümü olduğunu göstermişlerdir ki bu çözümlere daha çok (dik olmayan) aritmetik üçgenler karşılık gelir.

Örneğin, (x_0, a_0) = (31, 8) için, kenarları $x = 2x_0$ = 62, 2(62) ± 1 = 123, 125 ve yüksekliği $a = 15a_0$ = 120 olan üçgeni elde ederiz (bak, **Şekil 4.2(a)**). d tek sayı ve d ile 15 aralarında asal olmaları gerektiğinden, d nin 1 den sonraki uygun değeri 7 olur.



Şekil 4.2(a) **Şekil 4.2(b)**

Şekil 4.2: Tip 2 Aritmetik Üçgenler

(4.5) denkleminde $d = 7$ olması durumunda bu denklemin $(x_0, a_0) = (8, 1)$ çözümünü göz önüne alalım. Bu çözümse, tabanı $x = 16$ ve yüksekliği $a = 15$ olan aritmetik üçgeni tanımlar (**Şekil 4.2(b)** de çizildiği gibi). d nin diğer hangi değerleri (4.5) i çözülebilir hale getirir ve dolayısıyla 2 Tipinde d – aritmetik üçgenler nasıl belirlenir? Beauregard ve Suryanarayan (1997) ın çalışmalarındaki benzer muhakemenin kullanılmasıyla, bu tür üçgenlerin mevcut olması için gerek ve yeter şart $d = \pm 1$ veya d nin, $q \equiv \pm 1, \pm 7, \pm 11, \pm 17 \pmod{60}$ biçimindeki asalların çarpımı olması gerektiği gösterilebilir.

3 – Tipindeki aritmetik üçgenler, (4.2) denkleminin $4\alpha^2 - 1 = N = D = 35$ için çözülmesine bağlı olarak belirlenir. Bu durumda işlem, 2 – tipindeki yapılanlara benzerdir. Gerçekten, bu durumların her ikisi de, $D = N$ nin ikiz asalların çarpımı olmasıyla karakterize edilmektedir. p ve q ikiz asal olduğunda, bazı α tam sayıları için $pq = 4\alpha^2 - 1$ (Yani $\alpha = \sqrt{pq+1}/2$) dir. Bu durumda, α – tipinde aritmetik üçgenler mevcuttur ve d nin uygun değerleri için,

$$x_0^2 - pqa_0^2 = d^2$$

denkleminin çözülmesiyle, 2 – tipindeki duruma benzer bir şekilde bu üçgenler belirlenir.

Primitif α – tipinde aritmetik üçgenlerin, Bhaskara denklemini çözerek nasıl belirlenebileceğini açıkladık. $\alpha = 4$ durumunda da yukarıdaki düşünce kullanılır. Bu duruma karşılık gelen Bhaskara denklemi

$$x_0^2 - pqa_0^2 = d^2$$

biçiminde olur ki burada p asalı bir kare sayının tek komşuluğuna yakındır. α = 4 olduğunda p = 7 elde edilir ki bu durumda genel olarak $p = 2\alpha \pm 1$ biçimindedir. Beauregard ve Suryanarayan (1997) ın çalışmalarındaki aritmetik üçgenler de bu kategoriye girer ($\alpha = 1$ ve $p = 3$ durumu).

Son olarak, denklemdeki p nin bazı değerine $\alpha -$ tipinde farklı aritmetik üçgenlerin sonsuz sayıda karşılık geldiği gösterilebilir.

Örneğin, (4.4) denklemindeki gibi, p = 3 olsun. Teorem 4.1 e göre, (4.4) ün çözülebilir olması için, $4\alpha^2 - 1$ in $3k^2$ biçiminde olmasına ihtiyacımız var. Fakat $4\alpha^2 - 3k^2 = 1$ denklemi $(2\alpha, k)$ şeklinde sonsuz sayıda primitif çözümleri olan bir Bhaskara denklemidir. Buradan α nın ilk birkaç değeri 1, 13, 181 vb. dir. (4.4) denkleminin $(x_0, a_0) = (2, 1)$ en küçük çözümü kullanılırsa, aynı $x = 2x_0 = 4$ tabanına karşılık kenarlar; $(4\alpha-1, 4\alpha, 4\alpha+1)$ biçimindedir. Bunlar;

$\alpha = 1$ için (3, 4, 5)

$\alpha = 13$ için (51, 52, 53)

$\alpha = 181$ için (723, 724, 725)

olarak bulunur.

5. KAYNAKLAR

[1] Adler, A. and Coury, J.E., 1995, The Theory of Numbers, Jones & Bartell Publishers, Boston.

[2] Anglin, W.S., 1995, The Queen of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, London.

[3] Ayres, F., 1954, Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry, Schaum Publishing Co, New York.

[4] Beauregard, R.A., and Suryanarayan, E.R., 1996, Pythagorean Triples, The hyperbolic wiew, The College Mathematics Journal, v.27, n.3, p.170-181.

[5] Beauregard, R.A. and Suryanarayan, E.R., April 1997, Arithmetic Triangles, Math Magazine, v.70, n.2, p.13-17.

[6] Beauregard, R.A., and Suryanarayan, E.R., 2000, Genaral Arithmetic Triangles and Bhaskara's Equation, The College Mathematics Journal, v.31, n.2, p.111-115.

[7] Buchholz, R.H. and MacDougall, J.A., 1998, Heron Quadrilaterals with Sides in Aritmetic or Geometric Progression, Australia.

[8] Buchholz, R. H. and MacDougall, J. A., 1999, Heron Quadrilaterals with Sides in Arithmetic Progression, Bull. Aus. Math. Soc., p.263-269.

[9] Canan, M., 2002, Aritmetik Üçgenler ve Pell Denklemleri ile İlişkisi Üzerine (Yüksek Lisans Tezi), S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü - Konya.

[10] Dickson, L.E., 1971, History of the Theory of Numbers, Vol. II, 3th ed., Chelsea Publishing Company, New York.

[11] Dunham, W., 1990, Heron's Formula for Triangular Areas, Wiley, New York, NY, p. 113 – 132.

[12] Eves, H., 1983, An Introduction to the History of Mathematics, 5th ed., Saunders, Philadelphia.

[13] Fleenor, C.R., 1987, Heronian Triangles with Consecutive Integer Sides, J.Recr. Math., 28(2), p.113-115.

[14] Gilder, J., 1982, İnteger-Sided Triangles with an Angle of 60^o, Math. Gazete 66, p.261-266.

[15] Guy, R.K., 1994, Unsolved Problems in Number Theory , Springer-Verlag, New York, NY, p.173 -181.

[16] MacDougall, J.A., 2003, Heron Triangles With Sides in Arithmetic Progression, Jour. Rec. Math. 31. v.3, p.189-196, Australia.

[17] Maxwell, E.A., 1958, Triangles Whose Angles Are in Arithmetic Progression, Mathematical Gazette 42, p.191-193.

[18] Mordell, L., 1969, Diophantine Equations, Academic Pres, New York, NY.

[19] Nagell, T., 1951, Intoduction to Number Theory, Wiley, New York.

[20] Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery,H.L.,1991, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed., Wiley, New York.

[21] Ribenboim, P., 1988, The Book of Prime Numbers Records, Springer – Verlag.

[22] Robbins, N., 1993, Beginning Number Theory, Wm.C. Brown, Oxford. London.

[23] Rosen, K.H.,1993, Elementary Number Theory and Its Applications, third edition, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

[24] Sastry, K.R.S., 2000, Geometric and Aritmetic Triangles, Mathematics and Computer Education, v.34, n.3, p.259-264.

[25] Sierpinski, W., 1962, Pythagorean Triangles, Graduate School of Science, Yeshiva University, New York.

[26] Sierpinski, W., 1988, Elementary Theory of Numbers, published by Elsevier Publishing and distributed by North Holland, North- Holland Mathematical Library 32, Amsterdam.

[27] Şahin R. ve Arkadaşları, 1997, Geometri-2 Sürat geometri serisi 22.TY.03, Sürat Yayınları, İstanbul.

[28] Şenay, H., 2007, Sayılar Teorisi Dersleri, Selçuk Üniversitesi Yayını, Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya.

[29] Wright, H.N., 1962, First Course in the Theory of Numbers, Wiley, New York.

[30] Zelator, K., 2005, Triangles With Integer Side Lengths and Rational Internal Radius *P* and External Radius *R*, Mathematics and Computer Education, n.39, 2, Academic Research Library, p.152.

[31] Zelator, K., 2006, The Diophantine Equation $x^2 + ky^2 = z^2$ and İntegral Trıangles with A Cosine Value of $\frac{1}{n}$, Mathematics and Computer Education,n.40, 3, p.191-197.
[32] Zelator, K., 2008, Triangle Angles and Sides in Progression and the Diophantine Equation $x^2 + 3y^2 = z^2$, arxiv:0803.3778(pdf).